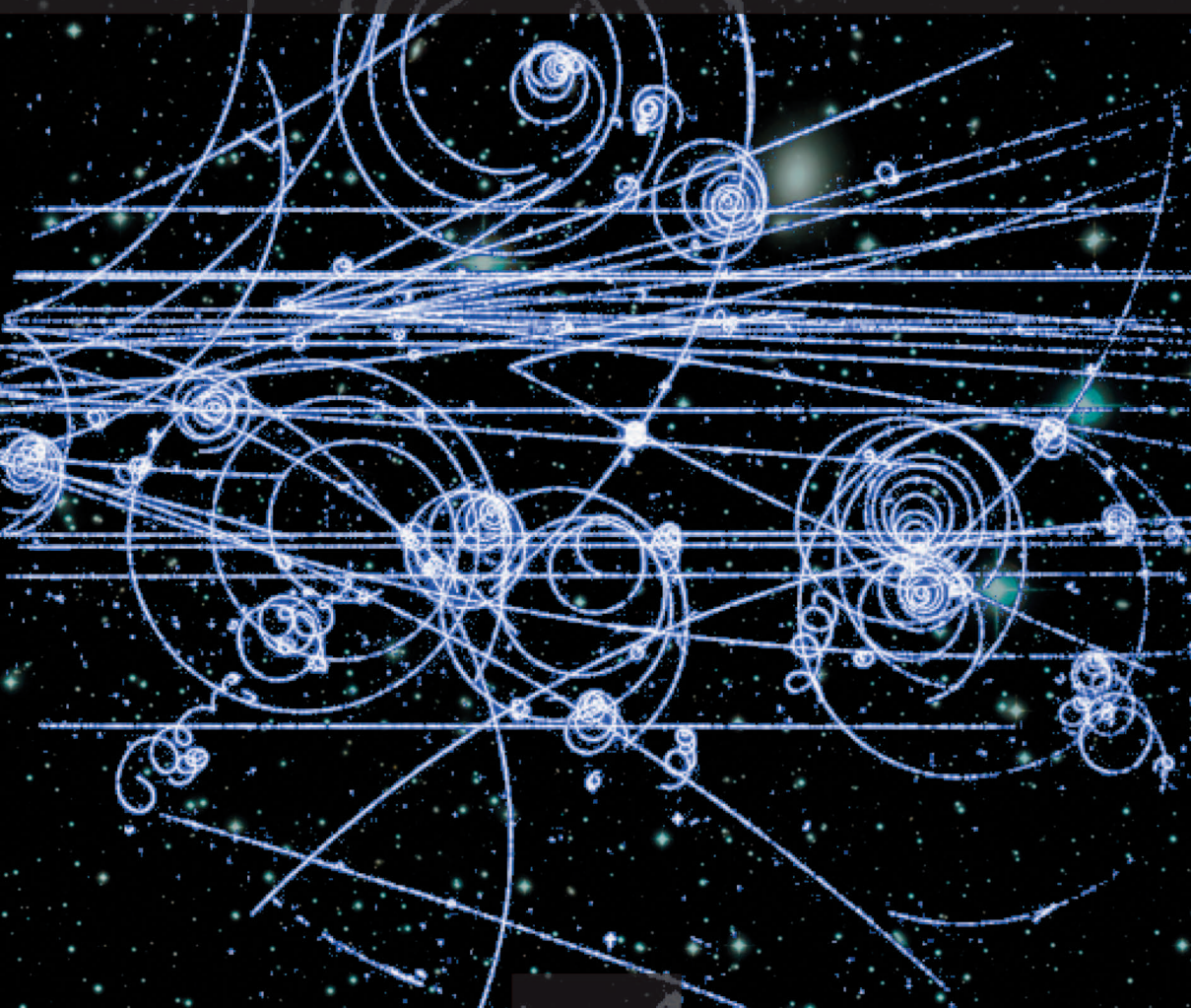
Física de partículas y de astropartículas

Antonio Ferrer Soria
Eduardo Ros Martínez



PUV

FÍSICA DE PARTÍCULAS
Y DE ASTROPARTÍCULAS

Educació. Materials 83

Antonio Ferrer Soria
Eduardo Ros Martínez

FÍSICA DE PARTÍCULAS Y DE ASTROPARTÍCULAS

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA
2005

Colección: Educació. Materials
Director de la colección: Guillermo Quintás Alonso

FOTOCOPIAR LIBROS
NO ES LEGAL

Esta publicación no puede ser reproducida, ni total ni parcialmente, ni registrada en, o transmitida por, un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio, ya sea fotomecánico, fotoquímico, electrónico, por fotocopia o por cualquier otro, sin el permiso previo de la editorial.

© Los autores, 2005
© De esta edición: Universitat de València, 2005

Producción editorial: Maite Simón
Fotocomposición y maquetación: los autores y Publicacions de la Universitat de València
Cubierta:
Diseño: Pere Fuster (Borràs i Talens Assessors SL)
Tratamiento gráfico: Celso Hernández de la Figuera

ISBN: 978-84-370-8645-3

Índice

PRESENTACIÓN 11

PARTE I

CONSTITUYENTES ELEMENTALES DE LA MATERIA

Capítulo 1. Constituyentes de la materia: introducción y generalidades 15

1.1 Introducción 15
1.2 Del e^- al Z^0. Los descubrimientos de partículas 18
1.3 Clasificación de partículas 25
1.4 Las cuatro interacciones fundamentales 35
1.5 Ejercicios 53

PARTE II

MÉTODOS EXPERIMENTALES EN FÍSICA DE PARTÍCULAS

Capítulo 2. Aceleradores de partículas 57

2.1 Generalidades sobre aceleradores de partículas 57
2.2 Aceleradores de corriente continua 62
2.3 Aceleradores de corriente alterna 62
2.4 Colisionadores 67
2.5 Ejercicios 71

Capítulo 3. Interacción de las partículas con la materia 73
3.1 Introducción 73
3.2 El concepto de sección eficaz 73
3.3 Interacción de partículas cargadas con la materia 85
3.4 Interacción partícula-átomo 86
3.5 La fórmula de Bethe-Bloch 87
3.6 Interacción de e^+ y e^- con la materia 94
3.7 Interacción de fotones con la materia 99
3.8 Ejercicios 106

Capítulo 4. Detectores de partículas 109
4.1 Detectores de partículas 109
4.2 Magnitudes características de los detectores 110
4.3 Detectores gaseosos. Contador Geiger-Müller 118
4.4 Detectores de centelleo. Fotomultiplicadores 122
4.5 Detectores de estado sólido 129
4.6 Detección de partículas neutras 131
4.7 Detectores Cherenkov 133
4.8 Calorímetros 136
4.9 Ejercicios 142

Capítulo 5. Métodos estadísticos en física de partículas 145
5.1 Errores instrumentales y estadísticos 145
5.2 Distribuciones de probabilidad 147
5.3 Distribuciones uniforme, binomial, Poisson, Gauss y χ^2 149
5.4 Propagación de errores estadísticos 156
5.5 Método de máxima verosimilitud 157
5.6 Ajustes de curvas 161
5.7 Ejercicios 164

Capítulo 6. Experimentos en física de altas energías 167
6.1 Introducción 167
6.2 Tipos de experimentos en altas energías 167
6.3 Medida de propiedades de las partículas 171
6.4 El experimento ideal: producción y desintegración del Z^0 176
6.5 Ejercicios 179

PARTE III

SIMETRÍAS Y HADRONES

Capítulo 7. Simetrías y leyes de conservación 183

7.1 Introducción 183
7.2 Invariancia relativista 185
7.3 Traslaciones y rotaciones en el espacio 197
7.4 El grupo SU(2). Espín e isospín 200
7.5 Simetrías $\mathcal{P}$, C y $\mathcal{T}$ 205
7.6 La invariancia *gauge* 219
7.7 Leyes de conservación en las interacciones fundamentales: 220
7.8 Ejercicios 221

Capítulo 8. Espectroscopía de hadrones 225

8.1 El modelo de quarks de los hadrones 225
8.2 Números cuánticos de los hadrones 227
8.3 La simetría *SU* (3) 229
8.4 Multipletes de bariones y mesones 231
8.5 Masas y momentos magnéticos de los hadrones 241
8.6 Espectroscopía de mesones pesados 248
8.7 Los *Quarkonia* y el potencial de QCD 258
8.8 El descubrimiento del último quark (el quark *t*) 265
8.9 Ejercicios 266

PARTE IV

INTERACCIONES FUNDAMENTALES

Capítulo 9. Interacciones débiles 271

9.1 Introducción 271
9.2 Las familias de leptones 272
9.3 Violación de paridad 280
9.4 Teoría **V-A** de la desintegración beta 285
9.5 La matriz CKM 294
9.6 Violación de CP 306
9.7 Ejercicios 310

Capítulo 10. La unificación electrodébil 313
10.1 Interacciones de neutrinos 313
10.2 La simetría $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ 323
10.3 Los bosones intermediarios 328
10.4 Teorías *gauge* no abelianas 333
10.5 El mecanismo de Higgs 337
10.6 Aniquilación e^+e^- 341
10.7 Resultados experimentales de LEP 355
10.8 Ejercicios 365

Capítulo 11. El modelo de partones y QCD 369
11.1 La interacción hadrónica a alta energía 369
11.2 El modelo de partones 376
11.3 El color de los quarks y QCD 393
11.4 Evolución de la constante de acoplo con la energía 397
11.5 QCD perturbativa 400
11.6 La gran unificación 404
11.7 Ejercicios 409

PARTE V
FÍSICA DE ASTROPARTÍCULAS

Capítulo 12. Neutrinos y rayos cósmicos 417
12.1 Neutrinos solares, de reactores y atmosféricos 417
12.2 Neutrinos de aceleradores 425
12.3 Neutrinos de supernova 427
12.4 Oscilaciones de neutrinos 431
12.5 Neutrinos de Majorana 436
12.6 La radiación cósmica 437
12.7 Ejercicios 449

Apéndices 455
Apéndice A. Constantes físicas 457
Apéndice B. Múltiplos y submúltiplos 459
Apéndice C. Tablas de partículas 461
Apéndice D. La ecuación de Dirac 471
Apéndice E. Funciones de estructura del protón 473
Apéndice F. Funciones especiales 475
Apéndice G. La tabla de Mendeleiev 481

Índice de figuras 483

Bibliografía 489

Índice analítico 491

Presentación

Estas notas contienen una introducción a la física de altas energías, a veces también llamada física de partículas, estructurada en cinco partes. En la primera se introducen los constituyentes elementales; en la segunda se presentan los métodos experimentales, de capital importancia para la disciplina. La tercera parte se dedica a las simetrías y los hadrones; la cuarta a las interacciones entre constituyentes elementales y la quinta es una introducción a la física de astropartículas, que está emergiendo con mucha vitalidad.

La física de partículas es una parte de la física que se ha desarrollado durante el siglo XX y ha compartido, entre otros, casi toda la misma instrumentación y la metodología que su antecesora: la física nuclear.

Para identificar el contenido de esta disciplina o campo de la física es muy instructivo ver la tabla siguiente:

Campo de la física	Ente físico	Constituyentes	Cuanto del campo	Fuerza
Atómica	Átomo	(e^-, p)	γ	electromagnética (QED)
Nuclear	Núcleo	(p, n)	"π"	nuclear (Yukawa)
Partículas	quarks (q)	qqq (bariones) $q\bar{q}$ (mesones)	gluón (8)	fuerte (QCD)
	q, leptones	$(q, q)+(\ell,\nu)$	γ, Z^0, $W^\pm$	electrodébil (GWS)

Todos los entes descritos en esta tabla, son entes de tamaño extraordinariamente pequeño. El mayor de ellos es el átomo, cuyas dimensiones son del orden de varios Å (10^{-10} m), mientras que los núcleos son objetos de 2 a 7 fm (10^{-15} m). Hoy en día se piensa que los verdaderos constituyentes de la materia son los leptones y los quarks y son entes sin estructura (tienen un tamaño $< 10^{-18}$ cm, que es la distancia mínima que se ha explorado hasta hoy gracias a los aceleradores de partículas de mayor energía disponible, del orden del TeV = 10^{-12} eV.

Entre el tamaño del universo (10^{26} m) y el del protón (10^{-15} m) existen 41 órdenes de magnitud. Curiosamente, el tamaño de la Tierra donde vive el hombre está casi a mitad de camino de los dos extremos.

La otra idea contenida en la tabla anterior se refiere a la de fuerzas debidas al intercambio de partículas. Esta es una noción introducida por las teorías cuánticas de campo, y en particular por la teoría de la electrodinámica cuántica (QED), que supone que la interacción eléctrica entre dos cargas (por ejemplo, la interacción entre un electrón y un protón como en el caso del átomo de hidrógeno) se debe al intercambio de fotones (cuantos del campo electromagnético) virtuales. Que el fotón sea virtual quiere decir que no es real; así, si fuese real, su energía sería $E = pc$ y podría interaccionar con la materia, por ejemplo sufrir efecto fotoeléctrico. La noción de partícula virtual significa también que no tiene un intervalo de tiempo permitido por el principio de incertidumbre $E\ t \sim \hbar$, siendo la incertidumbre sobre la energía tan grande que no puede verificarse la conservación de la energía en el proceso de emisión y absorción del fotón. Puede tratarse de un fotón con $E > pc$ (y se llama *time-like*) o bien $E < pc$ siendo entonces *space-like*.

En física de altas energías es necesario recurrir a sistemas de unidades adecuados para caracterizar los entes estudiados. En estas notas se ha pretendido utilizar sistemáticamente el Sistema Internacional (SI). Sin embargo es necesario familiarizarse con otros sistemas de unidades.

Las masas de los objetos que se estudiarán aquí son extraordinariamente pequeñas (del orden de 10^{-27} kg). Por eso se prefiere utilizar unidades eV/c^2. Recuérdese que 1 eV=1,6 $\times 10^{19}$ J, y que las energías pueden medirse por ejemplo en MeV. Para entender estas unidades basta con recordar la fórmula de Einstein, $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$, que relaciona masa, momento y energía. La masa del electrón es m_e = 0,511 MeV/c^2 y la del protón m_p = 938,3 MeV/c^2. Sin embargo en física nuclear es más frecuente la unidad de masa atómica, u = 931,49 MeV/c^2, de forma que la masa del protón es sencillamente m_p = 1,00727647 u. Esta unidad es consecuencia de tomar la masa del carbono igual a 12u. En física de partículas es muy frecuente encontrarse en la bibliografía con el sistema de unidades llamado *natural*, que suele utilizarse por comodidad. Es el sistema en el que las constantes fundamentales $\hbar = c = 1$. En este sistema, longitudes, masas y tiempos vienen dados en potencias de la energía. En todo caso, siempre se puede recuperar la unidad SI recordando los factores de conversión $\hbar c$ = 197,3 MeV · fm, así como los valores de las constantes $c = 2{,}998 \times 10^{23}$ fm · seg^{-1} y $\hbar = 6{,}582 \times 10^{-22}$ MeV · seg.

Por último, es grato reconocer a los compañeros del Departamento de Física Atómica, Molecular y Nuclear de la Universitat de València por su ayuda para que este texto vea la luz. En particular, la ayuda recibida por el Dr. Juan A. Valls y el interés del Dr. Fernando Martínez en la preparación de algunos de los ejercicios propuestos al final de cada tema.

ANTONIO FERRER
EDUARDO ROS
Valencia, agosto de 2004

Parte I

Constituyentes elementales de la materia

1. Constituyentes de la materia: introducción y generalidades

1.1 Introducción

La física de partículas (denominada también física de altas energías o física subnuclear) es la disciplina científica que tiene por objetivo determinar cuáles son los constituyentes básicos o elementales de la materia y las propiedades de las fuerzas que intervienen en sus interacciones.

En los últimos 25 años del siglo XX, el progreso del conocimiento sobre las propiedades de los constituyentes fundamentales de la materia y sus fuerzas dio lugar al modelo estándar de la física de partículas (exceptuando la gravitación, que tiene poca influencia en el mundo de las partículas). Este modelo es la referencia que se tomará a lo largo de estas notas.

Las partículas elementales han ocupado durante mucho tiempo el papel preponderante de los estudios de la física de altas energías, y lo siguen ocupando, aunque el rol de lo que se ha venido denominando partícula elemental ha sido siempre más amplio que la propia definición.

La denominación de física de altas energías proviene de dos conceptos:

a) por el hecho de que hay partículas fundamentales, como el bosón Z^0, cuya masa es elevadísima, $M_{\mathrm{Z}} = 91{,}1876$ GeV/c^2, casi 100 veces la masa del protón. La equivalencia entre masa y energía ($E = mc^2$) implica que para producir estas partículas es necesaria mucha energía, o sea, hay que provocar colisiones a alta energía;

b) por la dualidad onda-corpúsculo, que postula que toda partícula de momento p tiene una longitud de onda asociada $\lambda = h/p$. Para explorar lo infinitamente pequeño (longitud de onda pequeña), es necesario disponer de proyectiles de alta energía.

Para cimentar los conceptos contenidos en el modelo estándar hay que remontarse a principios del siglo XX, cuando aparecen las nuevas ideas con las que se intenta explicar el átomo y sus propiedades. Dos grandes revoluciones conceptuales tienen lugar en la física, entre 1920 y 1930, que inciden directamente en la física de partículas: las teorías de la *relatividad* y la *mecánica cuántica*.

La consecuencia más conocida de la teoría de la relatividad es que ningún objeto puede desplazarse a una velocidad superior a la de la luz en el vacío:

$$c = 2,99792 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

es decir, una velocidad cercana a los 300.000 km/s.

Otra consecuencia es que la masa no se conserva; puede crearse o destruirse. Eso sí, la energía siempre se conserva. Para ello, hay que incorporar la masa como una nueva forma de energía. Es bien conocida la relación entre la masa en reposo, m, de una partícula y la energía asociada, dada por la fórmula de Einstein:

$$\boxed{E = mc^2} \tag{1.1}$$

La relatividad obliga a reconsiderar las nociones de espacio y tiempo absolutos e idénticos para todos los observadores, inicialmente formuladas por Isaac Newton. Esta concepción, aproximadamente válida en lo cotidiano, es inaplicable a entes que se desplacen a grandes velocidades ya que tanto el espacio como el tiempo son relativos al sistema de observación. Son conceptos tanto más diferentes cuanto la velocidad relativa de los sistemas de referencia sea más cercana a c.

La mecánica cuántica por su parte introduce muchos conceptos revolucionarios que se aplican al mundo atómico y subatómico. Un concepto macroscópico, el determinismo clásico, queda relegado en el microcosmos por el principio de incertidumbre, que relaciona las incertidumbres de dos magnitudes conjugadas, por ejemplo la posición y el momento, x y p a través de la conocida expresión de Heisenberg:

$$\Delta x \Delta p \geq h/2\pi$$

y, por lo tanto, postula la imposibilidad de conocer simultáneamente la posición y la cantidad de movimiento de una partícula (por ejemplo, del electrón en el átomo) y en la que interviene la constante de Planck,

$$h = 6,626076 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

cuyo valor numérico es tan pequeño que sólo tiene consecuencias importantes en el mundo atómico y subatómico.

De especial relevancia es la relación de De Broglie,

$$\boxed{\lambda = \frac{h}{p}} \tag{1.2}$$

que da la longitud de onda λ asociada a una partícula cuyo momento es p. Justifica, como ya se ha visto, la conexión existente entre la física de altas energías y el estudio de los constituyentes básicos de la materia. Al aumentar la energía de un proyectil, disminuye linealmente el tamaño mínimo de la estructura analizable por la onda asociada a dicha partícula.

En el año 1997 se celebró el centenario del descubrimiento del electrón, puesto de manifiesto en los trabajos en los tubos de rayos catódicos llevados a cabo por J. J. Thomson. También se celebró el cincuentenario del descubrimiento del pión en los rayos cósmicos. Hace tan sólo cincuenta años eran conocidas unas pocas partículas: el electrón, el protón, el neutrón y el neutrino junto con el cuanto del campo electromagnético, el fotón. Lo curioso es que la materia que nos rodea puede explicarse prácticamente con estas partículas. Sin embargo, el estudio de las propiedades de la fuerza nuclear entre protones y neutrones, así como la búsqueda de nuevas partículas inestables que se producen en las reacciones de los rayos cósmicos, dieron lugar al descubrimiento de centenares de partículas inestables que sembraron la duda sobre el concepto de partícula elemental.

Otra revolución, esta vez tecnológica, marcará a partir del final de la segunda guerra mundial el progreso de la física de partículas: el desarrollo de los aceleradores. Éstos, que fueron pensados para escrutar el interior de los núcleos, permitieron fabricar en el laboratorio numerosas nuevas partículas. Con ellos, en pocas décadas, se logró un considerable avance en la comprensión de las propiedades de la materia. Entre los conceptos más originales cabe citar el del modelo de quarks constituyentes de los hadrones.[1]

En esta impresionante carrera en búsqueda de lo desconocido, cabe citar los espectaculares descubrimientos de los años 1970, debidos sobre todo a los colisionadores de partículas, último eslabón del desarrollo de los aceleradores. Se descubren nuevos quarks, confirmando las especulaciones lógicas y abstractas sobre los constituyentes fundamentales de la materia. En 1983, se detectan por primera vez los bosones intermediarios de la interacción electrodébil, partículas llamadas $W^{\pm}$ y Z^{0}, en el CERN (Ginebra). En los años 1990 se culmina otra etapa muy fructífera en la que se confirma la existencia de sólo tres familias de neutrinos en el LEP (colisionador $e^{+}e^{-}$) del CERN y en la que se descubre el sexto y último de los quarks en el Tevatrón de Fermilab (Chicago, EEUU), el quark *top*. Al mismo tiempo se confirman numerosas predicciones del modelo estándar de las partículas.

Este conjunto de descubrimientos han revolucionado nuestro conocimiento sobre las propiedades de la materia al igual que hicieron las teorías de los años 1920 y 1930.

En lo que sigue, se procederá en primer lugar a dar un breve repaso de la evolución histórica de esta disciplina, fruto del progreso del conocimiento acumulado en sólo un siglo.

[1] Se denominan así a las partículas que sienten la interacción fuerte o interacción nuclear. Se verán en el tema 8 dedicado a la espectroscopía de hadrones.

1.2 Del e^- al Z^0. Los descubrimientos de partículas

1.2.1 Las tres primeras partículas (antes del neutrón)

A finales del siglo XIX ya se hablaba, utilizando para ello un lenguaje ondulatorio, de tres tipos de rayos:

- canales (+), los conocidos iones positivos, medidos originalmente por W. Wien,
- catódicos $(-)$, es decir los electrones,
- luminosos (γ), con las mismas propiedades que los rayos X. Éstos fueron descubiertos en 1895 por W. C. Röntgen (el primer premio Nobel de Física en 1901).

El electrón es uno de los primeros corpúsculos, identificado por primera vez por J. J. Thomson,[2] en 1897, precisamente un año después del descubrimiento de la radiactividad (así llamada por la propiedad que tenía el radio de emitir ciertas radiaciones) por el físico francés H. Becquerel. A partir de entonces, nace una nueva denominación de las partículas utilizando también la denominación ondulatoria de rayos y que aún perdura hoy:

- α, posteriormente identificados como núcleos de helio,
- β, los electrones, y
- γ, los fotones.

El experimento de Thomson de medida de la carga del electrón fue realizado con un tubo de rayos catódicos. El físico francés J. Perrin demostró, utilizando un campo eléctrico, que las partículas emitidas (por efecto térmico) en el cátodo de un tubo de rayos catódicos tenían carga negativa. Thomson utilizó un tubo de vacío en el que montó un campo eléctrico de intensidad $\mathcal{E}$ y un campo magnético $\mathcal{B}$. Midió la posición del impacto de los electrones después de atravesar los campos eléctrico y magnético, en una pantalla de sulfuro de zinc (SZn).

El principio de funcionamiento del experimento de Thomson es el siguiente. Sea un haz de electrones con dirección perpendicular a un campo eléctrico y magnético, conocidos y perpendiculares entre sí, tal como puede verse en la figura 1.1. Supóngase que la deflexión de los electrones es nula. Como consecuencia, el efecto combinado de $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ permite determinar la velocidad de los electrones. En efecto, se cumple que $F_e = -F_m$, las fuerzas eléctrica y magnética son opuestas, con lo que

$$q\mathcal{E} = qv \times \mathcal{B}$$

o sea, $v = \mathcal{E}/\mathcal{B}$.

[2] Joseph John Thomson (1856-1940) recibió el Nobel de Física en 1906. Fue el tercer director del Laboratorio Cavendish, sucediendo a John William Strutt (1842-1919) y al genial James Clerk Maxwell (1831-1879).

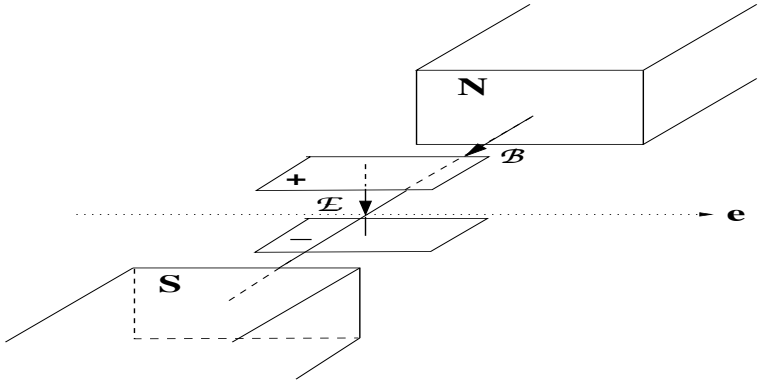


Figura 1.1: Esquema del experimento de Thomson, con los campos $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ implementados en el interior de un tubo de rayos catódicos en el que se había producido un vacío muy elevado.

Para acelerar los electrones hasta la velocidad v, se establece un potencial exterior V. La conservación de la energía toma ahora la forma:

$$\frac{1}{2}mv^2 = eV$$

quedando para el cociente

$$\frac{m}{e} = 2V\left(\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{E}}\right)^2 \tag{1.3}$$

La medida realizada por J. J. Thomson no fue muy precisa. Los valores que encontró iban de 1,1 a 1,5 $\times\ 10^{-11}$ kg/C. El valor aceptado hoy es:

$$\frac{m}{e} = 0{,}568 \times 10^{-11}\ \text{kg/C}.$$

El éxito del experimento fue debido a la calidad del vacío conseguido en el interior del tubo de rayos catódicos (unos 10^{-3} mm de Hg). Posteriormente, el propio Thomson, utilizando un dispositivo de condensación ideado por uno de sus alumnos, C. T. R. Wilson, premiado con el Nobel de Física en 1927, midió la carga del electrón, obteniendo: e = 3,4 x 10^{-10} esu.

También fue Thomson, en 1911, quién determinó la carga y masa del protón. Gracias al norteamericano R. Millikan (premio Nobel de Física en 1923 por sus medidas de la carga del electrón y del efecto fotoeléctrico) fue perfeccionado el método de medida de la carga del electrón. Hoy se sabe que la carga del electrón en valor absoluto es

$$e = 4{,}803 \times 10^{-10}\ \text{esu} = 1{,}602 \times 10^{-19}\ \text{C}$$

tomándose, por convenio, como una carga negativa; o sea, $q_e = -e$.

Las cargas eléctricas del electrón y del protón son iguales y opuestas. Sus masas son muy diferentes:

$m_e =$ 9,109 x 10^{-31} kg = 0,511 MeV/c^2
$m_p =$ 1,672 x 10^{-27} kg = 938,279 MeV/c^2

Así pues se tiene $q_e = -q_p$ y el cociente m_p/m_e = 1836,16.

En física nuclear se utiliza la unidad de masa atómica, uma = M(^{12}C)/12, que toma como referencia la masa del ^{12}C. Se obtiene para esta unidad el valor uma = 931,494 MeV/c^2, con ello, la masa del protón vale m_p = 1,00727647 uma.

Además del electrón y del protón, otra partícula era conocida a principios del siglo XX: el fotón. La evidencia experimental de la existencia del fotón se debe al físico alemán H. Hertz, quien entre 1886 y 1887 verificó la teoría unificadora del electromagnetismo de James C. Maxwell gracias a un experimento en el que, al incidir luz UV entre dos electrodos, logró la descarga eléctrica entre ellos. Pero fue a través del efecto fotoeléctrico (explicado por Einstein en 1905) y del efecto Compton (1923) cuando quedó clara la existencia del fotón como corpúsculo de masa nula.

1.2.2 Del neutrón al pión

Hasta 1932 sólo se conocían, pues, tres partículas elementales:

$$\boxed{e\,,\,p\,,\,\gamma}$$

las dos primeras bastaron para edificar la primera idea atómica, de Rutherford y Bohr, que se completaron después del experimento de Rutherford de difusión de las partículas α del radio por una lámina de oro, con el que se puso de manifiesto la existencia del núcleo atómico (véase la figura 1.2).

En 1932 James Chadwick[3] descubrió el neutrón (n), y le fue concedido por ello el premio Nobel de Física en 1935, apareciendo así la primera versión razonable del modelo nuclear. Ese año puede considerarse como el del nacimiento de la física nuclear moderna.

El mismo año 1932, C. Anderson,[4] discípulo de Millikan, descubrió el positrón, antipartícula del electrón cuya importancia es notoria ya que confirmó la predicción de la ecuación relativista de Dirac, propuesta en 1928. La figura 1.3 muestra la fotografía del paso de un positrón. Carl Anderson fue premiado por ello con el Nobel de Física en 1936. También se debe a Anderson la primera evidencia del muón (μ) pocos años después (en 1937).

[3] J. Chadwick, *Nature*, **129** (1932) 312.
[4] C. D. Anderson, *The positive electron*, *Phys. Rev.*, **43** (1933) 491.

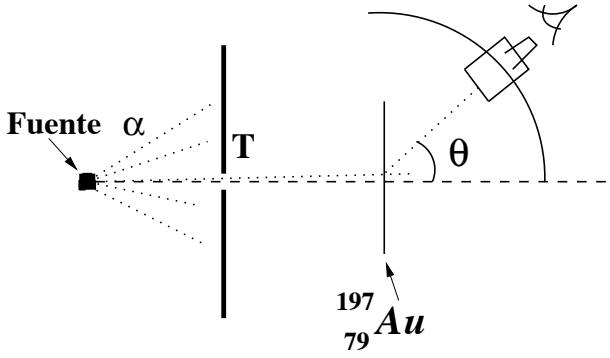


Figura 1.2: El esquema del detector (que recibía el curioso nombre de *spinthariscope* de Crookes, inventado en el año 1903) utilizado en el experimento de Rutherford por Geiger y Marsden en el que se descubrió el núcleo atómico.

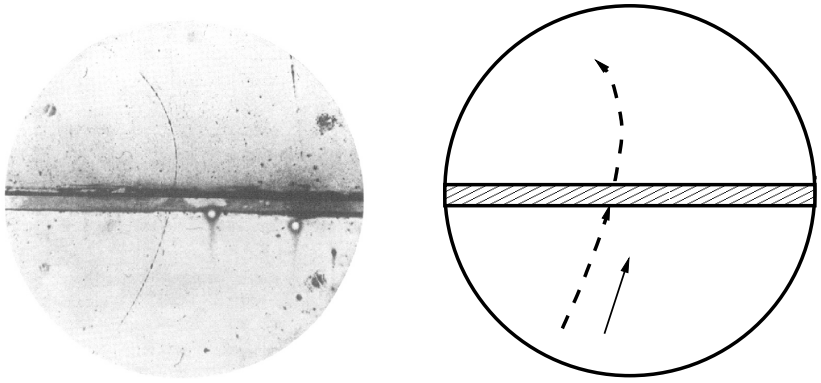


Figura 1.3: **a)** Fotografía del paso de uno de los primeros positrones a través de una cámara de niebla que fue el detector utilizado por C. Anderson para estudiar la radiación cósmica. La placa central es de plomo. El positrón, que entra por debajo, es frenado al atravesar dicha placa. La curvatura es debida a que la cámara estaba en el seno de un campo magnético. **b)** Esquema del suceso fotografiado.

En estos años 1930, estos descubrimientos cruciales, teniendo en cuenta los avances conceptuales teóricos, lograron una comprensión tan grande de los fenómenos subatómicos que el respetado premio Nobel de Física H. Bethe re-

cuerda el calificativo de *los felices años 30* que le daban a pesar de las tormentas sociales de la época.

Hay que esperar hasta el año 1947 para que se resuelva otro nuevo e importante descubrimiento: el del pión (π) de H. Yukawa. Fue efectivamente predicho por el físico japonés H. Yukawa en 1934 (por lo que recibió el premio Nobel de Física en 1949) para explicar la fuerza de cohesión nuclear a través del intercambio de una partícula de masa cercana a los 100 MeV/c^2, partícula de masa intermedia (origen de la palabra *mesón*), que supuso un enorme salto para el entendimiento de la fuerza nuclear. El pión fue descubierto gracias a las reacciones de la radiación cósmica por Powell (premio Nobel de Física en 1950), Lattes, Muirhead y Occhiallini en 1947. Se tardó un cierto tiempo en verificar que el pión se desintegra dando un muón, con lo que quedó aclarada la confusión inicial que existió entre el muón, μ (un leptón) y el pión, π (un mesón).

Un nuevo paso se dio con el experimento de Reines y Cowan en el que por primera vez identificaron reacciones del neutrino electrónico (ν_e), en 1956, 25 años después de que Pauli, en 1931, lo hubiese propuesto argumentando la conservación de la energía en la desintegración β. Este experimento se realizó en una central nuclear, fuente intensa de neutrinos.

El neutrino muónico (ν_μ) fue descubierto en 1962, en un experimento realizado en el acelerador AGS de Brookhaven, por L. Lederman, J. Steinberger y M. Schwartz, demostrando así que cada leptón lleva asociado un neutrino distinto; por ello, les fue concedido el premio Nobel de Física de 1988.

1.2.3 La era de los quarks. Nuevas generaciones de partículas

Inicialmente, los primeros hadrones se descubren gracias al estudio de la radiación cósmica pero, tras el *boom* de los aceleradores, los hallazgos se multiplican casi anualmente. En los años 1960 se descubren más de un centenar de hadrones. El gran número de partículas descubiertas, sembró la inquietud y la incredulidad de los físicos hasta que M. Gell-Mann (premio Nobel de Física en 1969) simultáneamente con Y. Neeman y G. Zweig, proponen el modelo de quarks (basado en la conocida simetría SU(3) de clasificación de las partículas conocidas hasta entonces) y postulan que los hadrones están compuestos por unos entes (en principio ficticios y matemáticos) que poco tiempo después se lograron *ver* en un ingenioso experimento de difusión de electrones contra protones realizado en SLAC desde 1967 por J. Friedman, H. Kendal y R. Taylor (premios Nobel de Física en 1990).

Si bien los quarks son los constituyentes fundamentales de la materia, nunca se han podido detectar en estado libre. Se puede decir que los quarks al estar fuertemente ligados formando hadrones no pueden vivir en estado libre lo suficiente como para dejar una traza en los detectores de partículas. Sólo pueden observarse trazas de partículas que están compuestas por quarks que, de acuerdo con la simetría SU(3), son estados singletes de color. A estos singletes de color, o dicho de otra manera, entes sin color, se les llama hadrones. Estas son las partículas (singletes de color) que pueden ser observadas en estado libre.

Hoy en día ya se tienen clasificadas y estudiadas las propiedades de más de 200 hadrones.

Un resultado trascendental tuvo lugar en 1973 con un experimento, hecho en el CERN (Ginebra) con la cámara de burbujas Gargamelle, en el que se descubrieron las corrientes neutras. Se trata de reacciones elásticas $\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_\mu + e^-$ sin cambio de carga entre los leptones, al contrario que en procesos como $\overline{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n$ llamados de corrientes cargadas.[5] También se descubren reacciones inelásticas del tipo $\nu_\mu + N \rightarrow \nu_\mu + X$, en las que el nucleón se rompe dando un sistema de partículas X. Con ello se da pie a nuevas ideas de unificación que lentamente van afianzándose con la identificación de dos nuevos quarks:

- el quark c (de $charm$; es decir, encanto), en 1974, con el descubrimiento del mesón J/ψ, con una masa de 3097 MeV/c^2, gracias a las iniciativas de los físicos B. Richter en SLAC[6] y S. Ting en Brookhaven,[7] ambos en EEUU. Se les concedió por ello el premio Nobel de Física en 1976.

- el quark b (de $beauty$; es decir, belleza), en 1977, con el descubrimiento del Υ, con una masa de 9460 MeV/c^2, por el grupo de L. Lederman en Fermilab[8] (Chicago), también en EEUU y también premio Nobel de Física en 1988.

La década de los años 1970, conocida entre los físicos de partículas como la *década prodigiosa* por la cantidad de descubrimientos que se realizaron en dicha época, también vio el descubrimiento, en 1975, del tercer leptón cargado (el leptón tau), en un experimento conducido por Martin Perl, de SLAC, por lo que recibió el premio Nobel de Física en 1995 que compartió con F. Reines por su descubrimiento del neutrino electrónico.

El estado J/ψ es un mesón compuesto por un par quark-antiquark $c\,\overline{c}$, por tanto no es un mesón con encanto, ya que el encanto se cancela. Curiosamente el quark c fue predicho en 1970, con anterioridad a su descubrimiento, por Glashow, Iliopoulos y Maiani. Análogamente el Υ es un mesón compuesto por un par quark-antiquark $b\,\overline{b}$, y que por lo tanto es un mesón que no tiene belleza. Tanto el J/ψ como el Υ forman parte de la espectroscopía de estados conocidos por el nombre de *quarkonio* (respectivamente *charmonio* y *bottomonio*), de mucha importancia para el modelo de quarks.

En 1979, los experimentos instalados en el anillo de colisiones PETRA del laboratorio DESY (Hamburgo) presentaron la primera evidencia directa de la existencia del gluón. Mostraron claramente que, además de sucesos con dos *jets*, también existían sucesos con tres *jets* en colisiones e^+e^-: el tercer *jet* era un gluón resultado del *bremsstrahlung* de uno de los dos quarks. Más adelante,

[5] Este es precisamente el proceso que Reines y Cowan estudiaron y permitió el descubrimiento por primera vez de interacciones de neutrinos.

[6] Augustin, J. E., *et al., Phys. Rev. Lett.,* **33** (1974) 1406.

[7] Aubert, J. J., *et al., Phys. Rev. Lett.,* **33** (1974) 1404.

[8] Herb, S. W., *et al., Phys. Rev. Lett.,* **39** (1977) 252.

en la figura 11.14, se muestra una reacción con dos *jets* de partículas donde se visualiza el concepto de *jet*.

Merece recordarse el gran aumento de la energía obtenido gracias al impulso de los colisionadores, cuyo zenit se alcanza con los experimentos UA1 y UA2 del CERN gracias a los que en 1983 se observan por primera vez los bosones intermediarios Z^0 y $W^{\pm}$ en el colisionador protón-antiprotón, llamado $Sp\overline{p}S$, confirmando las ideas unificadoras de la teoría de Glashow, Weinberg y Salam cuyo éxito es aún más notorio después de los resultados de los cuatro experimentos del colisionador e^+e^- LEP del CERN, que inició su funcionamiento en verano de 1989 y finalizó su operación a finales del año 2000, periodo en el que aportó innumerables datos científicos que consolidaron las predicciones del modelo estándar.

1.2.4 Descubrimientos más recientes

Recientemente[9] se ha descubierto el quark t (de *top*; es decir, *cima* o también *truth*, o sea *verdad*), en las colisiones $p\overline{p}$ a 1,8 TeV en el centro de masas, gracias al Tevatrón de Fermilab (Chicago, EEUU), el colisionador que actualmente proporciona las colisiones de mayor energía. La masa encontrada para el quark *top* es $m_t = 174{,}3 \pm 5{,}1$ GeV.

El último de los constituyentes elementales de la materia, el neutrino del tau, ha sido el último en ser detectado en el experimento DONUT en el Tevatrón de Fermilab, donde finalmente en el año 2000 se logró aislar (en emulsiones fotográficas) 4 sucesos en los que el neutrino tau producía sendos leptones tau. Con éste, se puede concluir que los seis leptones han sido experimentalmente detectados y medidos.

1.2.5 La búsqueda del bosón de Higgs

En el esquema del modelo estándar de las partículas y sus interacciones, la única partícula (o partículas) fundamental que queda por descubrir es el bosón de Higgs, cuya masa es desconocida aunque probablemente muy elevada ($m_H > 100$ GeV/c^2). Es la partícula que se predice para cumplir con la unificación electrodébil y dar masa a los constituyentes y a los bosones intermediarios $W^{\pm}$ y Z, a través del llamado mecanismo de Higgs.

Para la búsqueda del bosón de Higgs (infructuosa en el colisionador LEP), el CERN está construyendo el mayor colisionador protón-protón del mundo, el LHC (*Large Hadron Collider*), utilizando el mismo túnel que albergó el LEP, y cuyo inicio se planifica para el año 2007.

[9] F. Abe *et al.*, *Phys. Rev.*, **D50** (1994) 2966. En esta publicación se describe el experimento que llevó a cabo la Colaboración CDF en el que se presenta la primera evidencia experimental del quark *top* en el año 1994.

1.3 Clasificación de partículas

De esta extraordinaria cadena de descubrimientos se ha llegado hoy a identificar los constituyentes más elementales de la materia: los quarks y los leptones. De momento se ha establecido que existen sólo tres familias (pares) de ambos. Estos doce constituyentes son todos fermiones. También existen las correspondientes antipartículas de cada fermión de forma que existe una simetría total en el número de antifermiones constituyentes.

Las cuatro interacciones puestas de manifiesto (gravitatoria, débil, electromagnética y fuerte) tienen también en común que la fuerza se explica mediante el intercambio de partículas elementales, que se suelen llamar partículas fuerza, y que en este caso son bosones, es decir, partículas con espín entero. El conjunto de partículas descritas puede verse en las tablas 1.1 y 1.2.

Podría darse una definición de partícula, como

> ente físico con masa, espín y propiedades electromagnéticas bien definidas de forma que en un campo electromagnético describe una trayectoria perfectamente calculable y conocida.

En efecto, es bien conocida la relación entre el momento, p (en GeV/c) y el radio de curvatura R (en metros) de la trayectoria que describe una partícula de carga eléctrica Ze (siendo Z un número entero positivo, negativo o nulo) en un campo magnético de intensidad $\mathcal{B}$ (en tesla):

$$p = 0{,}3\, Z\mathcal{B} \cdot R \tag{1.4}$$

Pero cabe también añadir a la anterior definición el adjetivo de partícula elemental o fundamental. En este caso se entiende que se trata de entes puntuales que no pueden explicarse como entes compuestos por otros más elementales o por estados excitados de éstos.

1.3.1 Partículas y antipartículas

Cada partícula, sea elemental o no, tiene su antipartícula. La antipartícula tiene las mismas propiedades físicas que la partícula (masa, espín, vida media) pero tiene todas las cargas opuestas. Por ello, si una partícula entra en contacto con su antipartícula se aniquilan. Esta aniquilación es un proceso electrodébil. Puede tener lugar por intercambio de fotón o de bosón Z.

El concepto de antipartícula es consecuencia de la mecánica cuántica y de la relatividad. Para visualizarlo basta con recordar las ecuaciones de una partícula libre. Tanto en el caso no relativista como en el caso relativista, si se aplica el principio de sustitución se encuentran las ecuaciones de Schrödinger y de

Klein-Gordon, respectivamente:

$$E = p^2/2m \qquad \rightarrow \; i\hbar\frac{\partial\Psi(\vec{x},t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\vec{x},t)$$

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \quad \rightarrow \; -\hbar^2\frac{\partial^2\Psi(\vec{x},t)}{\partial t^2} = -\hbar^2c^2\nabla^2\Psi(\vec{x},t) + m^2c^4\Psi(\vec{x},t)$$

Ambas ecuaciones de ondas tienen como solución

$$\Psi(\vec{x},t) = Ne^{i(px - E_p t)/\hbar} \tag{1.5}$$

Lo llamativo es que si Ψ es solución de la ecuación de Klein-Gordon con $E_p > 0$, la función Ψ^* también lo es con $E_p < 0$.

Dirac replanteó la ecuación relativista $i\hbar\frac{\partial\Psi(\vec{x},t)}{\partial t} = H\Psi(\vec{x},t)$ tomando como hamiltoniano $H = \alpha pc + \beta mc^2$, lineal en p y m en vez de cuadrático, y encontró que los coeficientes α y β debían ser matrices 4×4, en vez de escalares. Esto se verifica al exigir que las funciones de onda cumplan también las ecuaciones de Klein-Gordon, con lo que encontró que Ψ es un vector columna de 4 componentes:

$$\Psi(\vec{x},t) = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

que se conoce por el nombre de *espinor de Dirac*. De las cuatro componentes hay dos soluciones con $E_p > 0$ y otras dos con $E_p < 0$, que se interpretan como partículas y antipartículas. Hay dos soluciones con $E_p > 0$ porque el electrón tiene espín 1/2. El espín aparece cuando se coloca al electrón en un campo magnético, responsable del término de interacción, que está definido por el momento dipolar magnético de Dirac:

$$\vec{\mu}_{\mathrm{D}} = \frac{g^{(s)}}{\hbar}\frac{q}{2m}\vec{s} \tag{1.7}$$

Este es el momento magnético que se predice para una partícula puntual (sin estructura) de carga q y masa m. En el caso del electrón $s = \frac{1}{2}\hbar$ y, según la predicción de Dirac, el factor giromagnético de espín del electrón vale $g_e^{(s)} = 2$ ya que el resultado de la medida de μ_e es el magnetón de Bohr: $\mu_e = -\mu_{\mathrm{B}} = -\frac{e\hbar}{2m_e}$. Curiosamente, el espín, una de las magnitudes físicas más importantes de las partículas, fue postulado antes que la ecuación de Dirac por Uhlenbeck y Goudsmit para poder explicar el efecto Zeeman en física atómica. En conclusión, el electrón obedece a la ecuación de Dirac, que suele escribirse

$$\boxed{(\gamma_\mu p^\mu - m)\psi(x) = 0} \tag{1.8}$$

siendo $\psi(x)$ el llamado espinor de Dirac, de cuatro componentes, p^μ, el cuadrivector energía-momento $(E, \vec{p})$ y γ_μ, las matrices (4×4) de Dirac (véase por ejemplo el apéndice D). El espinor de Dirac describe dos estados; uno de energía positiva y el otro de energía negativa: $p^0 = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ asociados, respectivamente, a estados de partícula y antipartícula y además cada uno de ellos con dos estados de polarización (los que corresponden a partículas de espín 1/2). Con esto, las partículas y antipartículas tienen las mismas propiedades físicas espacio-temporales (masa M, espín J, vida media) pero sus magnitudes electromagnéticas (carga, momento magnético) y sus números cuánticos internos (I_3, extrañeza, encanto, belleza, verdad), cambian de signo. La teoría relativista de Dirac explica, por lo tanto, la existencia de antipartículas y contiene el espín como grado de libertad necesario para explicar las propiedades de los electrones. Por contra, las medidas del momento magnético del protón y del neutrón, dan

$$\mu_p = +2{,}79\mu_{\mathrm{N}} \qquad \text{y} \qquad \mu_n = -1{,}91\mu_{\mathrm{N}} \tag{1.9}$$

en donde, en primer lugar, sorprende que el neutrón, que tiene carga nula, tenga un momento magnético distinto de cero. Estos valores pusieron de manifiesto que ni el protón ni el neutrón son puntuales como el electrón. En efecto, en la expresión anterior se puede comprobar que los factores giromagnéticos de espín del protón y del neutrón son, respectivamente, $g_p^{(s)} = 5{,}58$ y $g_n^{(s)} = -3{,}82$, muy diferentes del valor para el electrón puntual de Dirac ($g_e^{(s)} = 2$). Ahora, la unidad de medida es el magnetón nuclear ($\mu_{\mathrm{N}} = \frac{e\hbar}{2m_p}$), para el que se toma, por convenio, la masa del protón.

Hoy se sabe que efectivamente el protón y el neutrón están compuestos por quarks y, como se verá más adelante, el modelo de quarks explica el valor de sus momentos magnéticos.

1.3.2 Fermiones y bosones

La materia observable que nos rodea está formada por conglomerados de moléculas obtenidas por unión de múltiples átomos con una nube electrónica (compuesta por los leptones cargados de menor masa y mejor conocidos: los electrones) y un núcleo. Los núcleos atómicos, como bien se sabe, están compuestos por protones y neutrones (llamados nucleones). Estos últimos, a su vez, están compuestos por quarks.

La materia está, pues, compuesta por fermiones, partículas de espín semientero, y se clasifican en quarks y leptones. Estos constituyentes son partículas sin estructura, puntuales, al menos hasta los menores tamaños que ha sido posible explorar hasta hoy con los aceleradores disponibles (10^{-3} fm). La interacción de los fermiones entre sí se describe mediante el intercambio de bosones, partículas de espín entero.

Principio de conexión espín-estadística

A los constituyentes fundamentales −fermiones y bosones− se les aplica el principio de conexión espín-estadística, propuesto por E. Fermi en 1940, al igual que a otros sistemas cuánticos. Este principio permite conocer la simetría de la función de ondas $\psi(q_1, q_2, .., q_N)$ de un sistema de N partículas idénticas.

Cuánticamente, las partículas idénticas (cuyas funciones de onda se superponen) son indistinguibles. Clásicamente el concepto de trayectoria las distingue. Por definición, el hamiltoniano, H, es simétrico en las variables q_i ya que las i partículas son idénticas. El *operador intercambio* de dos partículas $P_{ij} : q_i \longleftrightarrow q_j$, conmuta con H y clasifica las funciones de onda en simétricas (ψ_S) o antisimétricas (ψ_A), correspondiendo a los valores propios ± 1 de P_{ij}, teniendo el mismo valor propio E del hamiltoniano.

Para un sistema de N partículas se puede definir el operador P, *operador permutación* de N partículas (N! posibilidades), que conmuta con H y es una constante del movimiento. Los N! estados propios del operador P son propios de H y todos tienen la misma energía. En principio, todos los estados tienen la misma probabilidad de existir. En efecto, sea cual sea el tipo de partículas idénticas, el cuadrado de la función de ondas, $|\psi(q_1, q_2, ..., q_N)|^2$, que da la probabilidad de que las partículas ocupen el estado definido por las coordenadas q_i, no cambiará bajo cualquier intercambio $i \longrightarrow j$.

Sin embargo, existen dos tipos de funciones de onda que se distinguen por el valor propio $\pm$ del operador permutación P. Se tienen las siguientes posibilidades según sea el estado totalmente:

simétrico $\quad \psi_S(q_1, ..., q_N) \longrightarrow P\psi_S = +\psi_S$

antisimétrico $\quad \psi_A(q_1, .., q_N) \longrightarrow P\psi_A = \begin{cases} +\psi_A \text{ (perm. par)} \\ -\psi_A \text{ (perm. impar)} \end{cases}$

es decir, el operador P tiene dos valores propios distintos ($+$ y $-$) según la paridad de la permutación de las partículas idénticas. La definición de paridad de la permutación P es que el número de intercambios P_{ij} es par ($P = +$) o impar ($P = -$).

El postulado de simetrización parte del hecho que todo sistema de N partículas idénticas se describe con un estado simétrico ψ_S o antisimétrico ψ_A. La conexión espín-estadística establece la siguiente regla:

- los bosones, partículas con espín entero (ejemplo: $\gamma, W, Z, g, \pi, \rho$, etc.) son descritos por estados simétricos ψ_S y obedecen a la estadística de Bose-Einstein.

- los fermiones, partículas con espín semi-entero (ejemplo: leptones, quarks, p, n, Λ, etc.) se describen por estados antisimétricos ψ_A y obedecen a la estadística de Fermi-Dirac.

El principio de exclusión de Pauli

Una consecuencia muy conocida del principio de simetrización es el principio de exclusión de Pauli, por el que dos electrones no pueden encontrarse en un mismo estado cuántico. Efectivamente, al tratarse de fermiones idénticos, la función de ondas es antisimétrica bajo el intercambio de alguna de sus variables y, en el caso en el que los dos fermiones ocupen el mismo estado cuántico, la función de ondas se anula. Este no es el caso de los bosones, para los que no hay limitaciones en el número de bosones que pueden ocupar el mismo estado cuántico.

La construcción de funciones de onda totalmente simétricas bajo el intercambio de cualquier par de ellas es inmediato. Para la construcción de funciones de onda antisimétricas, existe un método bien conocido en física atómica: el de los determinantes de Slater. Se aplica en el marco del modelo de partícula individual en el que la función de ondas total puede factorizarse en producto de funciones de onda de una partícula.

Un caso particular muy sencillo es el de un sistema formado por dos partículas (como por ejemplo los dos electrones del átomo de helio). Se supone que $\psi(q_1, q_2) = \Phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\chi(1,2)$, producto de la función espacial, Φ, por la función de espín, χ, que dependen de coordenadas totalmente independientes y por lo tanto se puede escribir como producto. Para formar una función antisimétrica se tendrán dos posibilidades:

$$\psi^{s=0}(q_1, q_2) = \Phi^{+}(r_1, r_2)\chi_{0,0}(1,2) \qquad \text{función singlete de espín}$$

$$\psi^{s=1}(q_1, q_2) = \Phi^{-}(r_1, r_2)\chi_{1,M_S}(1,2) \qquad \text{función triplete de espín}$$

ya que $\chi_{0,0}(1,2)$ es antisimétrica bajo intercambio de 1 y 2 mientras que las tres funciones $\chi_{1,M_S}(1,2)$ son simétricas. Existen dos posibles funciones espaciales: $\Phi^{\pm}$. Se distinguen por el valor propio del operador intercambio:

$$P_{12}\Phi^{\pm}(1,2) = \pm\Phi^{\pm}(1,2)$$

La función espacial, Φ, describe el movimiento orbital de una partícula alrededor de la otra, lo que se realiza gracias a los armónicos esféricos $Y_\ell^m(\theta, \phi)$. El intercambio $1 \leftrightarrow 2$ equivale al cambio $\theta \rightarrow \pi - \theta$ y $\phi \rightarrow \phi + \pi$, lo que introduce el factor $(-1)^\ell$ multiplicando a Φ. De esta manera, existe una relación directa entre el valor del momento angular orbital ℓ y la simetría de la función; si ℓ es par (impar), la función Φ es simétrica (antisimétrica). En concreto:

$$P_{12}\Phi(r_1, r_2) = \Phi(r_2, r_1) = (-1)^\ell \Phi(r_1, r_2)$$

En el caso del átomo de helio, en el estado fundamental los dos electrones ocupan el estado espacial[10] $1s$, que es simétrico, luego por construcción $\Phi^- = 0$; sólo existe el estado llamado $para$-helio, cuya energía es $E_{1s,1s} = -78{,}99$ eV.

[10] En notación espectroscópica $1s$ representa el estado con números cuánticos $n = 1$ y $\ell = 0$.

Fue la observación de un único nivel energético del estado fundamental del helio la que condujo inevitablemente al principio de exclusión de Pauli.

Otro buen ejemplo de aplicación del principio de simetrización es el de la desintegración del mesón $\rho^0(770)$, de espín $J = 1$, en dos piones. La desintegración $\rho^0 \rightarrow \pi^0\pi^0$ no está permitida porque al tratarse de dos bosones idénticos en el estado final se debe tener ℓ par, y como los mesones π^0 tienen espín 0 no puede obtenerse un valor impar para el espín del ρ, luego dicha desintegración no es compatible con el valor del espín del ρ.

Principio de conservación del número de fermiones

Por último, es importante tener presente el principio de conservación del número de fermiones. Este principio implica que los fermiones se crean o se destruyen a pares, entendiendo el par como de fermión-antifermión. En los sistemas de bosones, por el contrario, el número de bosones total no es constante. Pueden crearse y destruirse siempre que se respeten los otros principios de conservación, como por ejemplo la carga eléctrica y todos los demás números cuánticos que son generalizaciones de la carga (S, C, B, T), y que se definen más adelante.

1.3.3 Las familias de quarks y leptones

Apenas un mes después de haber iniciado su funcionamiento el colisionador e^+e^- LEP del CERN (Ginebra), en octubre de 1989 y gracias a la medida de la anchura de masa, Γ, del bosón intermediario Z^0, medida que se llevó a cabo simultáneamente en los cuatro experimentos instalados en el LEP: ALEPH, DELPHI, L3 y OPAL, pudo determinarse el número de especies de neutrinos y de aquí inducir el número de constituyentes básicos de la materia; en el universo sólo existen doce fermiones (partículas de espín semientero) fundamentales, agrupados en tres familias de pares de quarks:

$$(u, d), (c, s), (t, b) \tag{1.10}$$

y tres pares de leptones (los cargados: electrón, muón, tauón y sus correspondientes neutrinos que son neutros):

$$(e^-, \nu_e), (\mu^-, \nu_\mu), (\tau^-, \nu_\tau) \tag{1.11}$$

Existen por supuesto también las doce antipartículas correspondientes.

Sólo el doblete de quarks de la primera generación o familia; los quarks u (*up*) y d (*down*) y el doblete de leptones de la primera familia (el electrón, e^- y su neutrino asociado ν_e, llamado neutrino electrónico) son relevantes, es decir, aparecen en la materia que nos rodea. Las denominadas segunda y tercera generación, tuvieron seguramente relevancia instantes después del $big - bang$, el supuesto origen del universo. Hoy por hoy se cree que quarks y leptones son entes puntuales, sin estructura, al menos hasta la escala que ha sido verificada experimentalmente, de 10^{-18} m.

En la tabla 1.1 aparecen los constituyentes de la materia con todos sus números cuánticos.

Los quarks son fermiones, con espín $\frac{1}{2}$, tienen cargas fraccionarias $+\frac{2}{3}|e|$ y $-\frac{1}{3}|e|$ y se distinguen entre sí por el número cuántico interno llamado sabor y denominados u, d, c, s, t, b. Tienen número bariónico $\mathcal{B} = \frac{1}{3}$, y las otras cargas además de la eléctrica son: S, C, T, B, es decir, la extrañeza (número cuántico cuya inicial recuerda el nombre inglés del sabor del quark: *strange*), el encanto (*charm*), la verdad (*truth*) y la belleza (*beauty*), respectivamente. Sólo hay un doblete de isospín ($I = \frac{1}{2}$) formado por los quarks u, d cuya tercera componente del operador isospín es $I_3(u) = +\frac{1}{2}$ e $I_3(d) = -\frac{1}{2}$. Se trata de dos quarks que tienen masas muy parecidas. Esta es la causa de la invariancia de carga de la interacción fuerte que está asociada a la simetría de isospín. Los demás quarks son todos singletes de isospín (por ello tienen $I = 0$); una consecuencia de la gran diferencia de masas entre ellos.

TABLA 1.1: Constituyentes de la materia (fermiones) y sus números cuánticos. Existen también las doce antipartículas correspondientes, con las cargas cambiadas de signo. Cada quark, además, posee tres grados de libertad de color, propiedad que se supone ser la responsable de la fuerza fuerte, descrita por la cromodinámica cuántica (teoría llamada QCD).

LEPTONES **S=**$\frac{1}{2}, \mathcal{B} = 0$	M (MeV/c^2)	τ (seg.)	Q	L_e	L_μ	L_τ
e^-	0,511	-	-1	1	0	0
ν_e	≤ 3 eV	-	0	1	0	0
μ^-	105,66	$2{,}197\times10^{-6}$	-1	0	1	0
ν_μ	$\leq$0,19	-	0	0	1	0
τ^-	1777,0	$0{,}291\times10^{-12}$	-1	0	0	1
ν_τ	$\leq$18,2	-	0	0	0	1

QUARKS **S=**$\frac{1}{2}, \mathcal{B} = \frac{1}{3}$	M (GeV/c^2)	Q	I	I_3	C	S	T	B
u	0,39	2/3	1/2	1/2	0	0	0	0
d	0,39	$-1/3$	1/2	$-1/2$	0	0	0	0
c	1,60	2/3	0	0	1	0	0	0
s	0,51	$-1/3$	0	0	0	-1	0	0
t	174.3	2/3	0	0	0	0	1	0
b	5,4	$-1/3$	0	0	0	0	0	-1

Las masas de los quarks que se dan en la tabla 1.1 deben tomarse solamente a título indicativo. En efecto, todavía no se ha observado un quark en estado libre, por lo que la masa no ha podido ser determinada y no puede dársele el significado ortodoxo. Se trata de masas de quarks *constituyentes*, porque se calculan a partir de las masas de los hadrones.

Los quarks tienen otra propiedad llamada color. Cada quark puede tener

tres colores identificados por las iniciales r, v, a. Esta es la propiedad que se supone que da lugar a la fuerza fuerte a partir del intercambio de gluones, que también tienen color.

Los leptones son también fermiones, con espín $\frac{1}{2}$ y número bariónico[11] $\mathcal{B} = 0$. Cada familia se distingue por un número leptónico distinto: L_ℓ, con $\ell = e, \mu, \tau$ llamado número leptónico electrónico, muónico y tauónico, respectivamente. El neutrino de cada familia tiene el mismo número leptónico que el leptón cargado al que se asocia. Por convenio, $L_e(e^-) = L_e(\nu_e) = 1$ y así sucesivamente para cada familia. Como se trata de una *carga*, los números correspondientes de los antileptones, cambian de signo. Los leptones cargados más masivos son inestables (por interacción débil) y se desintegran. La vida media de los leptones masivos viene también dada en la tabla 1.1.

La conservación del número de fermiones se traducirá en conservación del número de quarks y, en consecuencia, conservación del número bariónico, en el sector de los quarks y la conservación del número leptónico en el sector leptónico. La definición del número leptónico electrónico de un conjunto de leptones debe entenderse como la suma

$$L_e = N(e^-) - N(e^+) + N(\nu_e) - N(\overline{\nu}_e) \tag{1.12}$$

extendiéndose fácilmente a los otros dos números leptónicos L_μ y L_τ.

Una característica de los constituyentes fundamentales es que cumplen que la suma de sus cargas eléctricas (incluido el color en el caso de los quarks) cumple $\sum q_i = 0$; en efecto: $(3 \times 3 \times \frac{2}{3} - 3 \times 3 \times \frac{1}{3} - 3)|e| = 0$. Es de especial importancia puesto que conduce a una teoría de campos renormalizable.

1.3.4 Hadrones

Si bien los quarks son constituyentes fundamentales de la materia, nunca se han podido detectar en estado libre. Se puede decir que los quarks, al estar fuertemente ligados formando hadrones, no pueden vivir en estado libre lo suficiente como para dejar una traza en los detectores de partículas. Sólo pueden observarse combinaciones de quarks que, de acuerdo con la simetría SU(3), son estados singletes de color. A estos singletes de color, o dicho de otra manera, entes sin color, se les llama hadrones. Estas son las partículas (singletes de color) que pueden ser observadas en estado libre.

Así pues, reciben el nombre de hadrones las partículas que sienten la interacción fuerte. Todos los hadrones se supone que están constituidos por quarks. Se verá más adelante que el modelo de quarks constituyentes de los hadrones explica muchas propiedades de los mismos.

Se han descubierto más de 200 hadrones, todos ellos con carga eléctrica entera. Además, vista su estructura en quarks, queda claro que los hadrones no

[11] No debe haber confusión con la notación entre el espín y la extrañeza, que suelen representarse por la letra S, ni tampoco entre el número bariónico y la belleza, representados generalmente por la letra B.

tienen color; los quarks se agrupan de forma que las partículas son singletes de color.

Los hadrones se clasifican en:

- bariones: su estructura en quarks es $q_1 q_2 q_3$. Son, por lo tanto, fermiones. Tienen número bariónico $\mathcal{B} = 1$. Los representantes más genuinos en este grupo son los nucleones. El número bariónico se conserva en todas las interacciones. Esto es consecuencia de la conservación del número de fermiones. Además de masa, carga eléctrica, espín, poseen otros números cuánticos como paridad, isospín, etc. que se estudiarán más adelante. La tabla C.4 del Apéndice C contiene los bariones estables (bajo la interacción fuerte).

- mesones: el modelo de quarks supone que son estados $q_1 \overline{q}_2$. Por lo tanto son bosones. Tienen número bariónico $\mathcal{B} = 0$. El nombre de mesón fue introducido por Yukawa cuando propuso la existencia del mesón π. Pueden crearse y destruirse individualmente, siempre que se cumplan todos los principios de conservación. La tabla C.3 del Apéndice C contiene los mesones[12] estables (bajo la interacción fuerte).

Los números cuánticos de los hadrones son función del número y sabor de sus quarks constituyentes. Sean $N(q_i)$ y $N(\overline{q}_i)$ el número de quarks y el de antiquarks de sabor q_i. Los números cuánticos son, sencillamente,

extrañeza: $S = -(N(s) - N(\overline{s}))$; encanto: $C = (N(c) - N(\overline{c}))$

belleza: $B = -(N(b) - N(\overline{b}))$; verdad: $T = (N(t) - N(\overline{t}))$

Se da la circunstancia que $T = 0$ para todos los hadrones conocidos hasta hoy. En efecto, la partícula que tenga un quark t entre sus constituyentes, debe necesariamente tener una masa $M > 174{,}3$ GeV/c^2, lo que requiere disponer de aceleradores con energías superiores a las actuales.

Los números cuánticos que acaban de describirse son muy importantes porque se conservan en las interacciones fuertes y electromagnéticas, como se verá más adelante.

El número bariónico puede calcularse

$$\mathcal{B} = \frac{1}{3}(N(q) - N(\overline{q}))$$

que resulta ser $\mathcal{B} = 1$ para los bariones, $\mathcal{B} = -1$ para los antibariones y $\mathcal{B} = 0$ para los mesones. La conservación del número bariónico está ligada a la conservación del número de quarks. Este es un número que es conservado por todas las

[12] Los datos de las partículas contenidas en estas tablas pueden verse en la publicación bienal que realiza el *Particle Data Group*, (la correspondiente al año 2004 es: *Review of Particle Physics* S. Eidelman *et al., Phys. Lett.*, **B592** (2004) 1.).

interacciones. Las interacciones fuertes y electromagnéticas conservan incluso el sabor de los quarks. Por ejemplo, en la reacción

$$p + p \rightarrow \ p + n + \pi^+ \tag{1.13}$$

que procede por interacción fuerte, el número de quarks de cada sabor, se conserva. Sin embargo puede darse el cambio de sabor de un quark. Esto sólo es posible por interacción débil. Un ejemplo es la desintegración β del neutrón que puede verse en la figura 1.8, en la que el quark d cambia al sabor u:

$$d \rightarrow \ u + e^- + \overline{\nu}_e \tag{1.14}$$

La carga eléctrica de los hadrones es

$$Q = \frac{2}{3}(U + C + T) - \frac{1}{3}(D - S - B) \tag{1.15}$$

siendo $U = N(u) - N(\overline{u})$ y lo mismo para D. Finalmente, es fácil comprobar que tanto a nivel de quarks como de hadrones se cumple:

$$Q = I_3 + \frac{\mathcal{B} + S + C + B + T}{2} \tag{1.16}$$

que es la relación generalizada de Gell-Mann Nishijima. Originalmente se llamó hipercarga a la suma $Y = \mathcal{B} + S$.

1.3.5 Hadrones excitados. Resonancias

En las tablas C.4 y C.3 del Apéndice C se han enumerado los mesones y bariones estables bajo interacción fuerte. Es decir, son estados ligados de quarks por interacción fuerte de menor masa. Sin embargo, todos ellos (excepto el protón) son inestables porque se desintegran debido a la acción de otras fuerzas: la interacción débil o la electromagnética.

También existen numerosos hadrones excitados (véanse las otras tablas incluidas en el Apéndice C) que suelen denominarse resonancias. La primera resonancia detectada entre partículas fue la conocida resonancia Δ^{++} al estudiar las colisiones pión-protón, en las que la sección eficaz sigue la forma de la curva de Breit-Wigner

$$\sigma = \frac{(2J+1)}{(2s_1+1)(2s_2+1)} \frac{4\pi \lambda\!\!\!^{-2} \Gamma^2/4}{\left[(E - M_{\mathrm{R}})^2 + \Gamma^2/4\right]} \tag{1.17}$$

donde $\lambda\!\!\!^{-} = \hbar/p$ es la longitud de onda de De Broglie de las partículas que colisionan, y p el momento del proyectil en el centro de masas de la colisión, siendo s_1 y s_2 el espín de las partículas del estado inicial, J, Γ y M_{R} el espín, la anchura y la masa de la resonancia. La sección eficaz tiene un máximo para una energía total M_{R} y disminuye a la mitad para los valores $E - M_{\mathrm{R}} = \pm\Gamma/2$; por ello Γ se llama FWHM (anchura total a media altura). Una resonancia tiene

los números cuánticos bien definidos. Ejemplo, la $\Delta(1232)$; (se acostumbra a dar su masa entre paréntesis), tiene espín $J = 3/2$, isospín $I = 3/2$ y anchura $\Gamma = 120$ MeV. La vida media es $\tau = \hbar/\Gamma = 5,4 \times 10^{-24}$ seg, tan pequeña porque su desintegración es debida a la interacción fuerte, que es la más intensa. Otros ejemplos de resonancias pueden verse entre los bosones vectoriales; éste es el caso del mesón J/ψ (figura 8.7) que ilustra la forma de la curva Breit-Wigner. Otros bosones vectoriales pueden verse en la figura 8.6. El caso más reciente es el de la producción de la resonancia Z^0 en el LEP (figura 10.30), es decir el bosón intermediario responsable de las interacciones electrodébiles.

En física nuclear, se conocen también multitud de resonancias; por ejemplo en procesos de captura neutrónica (como el caso $n + {}^{238}U$), donde se producen muchas resonancias para neutrones térmicos. También han sido muy estudiadas las llamadas resonancias nucleares gigantes, que se forman en reacciones de fotoabsorción nuclear. Todos los ejemplos vistos corresponden a fenómenos de formación de resonancias en reacciones nucleares. A veces, los números cuánticos de las resonancias no permiten su formación en reacciones. Se pueden también observar resonancias en mecanismos de producción. Esto quiere decir que la resonancia se produce junto a otras partículas; por ejemplo en la reacción

$$\pi^- + p \longrightarrow \pi^- + \pi^+ + \pi^- + p$$

puede producirse la resonancia $\Delta^0(1232)$, que se desintegra en el canal neutro $\pi^- + p$, acompañada de la producción del mesón $\rho^0(770)$ que se desintegra en dos piones $\pi^+\pi^-$.

1.4 Las cuatro interacciones fundamentales

Actualmente se sabe que existen cuatro fuerzas fundamentales a través de las cuales interaccionan estos constituyentes o fermiones primarios: la gravitatoria, la electromagnética, la débil y la fuerte. El concepto de fuerza ha evolucionado de la física clásica a la cuántica. Clásicamente una interacción (a distancia) entre dos partículas es debida a la acción del potencial, o campo, creado por una sobre la otra. Cuánticamente, la interacción entre dos partículas se manifiesta a través del intercambio (emisión y absorción) de bosones (partículas de espín entero), también llamados cuantos del campo. La teoría de Yukawa es la precursora de esta idea. H. Yukawa (en 1934), consiguió la primera explicación válida del corto alcance (~ 1 fm) de la fuerza de cohesión nuclear; la fuerza entre nucleones. Para ello, utilizó la idea basada en la teoría de la electrodinámica cuántica que describe la interacción entre cargas a través del intercambio de fotones, y que tanto éxito estaba teniendo, para suponer que la interacción entre dos nucleones es debida al intercambio de un cuanto (un bosón) del campo nuclear que fue llamado mesón y tras su descubrimiento se identificó con el pión. El diagrama que describe esta idea puede verse en la figura 1.4, llamado habitualmente diagrama de Feynman. Así, Yukawa introdujo la idea de que la interacción nuclear es mediada por el intercambio de *mesones*. Sólo se intercambian bosones,

ya que para intercambiar fermiones habría que intercambiar también el correspondiente antifermión para cumplir los principios de conservación.

Estas ideas dieron lugar al modelo llamado OPEP (*one pion exchange potential*).

Una de las grandes aportaciones de la teoría de Yukawa es que la masa del mesón intercambiado está relacionada con el alcance de la fuerza. En efecto, en los modelos de intercambio el principio de incertidumbre permite el intercambio de una partícula de masa m, o sea equivalente a una incertidumbre energética $\Delta E = mc^2$, siempre que el tiempo que dura el proceso cumpla

$$\Delta t \Delta E \sim \hbar \longrightarrow R = \frac{\hbar}{mc} \tag{1.18}$$

ya que $R = c\Delta t$, puesto que se supone que se propaga como máximo a la velocidad de la luz en el vacío. Se dice que la partícula intercambiada es virtual, ya que su energía y su momento no cumplen la relación de Einstein $E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2$ (lo que equivale a decir que la partícula intercambiada no está en su capa másica), y no es detectable ya que no es una partícula libre; no se trata de una partícula real. Los demás números cuánticos, tales como la carga, deben conservarse. A todos los efectos, se supone que la partícula intercambiada es puntual; no tiene estructura.

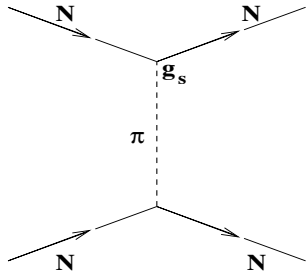


Figura 1.4: Diagrama de intercambio de π de Yukawa.

Para calcular el potencial de intercambio de un bosón hay que recurrir a la teoría cuántica de campos relativista. Pero haciendo una sencilla analogía con la electrodinámica, puede encontrarse una expresión para dicho potencial. El potencial electrostático creado por una carga q en el origen cumple la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 V_c(\vec{r}) = -\left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right] 4\pi q \delta(\vec{r}) \tag{1.19}$$

que tiene por solución el conocido potencial de Coulomb,

$$V_c(r) = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right] \frac{q}{r} \tag{1.20}$$

La energía potencial de la carga q' en el campo creado por q será $U_c = q' V_c(r)$. Al cuantificar el campo electromagnético, la ecuación (1.19) se reinterpreta

como la de la amplitud de probabilidad (función de ondas) de un fotón libre con masa nula. Aparecen los cuantos del campo, los fotones, cuya fuente es la carga eléctrica. La fuerza electromagnética tiene alcance infinito y los fotones, cuantos del campo, tienen masa nula. La intensidad de la interacción electromagnética viene dada por la constante de acoplamiento $\left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right]$, o la más comúnmente utilizada constante de estructura fina que es la constante adimensional $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c) = 1/137$. Supóngase ahora el caso de un cuanto del campo nuclear, que en principio tiene masa m y que es el responsable de la fuerza de atracción entre nucleones. El cuanto debe ser un bosón, emitido y absorbido por una fuente caracterizada por una constante de acoplamiento g_s. Análogamente al caso electrostático la mejor ecuación relativista para el potencial creado por una fuente en el origen es la ecuación relativista de Klein-Gordon:

$$\nabla^2\phi(\vec{r}) = \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\phi(\vec{r}) - g_s\delta(\vec{r}) \tag{1.21}$$

válida para partículas de masa m y espín $s = 0$. Tiene por solución el potencial de Yukawa,

$$\boxed{\phi(r) = \frac{g_s}{4\pi}\frac{e^{-\frac{mc}{\hbar}r}}{r}} \tag{1.22}$$

que suele escribirse también $\phi(r) = \frac{g_s}{4\pi}\frac{e^{-r/R}}{r}$ siendo $R = \hbar/mc$, parámetro que se interpreta como el *alcance* de una fuerza mediada por un bosón de masa m, ya que la intensidad del campo se reduce en $1/e$ a una distancia $R = \frac{\hbar}{mc}$. Esta expresión para el alcance coincide con la obtenida más arriba en (1.18), utilizando el sencillo argumento del principio de incertidumbre de Heisenberg.

El pión, $m_{(\pi^\pm)} = 139{,}57$ MeV/c^2, descubierto en 1947 por Lattes, Occhialini, Muirhead y Powell, da para el alcance $R \sim 1{,}4$ fm, representando bien la parte de mayor alcance de la fuerza nuclear. Los piones cargados, junto con el pión neutro ($m_{(\pi^0)} = 134{,}97$ MeV/c^2), con vidas medias $\tau_\pm = 26$ ns y $\tau_0 = 8{,}4 \times 10^{-17}$ s, forman un triplete de isospín (lo que asegura la independencia de carga de la interacción nuclear) y son mesones pseudoescalares ($J^{\mathcal{P}} = 0^-$).

Para estimar el valor numérico de g_s, pueden utilizarse los parámetros del deuterón $R \sim 2$ fm y $V_0 \sim 30$ MeV, con lo que

$$\frac{g_s^2}{4\pi} \sim 100 \text{ MeV} \cdot \text{fm} \qquad \text{o sea, adimensionalmente:} \qquad \alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi\hbar c} \sim 1$$

que puede compararse al valor de la constante de acoplamiento, adimensional, que mide la intensidad de la interacción electromagnética, la llamada constante de estructura fina $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c) = 1/137$. Así se comprende el origen de la denominación de fuerza fuerte.

Los bosones intermediarios de las fuerzas descritas más arriba son: el gravitón, el fotón, los bosones Z^0 y $W^\pm$ descubiertos en el CERN en 1983, y los

gluones. Estas partículas y sus números cuánticos aparecen en la tabla 1.2; sólo los bosones intermediarios de la interacción débil son masivos; todos los demás tienen masa nula. El gravitón todavía no se ha descubierto experimentalmente. También se describen en la tabla 1.2 las fuentes del campo. Cada interacción tiene una intensidad diferente, depende de la propiedad física que genera la fuerza y se caracteriza por una constante que se llama la constante de acoplamiento de la interacción. Debe ser medida experimentalmente.

TABLA 1.2: Partículas fuerza (bosones).

BOSÓN ($\mathcal{B}=0, L_\ell=0$)	fuente del campo	M (GeV/c^2)	**S**	Q
fotón, γ	carga eléctrica	0	1	0
$W^\pm, Z^0$	carga débil	80,425; 91,1876	1	$\pm$1,0
gluón, g_i(i=1,8)	color	0	1	0
gravitón, ϵ	masa	0	2	0

Los leptones son sensibles a la interacción débil y si están cargados, sienten la interacción electromagnética. Los quarks tienen las mismas interacciones que los leptones y además tienen interacción fuerte.

Todos estos logros son el resultado combinado de profundos desarrollos teóricos y de un brillante trabajo de experimentación en gigantescos aceleradores de partículas, y a un nivel de complejidad prácticamente pionero en el dominio de las ciencias puras.

El estudio de las partículas elementales se sigue realizando según los principios del experimento de Rutherford, aunque en la actualidad se utilizan los aceleradores como fuentes de partículas. El choque de partículas pone de manifiesto los efectos de las fuerzas entre constituyentes, por eso las magnitudes más importantes con las que se catalogan los experimentos son las secciones eficaces. Muchas partículas tienen una vida efímera, se desintegran y por ello la otra magnitud importante es la vida media. Estas dos magnitudes están relacionadas entre sí, ya que las dos dependen de la intensidad de la interacción responsable.

Los diagramas de Feynman

Los cálculos de secciones eficaces (probabilidades de reacción) y de vidas medias (probabilidades de desintegración) se realizan gracias a las técnicas de cálculo de la teoría cuántica de campos contenidas en las reglas de Feynman. Para ello, primero hay que fijar los diagramas de Feynman del proceso que se desea estudiar. Un diagrama de Feynman (véase figura 1.6 y siguientes) contiene líneas *externas* (que representan partículas reales), líneas *internas* es decir, partículas virtuales y vértices, que representan el acoplamiento de las partículas al campo de fuerzas. No representa trayectorias de partículas ni implica distancias entre las mismas. Se trata simplemente de un método gráfico de representar

una interacción entre las mismas, pudiendo tratarse de una reacción o una desintegración. En los diagramas de Feynman las partículas se representan con líneas que se dirigen en el sentido del tiempo. Las antipartículas en el sentido opuesto a t. Sin embargo en estas notas, todas las partículas o antipartículas se dibujarán en el sentido del tiempo. Los diagramas de Feynman permiten calcular la amplitud de probabilidad de un proceso como resultado del producto de las siguientes cantidades:

- la constante de acoplamiento de cada vértice, que da la amplitud de probabilidad de emisión y de absorción del cuanto del campo, y
- del propagador del bosón virtual intermediario (líneas internas).

En cada vértice se conserva p y Q; es decir, el momento y la carga eléctrica. Las líneas internas no son observables. Se trata de partículas intercambiadas; se dice también que son los propagadores de la fuerza; de hecho transfieren el momento y la energía de la interacción. Son partículas virtuales, de existencia efímera, y no tienen la masa de la partícula (o sea, no están en su capa másica); es decir, no cumplen la ecuación de Einstein $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$. Pero en el proceso global, entre partículas incidentes y salientes, la energía se conserva siempre.

En los procesos de colisión se introduce el concepto de *amplitud de difusión*, $f(q^2)$, que como su nombre indica es la amplitud de probabilidad de interacción y es función del momento transferido en la interacción. Es equivalente al propagador de los diagramas de Feynman. La sección eficaz de difusión es el producto de $|f|^2$ por el factor de espacio fásico, dividido por el flujo incidente. Este es el resultado que se obtiene en primer orden de teoría de perturbaciones y que coincide con la conocida regla dorada de Fermi. La amplitud de difusión debida al intercambio de un único bosón es igual al producto de los dos factores de vértice g_0 y g_s que describen el acoplamiento del bosón a las partículas difusora y difundida y del término debido al propagador. Para deducir una expresión del término del propagador, se puede utilizar la idea de que la difusión es causada por un potencial tipo Yukawa. En óptica clásica, la distribución angular de difracción se calcula como la transformada de Fourier de la distribución espacial del blanco. Análogamente, el potencial $U(r)$ tiene una amplitud asociada de difusión que es su transformada de Fourier

$$f(\vec{q}) = g_0 \int U(r) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} dV$$

siendo g_0 ahora, la constante de acoplamiento de la partícula al potencial. Como el potencial es central se llega a

$$f(q^2) = \frac{g_s g_0}{(q^2 + m^2)} \tag{1.23}$$

donde q se ha generalizado y es el cuadrimomento transferido en la interacción. El propagador f representa la ley de fuerza debida al potencial U.

En el mundo subatómico la interacción gravitatoria es despreciable. En efecto, como la constante de Newton $G_{\rm N} = 6,67 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2, si se toma como unidad la masa del protón, la constante adimensional vale

$$\frac{G_{\rm N} m^2}{4\pi\hbar c} = 4{,}6 \times 10^{-40}$$

lo que es insignificante comparado con los acoplamientos de las otras fuerzas existentes. El hecho de no tomarla en consideración no altera ninguna de las conclusiones, por ello se abandona su discusión en lo que sigue.

Se describen a continuación las otras tres fuerzas o interacciones.

1.4.1 Interacción electromagnética (QED)

La interacción electromagnética es debida a la carga eléctrica de los constituyentes. Sus propiedades las describe la teoría mejor conocida hasta hoy: la electrodinámica cuántica, abreviadamente QED. Es la más simple y la que más éxitos ha cosechado.

El fotón es el cuanto del campo que se acopla a la carga eléctrica. Esta interacción puede representarse por un diagrama de Feynman de su vértice fundamental. La intensidad de la interacción viene dada por la constante de estructura fina

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137} \tag{1.24}$$

proporcional al cuadrado de la carga eléctrica y es el parámetro que caracteriza la interacción electromagnética. La probabilidad de emisión o absorción de un fotón es proporcional a la constante de acoplamiento. En la figura 1.5 aparecen cuatro vértices elementales, en donde se ha utilizado el electrón (o el positrón) como ejemplo aunque cualquier partícula cargada posee el mismo acoplamiento. Aparecen los vértices elementales de la aniquilación, materialización, efecto Compton y *bremsstrahlung*. Todos ellos tienen un acoplamiento dado por la constante de estructura fina $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c) = 1/137$. Estos procesos elementales son puramente virtuales porque no conservan la energía. En efecto, tómese por ejemplo el diagrama de *bremsstrahlung* del positrón de la figura 1.5. La carga (Q), el momento (p) y el momento angular (J) se conservan, aunque sin embargo la energía no se conserva. En efecto, utilizando la notación (E,$\vec{k}$) para indicar el cuadrivector energía-momento se tiene

$$e^+(E_0\,,0) \rightarrow\ e^+(E_k\,,-\vec{k}) + \gamma(kc,\vec{k})$$

que explícitamente conserva la cantidad de movimiento. Si el e^+ inicial está en reposo, $E_0 = mc^2$, el e^+ final tendrá una energía

$$E_k = \sqrt{(kc)^2 + (mc^2)^2}$$

con lo que la diferencia de energía entre el estado final y el inicial será $\Delta E = E_k + kc - E_0$; es decir, se cumple $kc < \Delta E < 2kc$, en vez de ser nula. En con-

clusión, todos los procesos de la figura 1.5 sólo representan vértices fundamentales. Es una notación gráfica que describe las interacciones electromagnéticas posibles.

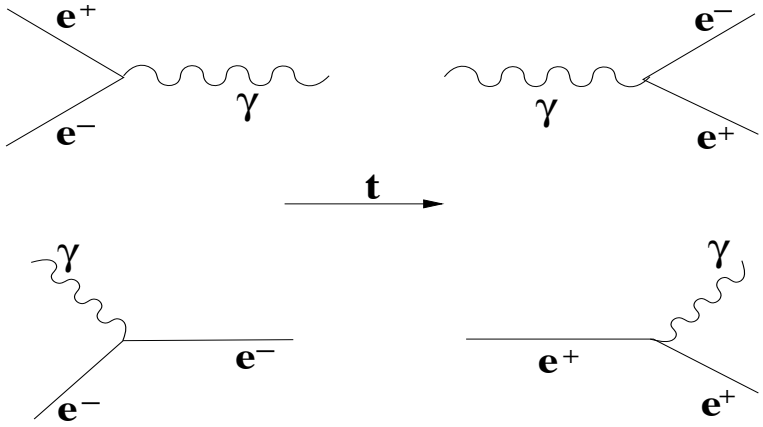


Figura 1.5: Diagramas de Feynman de los vértices que describen los acoplamientos básicos de la teoría electrodinámica cuántica.

Sin embargo un proceso en el que exista emisión y absorción del fotón virtual puede tener lugar, ya que entonces la energía y el momento pueden conservarse entre las partículas reales del estado inicial y final, con lo que por ejemplo podría darse la difusión electrón-electrón según la figura 1.6.

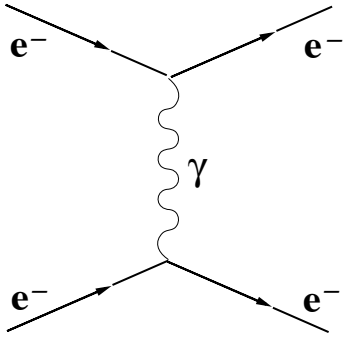


Figura 1.6: Diagrama de Feynman de primer orden de teoría de perturbaciones que explica la difusión elástica e^-e^-.

Este último es uno de los infinitos diagramas de Feynman que explican la interacción e^-e^-. Es el diagrama más sencillo: sólo se intercambia un fotón virtual, es decir representa un proceso de primer orden en teoría de perturbaciones (*leading-order*), que da la contribución dominante debido a que los otros diagramas de orden superior corresponden a procesos en los que intervienen potencias más elevadas de $\alpha = \frac{1}{137}$, la constante de acoplamiento entre cargas. Al ser pequeña, permite una buena convergencia de los cálculos. Puede entenderse también un diagrama muy parecido al anterior que representa la interacción electrón-positrón $e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^-$ y que se muestra en la figura 1.7. Este proceso se denomina difusión *Bhabha* y en este caso hay dos posibilidades de intercambio de fotón y los dos diagramas son necesarios para explicar el fenómeno. Cada diagrama representa una amplitud de probabilidad; para calcular la probabilidad hay que calcular el módulo de la suma al cuadrado. Los dos diagramas se suelen clasificar según las variables cinemáticas s, t, de Mandelstam (véase la sección 7.2.4): **(a)** Diagrama de la difusión elástica e^+e^- (en la *vía* t) **(b)** Diagrama de Feynman de aniquilación $e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^-$ (en la *vía* s). Este último mecanismo es el mismo que se podría utilizar para la reacción $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ o incluso para explicar la producción de hadrones a través del acoplamiento a un par quark-antiquark: $e^+ + e^- \rightarrow q + \overline{q}$.

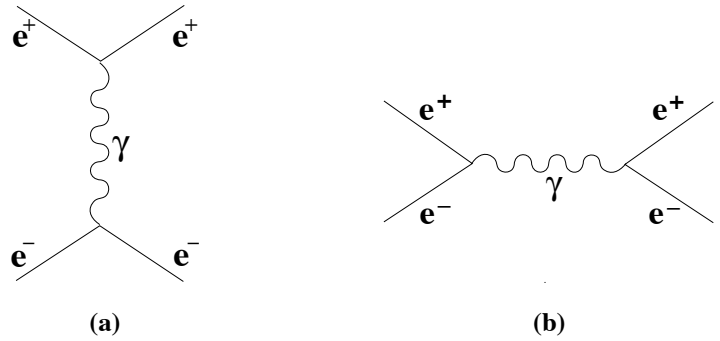


Figura 1.7: Diagramas de Feynman para la difusión *Bhabha*, es decir: $e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^-$; a) difusión elástica y b) aniquilación.

La difusión de Rutherford

Como ya se ha visto anteriormente, las reglas de Feynman permiten el cálculo correcto de las probabilidades de reacción (secciones eficaces y vidas medias). Tómese por ejemplo la difusión de Rutherford, que se describe prácticamente por un diagrama muy similar al de la figura 1.6. La amplitud de probabilidad de un proceso es el resultado del producto de tres cantidades:

- la amplitud de probabilidad de emisión de un fotón (proporcional a la carga eléctrica, e),
- la de propagación del fotón y
- la de absorción del fotón ($\propto\ e$).

es decir, si q es el momento transferido entre el electrón inicial y el final, $\frac{d\sigma}{dq^2} \propto |\sqrt{\alpha}\frac{1}{q^2}\sqrt{\alpha}|^2$, o sea, una probabilidad proporcional a α^2, el cuadrado de la constante de estructura fina.

Más concretamente, es bien sabido que la sección eficaz diferencial de Rutherford $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_R$ explica la difusión culombiana no relativista entre dos cargas puntuales. Por ejemplo podría aplicarse, en primera aproximación, a la difusión de un electrón, con carga eléctrica $-e$, por un núcleo cuya carga eléctrica es Ze; se obtiene la conocida fórmula:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathrm{R}} = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right]^2 \left(\frac{Ze^2}{4T\sin^2(\frac{\theta}{2})}\right)^2 = \frac{d_0^2}{16}\frac{1}{\sin^4(\frac{\theta}{2})} \qquad (1.25)$$

siendo d_0 la distancia de máximo acercamiento al núcleo, obtenida al igualar la energía cinética T con la potencial,

$$\frac{1}{2}m_e v_e^2 = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right]\frac{Ze^2}{d_0}$$

Si se escribe en función del momento transferido entre el electrón inicial y final, $\vec{q} = \vec{p}_i - \vec{p}_f$, al tratarse de una difusión elástica ($|\vec{p}_i| = |\vec{p}_f|$) se cumple $q^2 = 4p^2\sin^2(\frac{\theta}{2})$ con lo que se obtiene:

$$\left(\frac{d\sigma}{dq^2}\right) = \frac{4\pi Z^2\alpha^2}{q^4}$$

Pero en realidad es bien sabido que el núcleo es un objeto extenso; para tenerlo en cuenta, se introduce el factor de forma $F(\vec{q})$, que es la transformada de Fourier de la densidad de carga del blanco, con lo que la sección eficaz de Rutherford se escribe:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathrm{R}}\left[F(q^2)\right]^2$$

quedando, en función del momento transferido:

$$\left(\frac{d\sigma}{dq^2}\right) = \frac{4\pi Z^2\alpha^2}{q^4}\left[F(q^2)\right]^2$$

Igualmente se podrían explicar los procesos de producción de pares o la colisión Compton.

La teoría QED es la mejor conocida y estudiada y sus predicciones están verificadas experimentalmente hasta varias cifras decimales. Esta teoría ha servido de modelo para las otras teorías de campos. Una de las características de la teoría QED es que es una teoría invariante *gauge*. Se dice que es una teoría invariante *gauge* local porque el lagrangiano de la interacción es invariante bajo las transformaciones de fase

$$e^{i\phi(x)}$$

Esta invariancia lleva a una propiedad de enorme repercusión práctica que es que la teoría es renormalizable. En efecto, existen diagramas de Feynman, llamados de autoenergía, que dan lugar a valores infinitos. Afortunadamente estos infinitos se eliminan al redefinir la masa y la carga del electrón. La teoría QED es también una teoría *gauge* abeliana; la consecuencia es que no existe acoplamiento entre dos fotones ($\gamma\gamma$). Esto no sucede en las otras interacciones que se estudiarán a continuación.

1.4.2 Interacción débil

La primera manifestación de la interacción débil es la desintegración beta de los núcleos. Pronto se asoció la desintegración beta nuclear al proceso más elemental de la desintegración beta del neutrón: $n \rightarrow p + e^- + \overline{\nu}_e$. Ahora se sabe que en realidad es el cambio del quark d al quark u el que explica la desintegración del neutrón: $d \rightarrow u + e^- + \overline{\nu}_e$, ya que tanto el protón como el neutrón son partículas compuestas por quarks. Inicialmente las desintegraciones débiles fueron descritas por la teoría de la interacción puntual de Fermi, que después se amplió y dio origen a la teoría V-A. El tema 9 está dedicado al estudio de la desintegración de los leptones masivos y de los hadrones y se utilizará la teoría V-A. En particular se prestará atención al fenómeno de la violación de la paridad. Pero del estudio de las desintegraciones de los hadrones y de las interacciones de los neutrinos se llegó a la llamada teoría electrodébil de Glashow, Weinberg y Salam (GWS), una teoría unificadora que explica las desintegraciones de los quarks y los leptones pesados. También explica las interacciones de los neutrinos y las interacciones de los leptones cargados en las que aparecen neutrinos. Esta interacción conserva los números leptónicos L_e, L_μ y L_τ. El tema 10 está dedicado al estudio de la unificación electrodébil, uno de los bloques de los que consta el modelo estándar de las partículas elementales. La teoría GWS supone la existencia de un triplete (cargas eléctricas 0,$\pm$) y un singlete (el fotón, de carga eléctrica 0) de bosones intermediarios sin masa; pero a baja energía la simetría se rompe y tres de los bosones adquieren masa: son los bosones $W^\pm$, Z^0, descubiertos en 1983 en el CERN en un experimento realizado en el colisionador $Sp\overline{p}S$ a una energía de 270 GeV por haz, a través de sus desintegraciones

$$W^\pm \rightarrow e^\pm + \nu_e \qquad \text{y} \qquad Z^0 \rightarrow e^+ + e^-$$

Se llama teoría electrodébil porque unifica la interacción electromagnética y la débil. Una manera inmediata de constatar que las dos interacciones están *uni-*

ficadas es que la teoría predice que las constantes de acoplamiento débil (la constante de Fermi, G_{F}) y la constante de estructura fina, α, están relacionadas entre sí:

$$\boxed{G_{\mathrm{F}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{\alpha}{{M_{\mathrm{W}}}^2 \sin^2 \theta_{\mathrm{W}}}} \tag{1.26}$$

donde $\sin^2 \theta_{\mathrm{W}}$ es un parámetro de la teoría (el ángulo de Weinberg, o el ángulo de mezcla débil) cuyo mejor valor medio actual, medido en los experimentos del colisionador LEP del CERN y del SLC de SLAC, es

$$\sin^2 \theta_{\mathrm{W}} = 0,23152 \pm 0,00023 \tag{1.27}$$

Una vez conocido el valor del $\sin^2 \theta_{\mathrm{W}}$, se puede determinar G_{F} la constante débil (que ya introdujo Fermi en su teoría) y de aquí determinar la masa de los bosones intermediarios $W^{\pm}$ y Z que se dan en la tabla 1.2 y que están relacionados por

$$M_{\mathrm{W}} = M_{\mathrm{Z}} \cos \theta_{\mathrm{W}} \tag{1.28}$$

Si se utiliza una notación parecida a la de la constante de estructura fina, es decir introduciendo una constante α_{W} proporcional a la carga débil, e^2_{W}, se encontraría un valor cercano a $\alpha_{\mathrm{W}} \sim 4\alpha$ (véase la tabla 1.3).

TABLA 1.3: Características de las interacciones entre constituyentes fundamentales (quarks y leptones).

interacción	cuanto del campo	Acoplamiento a quarks	Acoplamiento a leptones	Constante de acoplamiento	alcance (m)
Electromagn.	γ	$qq\gamma$	$\ell\ell\gamma$	$\alpha = 1/137$	∞
Fuerte	g	$q_r q_b g_{r\bar{b}}$	–	$\alpha_s \approx 100\alpha$	10^{-15}
Débil	$W^{\pm}, Z^0$	$W q_u q_d$	$W \ell \nu_\ell$	$\alpha_w \approx 4\alpha$	10^{-18}

Otra de las propiedades de la teoría que describe la interacción electrodébil es que es una teoría invariante *gauge* no abeliana. Este concepto se abordará con más detalle en el tema 10. La teoría electrodébil postula que la interacción es debida al intercambio de alguno de los tres bosones de la interacción débil: $W^{\pm}$, Z^0. La fuerza es debida a la carga débil, una propiedad que poseen todos los constituyentes elementales de la materia, quarks y leptones, tengan o no tengan carga eléctrica. Como la teoría es invariante *gauge* no abeliana, se da la circunstancia que los bosones también interaccionan entre sí, existiendo acoplamiento entre los tres bosones. El bosón cargado $W^{\pm}$ es responsable de las llamadas corrientes cargadas, es decir, desintegraciones en las que un quark se transforma en otro cambiando su carga eléctrica (cambio de sabor) o un leptón se transforma en su neutrino. En este último caso el acoplamiento básico es $W\ell\nu_\ell$, siendo ℓ uno de los tres leptones y ν_ℓ su neutrino asociado. En el caso de los quarks, el bosón $W^{\pm}$ acopla quarks con distinta carga eléctrica (ud, cs, tb); se puede entonces entender la desintegración del neutrón como debida al cambio de sabor

de uno de sus quarks constituyentes, el quark d, (véase la figura 1.8 que muestra el diagrama de Feynman correspondiente). El bosón $W^{\pm}$ acopla también, pero con menor probabilidad, a quarks que pertenezcan a dos familias diferentes: $(us, ub, ...)$. Todos los acoplamientos básicos se pueden ver en los diagramas de Feynman de la figura 1.9**(a)**.

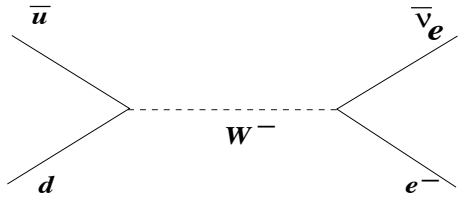


Figura 1.8: Diagrama de Feynman de primer orden de teoría de perturbaciones que explica la desintegración beta del neutrón a través del cambio de sabor del quark d.

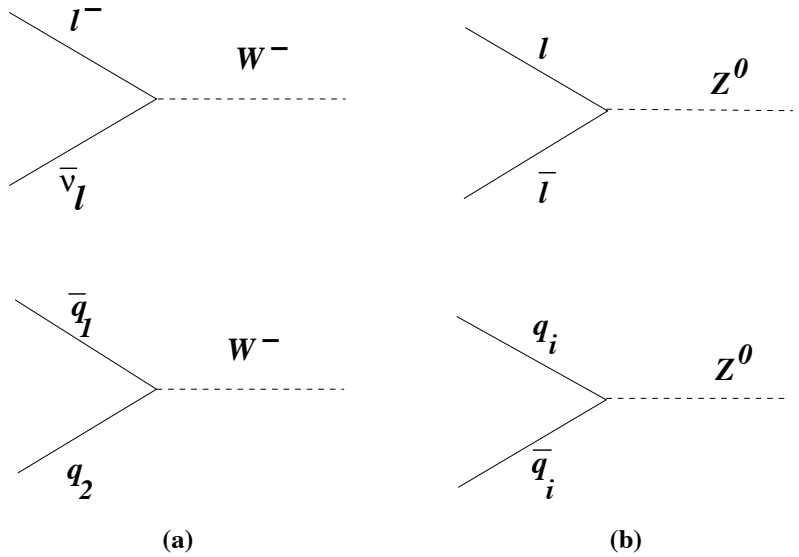


Figura 1.9: **(a)** Acoplamientos fundamentales de la interacción débil por intercambio de $W^{\pm}$ (corrientes cargadas). **(b)** Acoplamientos básicos del bosón Z^0, es decir de procesos llamados de corrientes neutras. Ambos procesos tienen una constante de acoplamiento α_W, proporcional a la carga débil de los constituyentes.

Hay, sin embargo, una observación sorprendente: las corrientes cargadas acoplan pares de quarks $u - d', c - s', t - b'$, siendo los quarks prima resultado de una mezcla entre ellos. La mezcla viene representada por la famosa matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa, generalización de la teoría de Cabibbo.

El bosón Z^0, como no tiene carga eléctrica, sólo puede acoplarse al mismo par leptón-antileptón o al par $q\,\overline{q}$ de idéntico sabor. En la figura 1.9**(b)**, pueden verse los diagramas de Feynman básicos de las denominadas corrientes neutras.

1.4.3 Interacción fuerte (teoría QCD)

Históricamente se conoce como interacción fuerte la que liga los nucleones para formar los núcleos de la materia. Los primeros intentos de explicar la interacción fuerte, fueron llevados a cabo por Yukawa, quien postuló por primera vez la idea de intercambio de mesones para explicar la interacción NN. Así, en física nuclear existen modelos que han generalizado el intercambio de un pión y han explicado muchas propiedades de la interacción NN.

Pero hoy en día, tras los éxitos de los modelos de quarks constituyentes de los hadrones, se sabe que la interacción fuerte fundamental es la que existe entre quarks. Es la fuerza que los mantiene ligados en el interior de los hadrones.

La teoría cromodinámica cuántica (QCD), postula que la fuerza es debida al color de los quarks (cada quark puede tener 3 colores, representados por sus iniciales $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{a}$) y el bosón del campo es el gluón, partícula sin masa y de espín 1, que al ser la teoría QCD una teoría *gauge* no abeliana, tienen también color, como los quarks, pero hay 8 gluones distintos. Un gluón acopla dos quarks con color, pero conserva el sabor (la interacción responsable del cambio de sabor es la interacción débil de corriente cargada). Uno de los posibles acoplamientos básicos de la teoría QCD puede verse en la figura 1.10 **a)** y la interacción fuerte fundamental entre dos quarks, q_r y q_a, aparece en el diagrama de Feynman de la figura 1.10 **b)**. La intensidad de la interacción entre quarks, viene de nuevo dada por una constante de acoplamiento $\alpha_s \sim 1$, mucho mayor que la de la interacción electromagnética (véase la tabla 1.3). Los gluones, contrariamente al caso del fotón, también tienen color. Por ello, en este caso también existen acoplamientos entre gluones. Ello es consecuencia de que la teoría QCD es una teoría *gauge* no abeliana.

Una de las ideas más chocantes de esta teoría es que todas las partículas observadas son singletes de color. Esta idea obliga a que los entes fundamentales, que tienen color, están confinados en el interior de los hadrones. Esto es lo que se denomina la esclavitud infrarroja: la fuerza fuerte aumenta con la separación entre quarks. Sin embargo, ha sido probado que a pequeña distancia los quarks se comportan como entes totalmente libres; este fenómeno se denomina libertad asintótica (este concepto puede visualizarse como la disminución progresiva de la constante de acoplamiento fuerte a pequeña distancia: $\alpha_s \to 0$, si $r \to 0$). Gracias a la libertad asintótica se han podido hacer predicciones en el marco de la teoría QCD, realizando desarrollos perturbativos. Por el contrario, dado que la constante de acoplamiento $\alpha_s \sim 1$, fenómenos a grandes distancias

(bajas energías) entre quarks no son calculables por teoría de perturbaciones ya que la serie no converge. Este concepto del confinamiento de los quarks fue desarrollado por los físicos estadounidenses David Gross, Frank Wilczek y H. David Politzer, por cuyo trabajo han compartido el premio Nobel de Física de 2004.

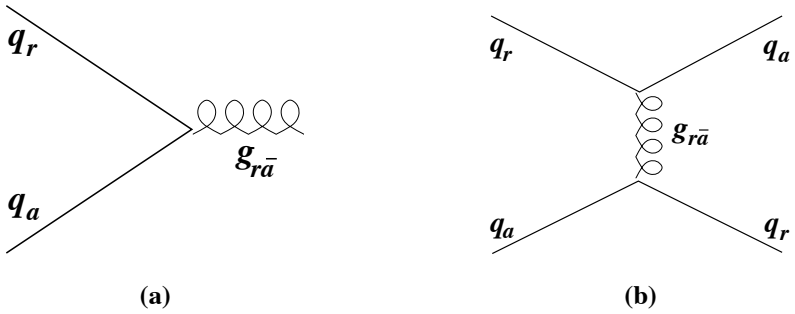


Figura 1.10: **(a)** Diagrama de Feynman de la interacción básica qqg de la teoría QCD. El color del quark cambia de r a a y por ello el gluón g tiene también color $r\overline{a}$. **(b)** Diagrama de Feynman de la interacción fundamental entre dos quarks (q_r y q_a) en la que se intercambia un gluón $g_{r\overline{a}}$.

Las teorías invariantes *gauge* predicen, como en el caso de QCD, que las constantes de acoplamiento no son tales constantes sino que son en realidad función de la escala de energía de las interacciones, o del momento transferido en la interacción q^2, es decir, función de la distancia a la que interaccionan los constituyentes en el proceso elemental.

Un resumen sobre las interacciones fundamentales, los bosones intermediarios y las constantes de acoplamiento puede verse en la tabla 1.3, donde también se pueden ver valores típicos de sus alcances.

1.4.4 Diagramas de quarks

Una forma conveniente y sencilla de visualizar los procesos de interacción entre hadrones puede realizarse a través de los diagramas de quarks. Así por ejemplo, la desintegración fuerte de la resonancia $\Delta(1232)$:

$$\Delta^{++} \longrightarrow p + \pi^{+} \tag{1.29}$$

puede verse en la figura 1.11**(a)**. En efecto, los números cuánticos de la resonancia Δ^{++} equivalen a los del estado uuu, luego el proceso entre quarks puede escribirse

$$uuu \longrightarrow uud + u\overline{d}$$

En la citada figura se observa que el intercambio de un gluón (la interacción fuerte) es el responsable de la creación de un par quark-antiquark. De la misma manera, en la reacción $\pi^+ p$ puede entenderse la formación de la resonancia Δ, como se muestra en el esquema de la figura 1.11**(b)**. Otro ejemplo es el de la producción de resonancias. Para ello, debe existir producción de muchas partículas en el estado final. En la figura 1.12, se puede ver el proceso $\pi^- p \to \pi^+ \pi^- \pi^- p$, en el que se pueden producir dos resonancias, la $\Delta^0 \to \pi^- p$ y la $\rho \to \pi^+ \pi^-$.

Los diagramas de quarks no son diagramas de Feynman porque no representan interacciones. Sin embargo, los diagramas de quarks son de gran utilidad porque plasman la conservación del número de quarks. También han servido para descubrir reglas, que prohiben por ejemplo que puedan existir procesos en los que las líneas de quarks se crucen entre sí (deben aparecer desconectadas); un ejemplo es la regla de OZI (se presentará en la sección 8.6).

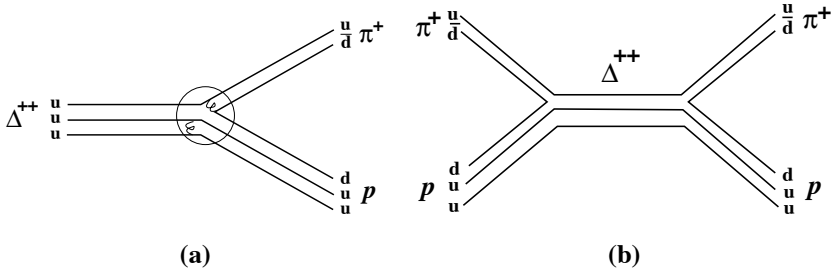


Figura 1.11: **a)** Diagrama de quarks de la desintegración de la resonancia $\Delta^{++} \longrightarrow p + \pi^+$ y **b)** Diagrama de quarks de la interacción $\pi^+ p$.

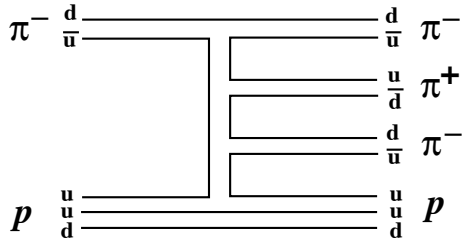


Figura 1.12: Diagrama de quarks de la interacción $\pi^- p$.

1.4.5 La gran unificación

El hecho que se ha descrito, que las constantes de acoplamiento de las tres interacciones descritas no son tales, sino que varían con la distancia (o con la escala de energía), puede interpretarse como una consecuencia de la polarización del vacío. Si se acerca una carga eléctrica a otra carga eléctrica, ésta se apantalla debido a la creación de pares e^+e^-, con lo que todo pasa como si la carga eléctrica fuera aumentando a medida que se acerca más al electrón. La constante α, aumenta a medida que la distancia se hace más pequeña; $r \to 0$. Este efecto, es el opuesto al del color; en este caso existe antiapantallamiento, y como consecuencia de ello, α_s, la constante de acoplamiento fuerte, va disminuyendo. Lo mismo sucede con la constante débil, puesto que también se trata de una teoría *gauge* no abeliana. Se ha comprobado efectivamente que las constantes de acoplamiento α de las interacciones evolucionan con Q^2, el momento transferido, según:

$$\boxed{\alpha(Q^2) = \frac{\alpha(Q_0^2)}{1 + \beta_0 \alpha(Q_0^2) \ln(Q^2/Q_0^2)}} \tag{1.30}$$

siendo Q_0 un momento transferido que se toma arbitrariamente y que por lo tanto puede hacerse todo lo grande que se quiera. La constante β_0 depende de la interacción:

$$\beta_0 = -\frac{1}{3\pi}\sum_f e_f^2 \quad \text{(QED)}$$

$$\beta_0 = \frac{33 - 2n_f}{12\pi} \quad \text{(QCD)}$$

De esta manera, la constante de acoplamiento de QCD viene dada por:

$$\boxed{\alpha_s(Q^2) = \frac{12\pi}{(33 - 2n_f)\ln(Q^2/\Lambda^2)}} \tag{1.31}$$

donde n_f es el número de sabores de quarks cuya masa cumple $m^2 < Q^2$ (hasta hoy se sabe que el número de sabores máximo es $n_f^{max} = 6$) y Λ es una constante que debe ser medida experimentalmente; en la masa del Z, como $n_f = 5$ su valor es $\Lambda \approx 100$ MeV y depende de Q^2. Marca la escala de masas que separa el mundo de los hadrones (región no perturbativa) del mundo de quarks y gluones que interaccionan como si estuvieran libres (región perturbativa). Se ha verificado experimentalmente que α_s disminuye con Q^2. Puede comprobarse en la figura 1.13, que muestra los valores de α_s hasta la máxima energía alcanzada en el colisionador LEP del CERN en el año 2000. Por ejemplo para $Q^2 = M_Z^2$, es decir para una energía equivalente a la masa del Z^0, la constante ha sido determinada y vale

$$\boxed{\alpha_s(M_Z) = 0{,}119 \pm 0{,}002} \tag{1.32}$$

y también se verifica la libertad asintótica; los quarks a pequeñas distancias se comportan como si fueran libres, lo que significa que $\alpha_s \to 0$ cuando $Q \to \infty$.

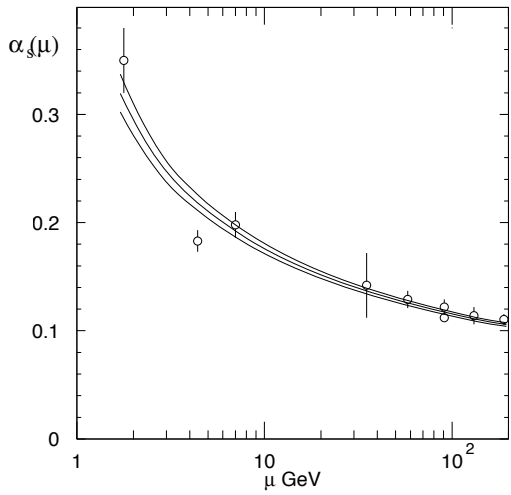


Figura 1.13: Evolución del valor de la constante de acoplamiento α_s en función de Q, el momento transferido en la interacción.

Esta variación de las constantes de acoplamiento, visible en la figura 1.14, cuando disminuye la distancia (o lo que es lo mismo, cuando aumenta la energía o el momento transferido Q), permite creer que las tres constantes de acoplo de las tres interacciones convergen en un punto. El punto de unificación que se obtendría aparece a distancias del orden de $R_o \sim 10^{-31}$ m.

En el punto de unificación, se espera que las constantes de acoplamiento de las tres teorías tengan el mismo valor. Es como si las tres teorías se fundieran en una sola. Se tendría la unificación de las tres interacciones. El bosón X, ¡con una masa cercana a los 10^{15} GeV!, sería el responsable de estos procesos en el sector unificado. Los quarks pueden desintegrarse en leptones. El protón, por ejemplo podría desintegrarse dando

$$p \to e^+ + \pi^0 \tag{1.33}$$

proceso del que se intenta determinar la vida media y que de momento sólo se ha determinado experimentalmente un límite inferior que vale $\tau_p > 10^{31}$ a 10^{33} años, dependiendo del modo de desintegración. La medida de la desintegración del protón es un desafío iniciado por los años 1970 en experimentos

subterráneos (KAMIOKANDE en Japón; IMB en EEUU) para protegerse de la contaminación de rayos cósmicos, motivada por las predicciones de las teorías de gran unificación. Los experimentos diseñados para medir la vida media del protón deben acumular mucho material (mil toneladas de agua contienen unos 10^{32} protones, con lo que vidas medias del orden de 10^{30} años darían lugar a una desintegración por día). La desintegración del protón no se ha detectado hasto hoy. Sin embargo, los experimentos diseñados para ello, han tenido un éxito inesperado detectando las interacciones de neutrinos de supernova y resolviendo el problema de los neutrinos solares y atmosféricos.

La gravitación continuará siendo una fuerza sin influencia en la física de partículas ya que la masa de Planck

$$m_{\rm P} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G_{\rm N}}} \tag{1.34}$$

que fija la escala de masas relacionada con la constante de la gravitación de Newton, $G_{\rm N}$, es aún mucho mayor ($m_{\rm P} \approx 10^{19}$ GeV) que la masa del bosón X de las teorías de gran unificación (de las fuerzas electrodébiles y fuertes).

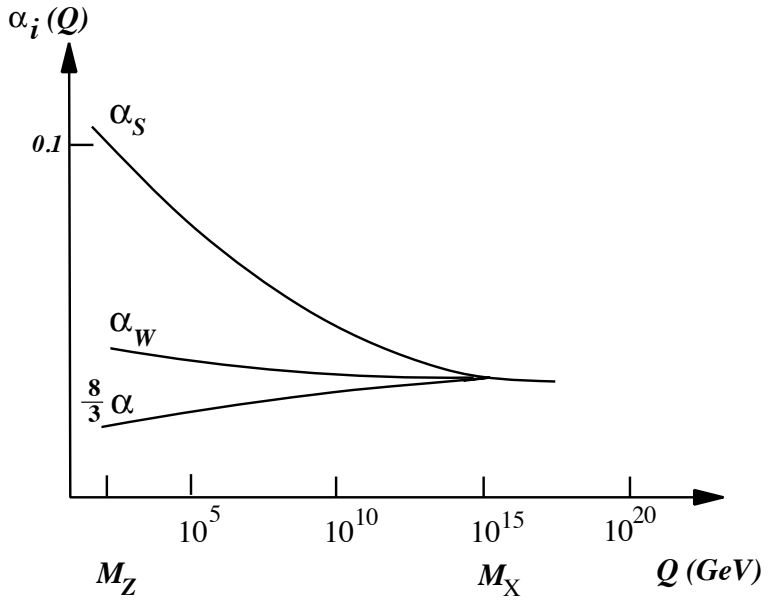


Figura 1.14: Evolución de los acoplamientos *gauge* en función de Q, el momento transferido en la interacción, según el esquema de gran unificación. Más allá de la escala de unificación, $\mu \sim 10^{15}$ GeV, las tres constantes de acoplamiento coincidirían. El factor 8/3 delante de la constante α resulta del cálculo de $\sum_f e_f^2$, para $f = u, d, e$.

1.5 Ejercicios

1.1. Constantes de acoplo de las interacciones fundamentales.
a) Utilizando las fórmulas del texto, definir cuatro constantes adimensionales, α, α_w, α_s y α_g, que caractericen las cuatro interacciones fundamentales (electromagnética, débil, fuerte y gravitacional).
b) Calcular el valor numérico de dichas constantes así como el error en dichos valores. Indicar cuando sea posible el método de medida utilizado (se podrán consultar los apéndices así como los datos aportados en el resto del libro).

1.2. El sistema de unidades naturales.
a) En el sistema de unidades naturales ($\hbar = c = 1$), la vida media del muón resulta ser

$$\tau = 192\,\pi^3/(G_{\rm F}^2 m_\mu^5)$$

y la sección eficaz de colisión $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ se expresa en la forma

$$\sigma = 4\pi\alpha^2/(3s)$$

Calcular τ y σ en s^{-1} y barn, respectivamente.
b) El sistema de unidades naturales se puede extender a la interacción gravitacional haciendo $\hbar = c = G_{\rm N} = 1$, en cuyo caso todas las magnitudes son adimensionales. Calcular en dicho sistema de unidades m_e, m_p, M_Z y $M_{\rm Planck}$.

1.3. Cálculos con argumentos dimensionales.
a) Utilizando únicamente argumentos dimensionales y los diagramas de Feynman correspondientes, estimar la vida media de las siguientes partículas: μ, π^+, n, D^+, B^+ y Z, así como la vida media del positronio (estado ligado e^+e^-). Comparar estas estimaciones con los valores experimentales.
b) Con idénticos argumentos, obtener el valor de las secciones eficaces para los procesos $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$, $e^-\gamma \to e^-\gamma$ y $\nu_e n \to e^- p$. Comparar con los valores experimentales.

1.4. La ecuación de Dirac.
a) Demostrar que si ψ verifica la ecuación de Dirac $(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0$, entonces verifica igualmente la de Klein-Gordon $(\partial^2 + m^2)\psi = 0$ y por tanto la ecuación de Dirac describe una partícula de masa m.
b) Demostrar que la ecuación de Dirac es invariante ante la transformación de Lorentz $x' = \Lambda x$, con tal de que se verifique la ley de transformación de los espinores $\psi'(x') = S\psi(x)$, donde la matriz S cumple $\Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu = S^{-1}\gamma^\mu S$. Considerar una rotación infinitesimal y demostrar que ψ describe una partícula de espín 1/2.

1.5. Límite no relativista de la ecuación de Dirac.
a) Considerar la descomposición de los espinores de Dirac $\psi = (\psi_A, \psi_B)$ siendo ψ_A y ψ_B espinores de Pauli (es decir de 2 componentes). Demostrar que en el límite no relativista y para soluciones de energía positiva $(E > 0)$, la ecuación de Dirac en un potencial coulombiano A^0 se reduce a la ecuación de autovalores

$$(\vec{P}^2/2m + eA^0)\psi_A \approx (E - m)\psi_A$$

mientras que $\psi_B \approx 0$. Concluir que ψ_A describe una partícula de masa m, espín 1/2 y carga $+e$.
b) Demostrar que para $E < 0$, se verifica

$$(\vec{P}^2/2m - eA^0)\psi_B \approx -(E + m)\psi_B$$

y por tanto ψ_B describe una partícula de masa m, espín 1/2 y carga $-e$.

1.6. Límite ultra-relativista de la ecuación de Dirac.
a) Demostrar que si $m = 0$, se pueden elegir las soluciones libres de la ecuación de Dirac de forma que sean igualmente autoestados del operador de helicidad $\lambda = \vec{S} \cdot \vec{p}/\left|\vec{p}\right|$.
b) Demostrar que estas soluciones son igualmente estados propios de γ^5 (se dice que son estados de quiralidad definida).
c) Demostrar que para $m = 0$, $\psi_L = (1 - \gamma^5)\psi$ describe una partícula *levógira* (helicidad negativa) o bien una antipartícula *dextrógira* (helicidad positiva).

Parte II

Métodos experimentales en física de partículas

2. *Aceleradores de partículas*

2.1 Generalidades sobre aceleradores de partículas

Los aceleradores son instrumentos que emplean campos eléctricos para acelerar partículas estables (protones, electrones, iones pesados) a alta energía. Se dice que producen un haz de partículas (o de iones). El desarrollo de los aceleradores ha traído consigo el progreso del conocimiento de los constituyentes elementales de la materia; en particular por el considerable aumento de la energía de las colisiones. Para un físico de partículas los parámetros más importantes de un acelerador son: la energía, la intensidad (o luminosidad), el ciclo de ocupación (fracción de tiempo en la que el acelerador envía partículas a un experimento) y la estructura temporal de la intensidad. Una vez aceleradas, pueden ser dirigidas contra blancos materiales para estudiar las reacciones entre partículas o núcleos; son aceleradores dedicados a la investigación. Este tipo de experimentos se conocen con el nombre de experimentos de *blanco fijo*, ya que las partículas impactan sobre un blanco material en reposo. También existen múltiples instalaciones que disponen de aceleradores dedicados a otras aplicaciones, como la irradiación para destruir tejidos tumorales (en hospitales) o para implantar iones en materiales semiconductores, etc. (en industrias).

Las primeras máquinas fueron desarrolladas en los años 1930 y utilizaron fuentes de alto voltaje continuo (por ejemplo el acelerador Van de Graaff) cuyos haces pueden alcanzar hasta unos 20 MeV. Se trata de aceleradores electrostáticos o de corriente continua. Para mejorar estas energías se propuso la utilización de fuentes de corriente alterna de alta frecuencia, haciendo pasar las partículas varias veces por la cavidad aceleradora, para lo que es necesario sincronizar cuidadosamente el paso de las partículas con el potencial. Con este principio, se han desarrollado aceleradores lineales y circulares. Son los que pertenecen a la categoría de aceleradores de radiofrecuencia o de corriente alterna.

El estadio más avanzado lo componen los colisionadores. En éstos, se lanza un haz de partículas contra otro, consiguiendo que se produzca un choque frontal para estudiar las colisiones de alta energía entre partículas. La carrera de los colisionadores se inició en los años 1960 y eran colisionadores e^+e^-. Se han desarrollado colisionadores partícula-antipartícula (e^+e^-, $p\bar{p}$) y también partícula-partícula (pp, e^-p, ión-ión). El máximo exponente de este tipo de ins-

talaciones se encuentra en construcción en el CERN: el colisionador LHC (*Large Hadron Collider*), que producirá colisiones de protones contra protones de 7 TeV de energía, consiguiendo una energía en el centro de masas de 14 TeV, la mayor jamás alcanzada en un laboratorio del mundo. El LHC se está construyendo en el túnel subterráneo de 27 km de perímetro que antes albergaba el colisionador e^+e^- (que se llamaba LEP) y se espera que inicie sus colisiones a finales de 2007.

2.1.1 Partes de un acelerador

He aquí los cuatro grandes elementos que componen un acelerador:

1. Fuente de iones ($e^-, p, O, Ca, ..., Pb$). Es la parte que alimenta de partículas a un acelerador. En una fuente se extraen electrones (de un filamento incandescente) o bien protones (de una fuente de radiofrecuencia que actúa sobre moléculas de hidrógeno). También existen fuentes de casi todos los iones de la tabla periódica. Los haces que proporcionan las fuentes de iones suelen ser de varios mA de corriente y energías del orden del keV.

2. Óptica (imanes, separadores). Se conoce por óptica de un acelerador al conjunto de elementos eléctricos y magnéticos que conducen las partículas aceleradas por la trayectoria ideal del acelerador. Los más frecuentes son los imanes dipolares (que se utilizan para curvar las partículas en trayectorias casi circulares) y los imanes cuadrupolares, que sirven para focalizar.

3. Vacío. El haz de partículas debe recorrer un largo trayecto antes de ser extraído del acelerador o utilizado. Por ello debe existir un tubo de vacío en el que las partículas puedan viajar sin encontrar materia (gas residual en el tubo), que las dispersaría y frenaría, inutilizando el acelerador. Los sistemas de vacío actual son realmente impresionantes. Es frecuente alcanzar presiones inferiores a 10^{-9} torr;[1] o sea, casi como la existente en la superficie de la Luna (que varía entre 10^{-10} y 10^{-12} torr entre el día y la noche lunar, que equivalen a la presencia de entre 10^7 y 10^5 moléculas/cm^3).

4. Sistema de aceleración (cavidades de radiofrecuencia). En estos dispositivos es en donde se transfiere energía a las partículas cargadas, aumentando su velocidad en cada paso por el sistema.

En el caso de aceleradores de blanco fijo, en la zona de utilización de los haces, se suelen encontrar el blanco y el detector. Si se trata de colisionadores, en los puntos de cruce de los haces, es donde se instalan los grandes espectrómetros de partículas; el tubo del anillo de colisiones atraviesa el detector por su eje central.

[1] La presión atmósférica es igual a 760 mmHg = 760 torr. Todavía es frecuente el uso de estas unidades de presión en vez del Pascal (Pa).

2.1.2 Tipos de aceleradores

La clasificación de los tipos de aceleradores más importantes queda patente en el siguiente esquema:

- Corriente continua (electrostáticos)
- Radiofrecuencia
  - lineales
  - orbitales
    - ciclotrón
    - sincrotrón
  - colisionadores
    - lineales
    - orbitales

2.1.3 Tecnologías en la evolución de los aceleradores

Las tecnologías que han marcado el desarrollo de los aceleradores son las siguientes:

1. Estabilidad de fase (para la aceleración). Cuando una partícula se desplaza en el interior de un acelerador, con el tiempo, atraviesa zonas en las que el campo eléctrico es máximo. Con un potencial sinusoidal, puede hacerse coincidir la fase de tal forma que la partícula siempre siente el máximo de potencial. Más adelante, al describir los aceleradores lineales, se detallará este principio.

2. Radiofrecuencia (gracias al desarrollo del radar en la II guerra mundial). Para transferir la energía al haz del acelerador se utilizan amplificadores de radiofrecuencia (*klystron*). Originalmente las frecuencias eran bajas (centenares de MHz). Ahora es fácil disponer de generadores que proporcionan 1 MW con frecuencias cercanas a 1 GHz.

3. La focalización fuerte (para los sincrotrones). Este es un sencillo método de utilización de células compuestas por dos cuadrupolos (células $FODO$), descritas más adelante en el parágrafo 2.3.3.

4. La superconductividad (para imanes y cuadrupolos intensos). La superconductividad es el fenómeno por el que ciertos cables pueden conducir altas intensidades de corriente eléctrica, sin que existan pérdidas caloríficas por efecto joule. Se consigue así crear campos magnéticos intensos (unos 10 tesla en vez de los 2 tesla producidos por los imanes convencionales) y construir cavidades de radiofrecuencia de alto gradiente. El inconveniente de la superconductividad es que hoy por hoy, el cable superconductor opera a temperaturas del helio líquido o incluso superfluido (1,8 K) por lo que se necesitan instalaciones criogénicas muy importantes. La figura 2.1 muestra la región de las magnitudes físicas: campo magnético (tesla), temperatura (K) e intensidad de corriente (kA/mm^2) que circula por un cable de niobio-titanio superconductor.

Imanes con espiras de cables de cobre, alcanzan campos magnéticos de 1,5 T mientras que los superconductores pueden llegar hasta unos 10 T. Lo mismo

sucede con las cavidades de radiofrecuencia: las de cobre generan campos del orden del MeV/m y las superconductoras un orden de magnitud mayor.

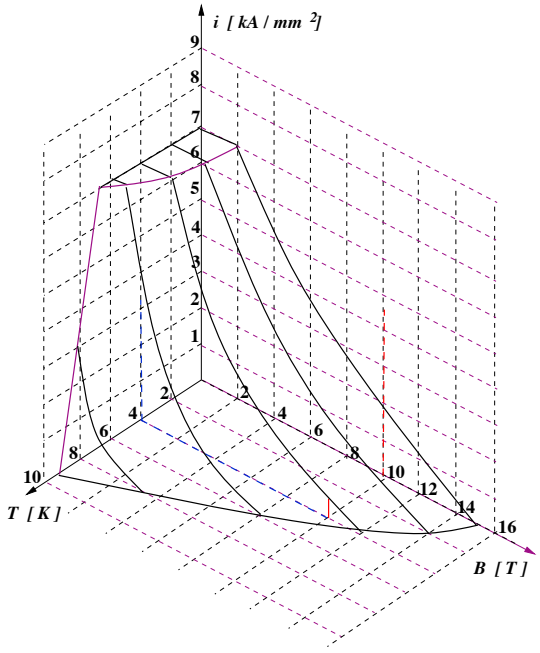


Figura 2.1: Región de los parámetros físicos: temperatura T, campo magnético $\mathcal{B}$ y densidad de corriente crítica para un cable superconductor de una aleación comercial de $Nb-Ti$. *Fuente*: R. Hampshire *et al*., (1969)

5. El enfriamiento estocástico (en los colisionadores $p\overline{p}$). Para conseguir un alto monocromatismo en un haz de partículas, hay que ir frenando las partículas más energéticas y al mismo tiempo hay que reducir sus oscilaciones betatrónicas; esto se consigue con la idea contenida en la figura 2.2, donde se puede ver el significado del enfriamiento estocástico. Por la implementación de este fenómeno en un anillo de antiprotones ha sido premiado con el Nobel de Física de 1984 el ingeniero de aceleradores S. Van der Meer del CERN, compartido con el físico Carlo Rubbia, porque desarrollaron el colisionador protón-antiprotón $Sp\bar{p}S$ con el que se descubrieron los bosones intermediarios de la interacción débil $W^{\pm}$ y Z. Se consiguió, por ejemplo, almacenar unos $10^{12}\bar{p}$ al día antes de transferirlos al colisionador $Sp\bar{p}S$.

Todas estas tecnologías han contribuido sucesivamente al aumento vertiginoso de la energía de las colisiones de partículas en las últimas décadas (véase la carta de Livingston representada en la figura 2.3, donde se ve una clara correlación entre el aumento de la energía y las tecnologías desarrolladas).

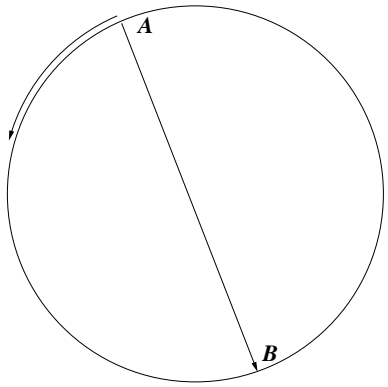


Figura 2.2: El principio del enfriamiento estocástico. Mientras las partículas recorren el arco de A a B, las señales captadas en los instrumentos colocados en A, se transmiten eléctricamente hasta B, modificando los parámetros del imán colocado en B, antes de que llegue el haz.

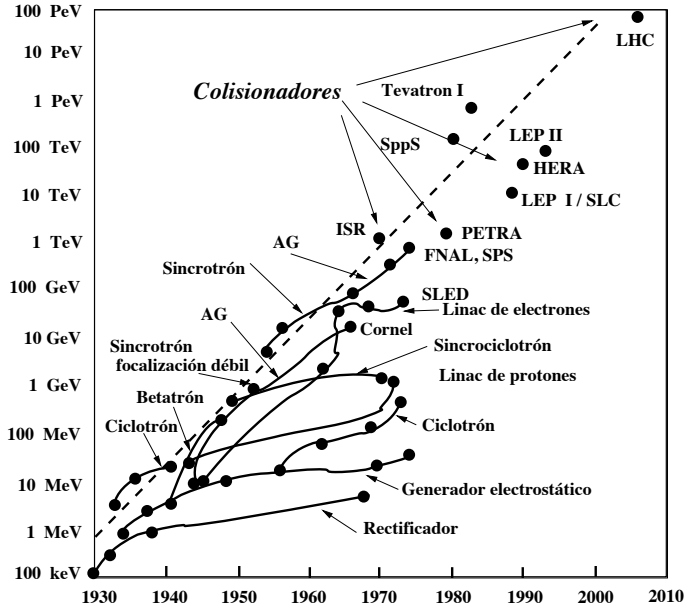


Figura 2.3: La carta de Livingston. Se observa el rápido crecimiento de la energía alcanzada con los aceleradores (doce órdenes de magnitud) en función del tiempo (ocho décadas).

2.2 Aceleradores de corriente continua

Son los primeros en desarrollarse. Se clasifican en dos grandes grupos.

1. El acelerador de Cockroft-Walton, impulsado por el propio Rutherford, en 1930. Basado en la rectificación de corriente alterna, como puede apreciarse en la figura 2.4. El primer año de su invento, logró acelerar protones hasta 260 keV. Verificó la conservación de la energía en la reacción $p + {}^7Li \rightarrow \alpha + \alpha$. Por ello se les premió con el Nobel de Física en 1951. Hoy en día existen aceleradores de este tipo que aceleran protones hasta unos 10 MeV.

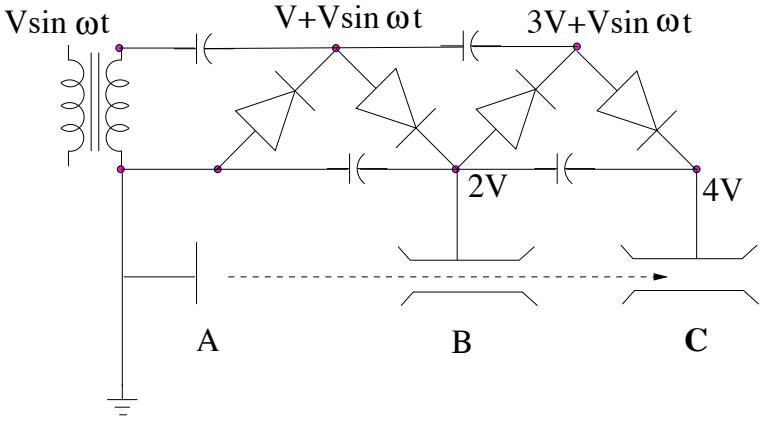


Figura 2.4: Estructura de rectificación de corriente en un acelerador tipo Cockroft-Walton.

2. El acelerador Van de Graaff, genuinamente electrostático porque se transportan mecánicamente (en una correa) las cargas eléctricas desde el generador hasta el terminal de alto voltaje. Hoy es ampliamente utilizado. En modo tándem[2] alcanzan más de 20 MeV. Se utilizan para acelerar protones y todo tipo de iones.

2.3 Aceleradores de corriente alterna

2.3.1 Aceleradores lineales (*linacs*)

El primer acelerador lineal se debe a L. Alvarez[3] (1948), en el que se alcanzó una energía de 32 MeV.

[2]El modo tándem se refiere a acelerar primero iones negativos, a los que después de arrancarles electrones, continúan acelerándose como positivos en el mismo acelerador.

[3]Luis W. Alvarez obtuvo el Premio Nobel de Física en 1968, pero por sus experimentos con cámaras de burbujas.

Como el nombre indica, se trata de un tubo de vacío, construido en línea recta, por el que circulan las partículas. En el interior del tubo se instalan tubos cilíndricos de deriva en los que se conecta, alternativamente, el voltaje de la radiofrecuencia. (véase figura 2.5).

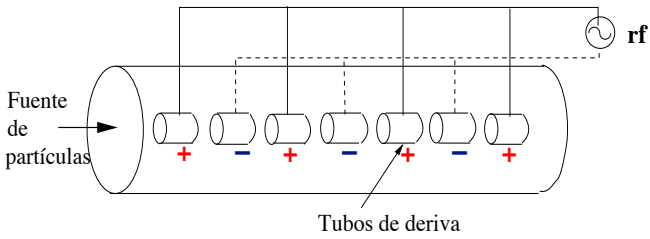


Figura 2.5: Esquema de la estructura de un acelerador lineal.

Debe elegirse correctamente la longitud de cada tubo de deriva para adecuarlo a la velocidad del paquete de protones que circula. La velocidad de la partícula de masa m y carga e en el tubo de deriva número n, conocido el potencial de aceleración V, es:

$$v_n = \sqrt{\frac{2neV}{m}}$$

La longitud de los tubos debe ir aumentando según:

$$L_n = \frac{1}{2}\beta_n \lambda \tag{2.1}$$

siendo $\beta_n = v_n/c$ y $\nu = \lambda/c$, la radiofrecuencia. Los *linacs* de protones pueden acelerar hasta unos 50 MeV. Los campos típicos son de varios MeV por metro de longitud. Suelen utilizarse como inyectores para aceleradores circulares de mayor energía. Un ejemplo puede observarse en la figura 2.6, donde se observa el esquema de un acelerador lineal de protones (*linac*): el haz de protones viaja por el interior de tubos de deriva que los protegen del campo eléctrico y zonas libres (*gaps*) en las que el paquete de protones, viajando a una velocidad v, es acelerado con un potencial máximo. La estabilidad de fase es consecuencia de la forma sinusoidal del campo eléctrico: la partícula ideal se encuentra en el punto C de la figura 2.6; una partícula más rápida llegará antes (punto D) y será frenada, mientras que una lenta (punto E) será acelerada. Estas fluctuaciones de energía se conocen como oscilaciones sincrotrón.

Los electrones, son rápidamente relativistas (con algunos MeV), y los tubos de deriva son cavidades resonantes de algunos centímetros de longitud. Las frecuencias aplicadas (osciladores *klystron*) son de microondas. El mayor *linac* de electrones está en Stanford; tiene 3 km de longitud y acelera electrones hasta 25 GeV.

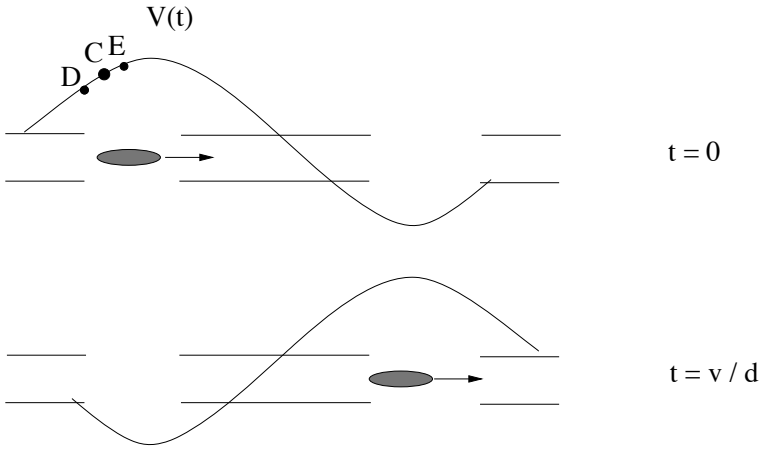


Figura 2.6: El principio de estabilidad de fase. La curva de potencial es máxima cuando el paquete de protones pasa por las zonas de deriva de un acelerador lineal.

2.3.2 Aceleradores circulares

Ciclotrón

Ideado por E. Lawrence en 1932 (Premio Nobel de Física 1939), logró construir el primer ciclotrón del tamaño de un pie y aceleró protones hasta 1,25 MeV.

Tiene forma de dos D huecas y se colocan en el interior de un campo magnético, en el que la trayectoria circular de radio R cumple

$$p = \gamma m v = q\mathcal{B}R$$

La velocidad angular es $w = v/R$ y la frecuencia del ciclotrón es

$$\frac{w}{2\pi} = \frac{q\mathcal{B}}{2\pi\gamma m} \tag{2.2}$$

por ejemplo 15 MHz T^{-1}, para protones con $\gamma = 1$.

Sincrotrón

Este es el dispositivo moderno empleado para acelerar protones y electrones. Las partículas describen una órbita toroidal circunscrita en un plano, gracias a una serie de imanes dipolares con un campo magnético $\mathcal{B}$ (en tesla) perpendicular al plano de la trayectoria. Si el momento de la partícula (de carga unidad) es p (en GeV/c) el radio R (en metros) del anillo del acelerador debe cumplir:

$$p = 0{,}3\mathcal{B}R \tag{2.3}$$

Las partículas son aceleradas cada vez que atraviesan las cavidades de radiofrecuencia, por ello, el campo $\mathcal{B}$ y la radiofrecuencia deben ir aumentando progresivamente, para sincronizarse con la velocidad de las partículas; de aquí el nombre de sincrotrones.

Todas las grandes máquinas que están en funcionamiento son sincrotrones (exceptuando el acelerador lineal de SLAC). Por ejemplo, el Tevatrón de Fermilab, de $R = 1$ km, que alcanzó 400 GeV con cavidades aceleradoras de cobre y 1000 GeV (de ahí el nombre de Tevatrón) cuando se colocaron las cavidades supraconductoras.

2.3.3 Focalización y estabilidad del haz

La trayectoria real de los haces de partículas aceleradas en un sincrotrón consta de numerosas oscilaciones en los planos horizontal y vertical de la trayectoria. No es un círculo perfecto. Esas oscilaciones se llaman oscilaciones betatrón. Además existen oscilaciones sincrotrón debidas a la estructura sinusoidal de la radiofrecuencia del acelerador; son oscilaciones longitudinales y afectan a la estructura energética de los paquetes de partículas aceleradas.

Para evitar que las oscilaciones de las trayectorias de las partículas se hagan demasiado grandes es necesario utilizar cuadrupolos magnéticos. Su finalidad es focalizar las partículas para que sigan lo más fielmente posible la trayectoria ideal. Un cuadrupolo se caracteriza por focalizar en un plano (si por ejemplo es en el plano horizontal, entonces es un cuadrupolo tipo F) y desfocalizar en el otro plano (en el vertical).

La focalización fuerte es debida al efecto focalizador de dos cuadrupolos con distancia focal f_i opuesta (uno focaliza y el otro desfocaliza en el mismo plano):

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} \tag{2.4}$$

siendo d la distancia entre ambos. Como $f_1 = -f_2$, el resultado es que el par FD, que se denomina $FODO$ es siempre focalizante, $F = f^2/d$. La figura 2.7 muestra los dos tipos de imanes más frecuentes; en 2.7**a)**, el imán dipolar que es un elemento básico en los sincrotrones. En la figura 2.7**b)** se muestra un diseño de un imán cuadrupolar; existen cuatro polos, creados por las respectivas bobinas que, según el sentido de la corriente eléctrica que las atraviesa, definen polos N y S. El sentido del campo va de N a S (líneas a trazos) y la fuerza de Lorentz que se ejerce sobre una partícula que atraviesa el imán en dirección perpendicular al papel (eje z) sigue la dirección de la flecha con línea contínua. En un sincrotrón, si la trayectoria de la partícula se fija como eje z, el campo magnético de los imanes se anula según el eje z. En los dipolos, el campo es constante. Si se fija el eje vertical como y, entonces $\vec{B}_d = (0, B_y, 0)$. En un cuadrupolo, el campo es de la forma $\vec{B}_c = (ky, kx, 0)$ en donde la constante k es el gradiente del cuadrupolo, que se mide en tesla/m.

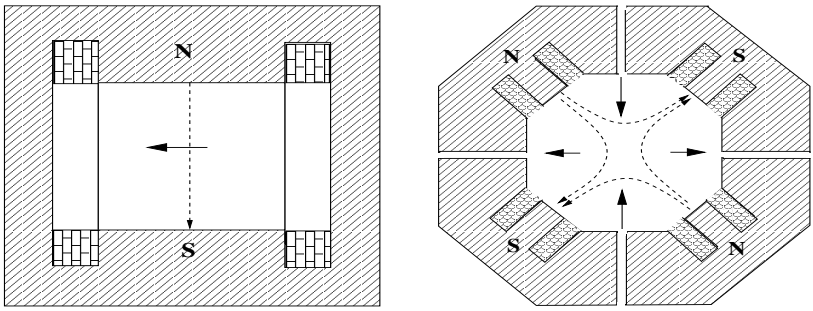


Figura 2.7: **a)** Imán dipolar. La dirección del campo viene dada por el sentido de la corriente en los polos N y S y la fuerza de Lorentz sobre una partícula cargada es perpendicular a la dirección del campo. **b)** Imán cuadrupolar. El campo se anula en el eje central del cuadrupolo (eje z). Se observan los cuatro polos alternados (dos N y dos S) y la dirección de las fuerzas de Lorentz.

2.3.4 Sincrotrones de electrones

Los electrones, al sufrir una aceleración centrípeta debido a su trayectoria circular, emiten la conocida radiación sincrotrón. La pérdida de energía de un electrón cuya velocidad es $\beta = v/c$, al describir una trayectoria circular es:

$$\Delta E = \frac{4\pi}{3} \frac{\alpha \hbar c \beta^3 \gamma^4}{R} \tag{2.5}$$

siendo R el radio de curvatura, $\beta = v/c$ con v la velocidad de las partículas y $\gamma = (1-\beta^2)^{-1}$. Esta radiación (fotones) se emite en la dirección de la tangente de la trayectoria del electrón. La anterior ecuación (2.5), para electrones, se puede escribir

$$\Delta E(\text{keV}) = 88{,}5 \frac{E^4(\text{GeV})}{R(\text{m})}$$

lo que en el colisionador e^+e^-, LEP, del CERN (de radio $\approx 4{,}3$ km) representa una pérdida aproximada de unos 85 MeV/vuelta, cuando trabaja en el pico del Z^0 ($E_e = 45$ GeV). Puede verificarse también, por ejemplo, que para un e^- de 10 (20) GeV, circulando por un anillo de 1 km de radio, la pérdida de energía es de 1 (16) MeV por vuelta. Para mantener un colisionador e^+e^- funcionando a energía constante, hay que acelerar las partículas en una cantidad de energía equivalente a lo que pierden en cada vuelta. Esta es una limitación muy importante de los colisionadores circulares (o sea, sincrotrones) de electrones. En los sincrotones de protones este efecto es despreciable; en efecto, si se compara con los de electrones se cumple $\Delta E_p/\Delta E_e = (m_e/m_p)^4 \sim 10^{-13}$.

2.4 Colisionadores

Se inicia la construcción de colisionadores en el año 1960; los primeros son: ADA en Italia, SPEAR en Stanford, EEUU. Se trataba de colisionadores e^+e^- de 250 MeV y 500 MeV por haz respectivamente. Como se ve, eran colisionadores de muy bajas energías.

Un colisionador es un sincrotrón por el que circulan, simultáneamente y en sentido contrario, dos haces de partículas. Por ejemplo, $e^+ + e^-$, $p + \overline{p}$, $e^- + p$ y $p + p$. En un colisionador se consigue que los haces acelerados colisionen en uno o varios puntos de la trayectoria del sincrotrón. Son colisiones que tienen lugar en el interior del tubo del acelerador.

La gran ventaja es la enorme energía en el centro de masas disponible en la colisión. Se dispone entonces de mucha energía para producir nuevas partículas. Sean $(E_1, \vec{p}_1)$ y $(E_2, \vec{p}_2)$ los cuadrivectores energía-momento de los haces; en el choque se tiene una energía total:

$$W^2 = (p_1 + p_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2(E_1 E_2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2) \tag{2.6}$$

A gran energía $|p_1| \sim E_1$; si además se supone el caso de un colisionador simétrico, $E_1 = E_2$, se tendrá

$$W \approx 2E \tag{2.7}$$

El mismo cálculo para un sincrotrón utilizado en modo blanco fijo, daría

$$W^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 E \tag{2.8}$$

siendo E la energía del haz extraído. En este caso $W \sim \sqrt{E}$, con lo que sólo se dispone en el centro de masas de la colisión de una energía que aumenta según $\sqrt{E}$.

La desventaja de los colisionadores es que es muy difícil obtener grandes intensidades de partículas circulando para poder tener una gran probabilidad de colisión. La magnitud física característica de los colisionadores es la luminosidad (dada frecuentemente en $\mathrm{cm}^{-2}\ \mathrm{s}^{-1}$), que se define

$$\mathcal{L} = f \cdot n \frac{N_1 N_2}{A} \tag{2.9}$$

en donde N_i es el número de partículas aceleradas en cada sentido, f la frecuencia de rotación, n el número de paquetes (*bunches*) que circulan en cada sentido y A la sección de intersección de los haces, que puede escribirse $A = 4\pi\sigma_x\sigma_y$, siendo σ_x y σ_y las desviaciones típicas de las gausianas que caracterizan los perfiles transversales del haz. Se puede comprobar que el número total de reacciones que tienen lugar por unidad de tiempo, depende de la sección eficaz de reacción σ y de la luminosidad:

$$R = \sigma \cdot \mathcal{L} \tag{2.10}$$

El tamaño del haz puede expresarse en función de dos magnitudes: la *emitancia transversa*, ϵ, que depende de la óptica y la *función amplitud*, β, que depende de la configuración magnética del acelerador. En función de la desviación típica σ y de la amplitud β, la emitancia transversa se escribe

$$\epsilon = \pi\sigma^2/\beta$$

con lo que, si β^* es el valor de β en el punto de colisión, la luminosidad puede escribirse

$$\mathcal{L} = f \cdot n \frac{N_1 N_2}{4\sqrt{\epsilon_x \beta_x^* \epsilon_y \beta_y^*}}$$

de forma que la receta para conseguir alta luminosidad es reducir la amplitud y la emitancia y por supuesto, aumentar la frecuencia y el número de paquetes.

Se han construido colisionadores e^+e^-, $p+\overline{p}$ y e^-+p, de varias energías en el mundo (véanse tablas 2.1 y 2.2). La luminosidad suele ser del orden $\mathcal{L} \sim 10^{31}$ cm^{-2} s^{-1} para los colisionadores e^+e^-. Era $\mathcal{L} \sim 10^{30}$ cm^{-2} s^{-1} en el viejo S$\overline{p}p$S del CERN. Se trata de una luminosidad elevada habida cuenta de que es difícil producir muchos antiprotones. En el CERN, gracias al enfriamiento estocástico, ideado por S. Van der Meer que ya se ha descrito anteriormente, se logró almacenar unos 10^{12} antiprotones por día en el acumulador.

TABLA 2.1: Los mayores colisionadores e^+e^- del mundo.

	CESR (Cornell)	KEKB (KEK)	PEP-II (SLAC)	SLC (SLAC)	LEP (CERN)
año de inicio	1979	1999	1999	1989	1989
$E_{\pm}^{max}$(GeV)	6	8x3.5	9x3	50	100
$\mathcal{L}(10^{31}$ cm^{-2}s$^{-1})$	120	10^3	670	5	10
$2\pi R$ (km)	0,768	3,016	2,2	1,45+1,47	26,66

TABLA 2.2: Los mayores colisionadores pp, $\overline{p}p$, ep del mundo.

	S$p\overline{p}$S (CERN)	Tevatrón (Fermilab)	Hera (DESY)	LHC (CERN)
año de inicio	1981	1987	1990	2007
tipo	$\overline{p}p$	$\overline{p}p$	e^-p	pp
$E_{\pm}$(TeV)	0.315	0.9	e; 0,030 p; 0,920	7
$\mathcal{L}(10^{30}$ cm^{-2}s$^{-1})$	6	50	75	10^4
$2\pi R$ (km)	6,911	6,28	6,336	26,66

Por otra parte, se observa que la energía es menor en los colisionadores e^+e^- que en los de protones. Esto es debido a las grandes pérdidas por radiación sincrotrón que sólo afectan a los sincrotrones de electrones; en efecto, según la ecuación (2.5) las pérdidas de energía de los protones, respecto a la de los electrones $\Delta E_p/\Delta E_e = (m_e/m_p)^4 \sim 10^{-13}$, es insignificante. Los colisionadores e^+e^- más recientes trabajan con energía centro de masas alrededor de 10 GeV (CESR en Cornell, EEUU; KEK en Tsukuba, Japón; PEP II en SLAC). Como están en la zona del $\Upsilon(4S)$, fabrican muchos mesones con belleza, por ello se llaman factorías de Bs (*B-factories*). Son *asimétricos*, es decir, la energía de electrones y positrones no es la misma. Estos colisionadores están diseñados para profundizar en el estudio de la violación de la simetría CP en los sistemas $B\overline{B}$. Para ello se requiere un *boost* de Lorentz, de forma que el centro de masas no coincide con el punto de colisión.

El proyecto de mayor envergadura es el LHC que se está construyendo en el CERN (Ginebra) y que será un colisionador $p + p$ con una energía por haz de 7 TeV. Está previsto que se ponga en funcionamiento en el año 2007. Su luminosidad se proyecta que alcance $\mathcal{L} \sim 10^{34}$ cm^{-2} s^{-1}.

2.4.1 Colisionadores de iones

Tanto en Brookhaven, EEUU como en el CERN existen colisionadores capaces de producir colisiones entre iones pesados. En el colisionador de Brookhaven, llamado RHIC, de 3,8 km de circunferencia, los iones de oro alcanzan una energía máxima de 0,1 TeV/u, con luminosidades del orden de $\mathcal{L} = 0,4 \times 10^{27}$ cm^{-2} s^{-1}. En el mismo LHC, se prevé estudiar colisiones plomo-plomo hasta energías de 2,76 TeV/u por haz y con luminosidades superiores en un orden de magnitud a las de RHIC.

La física que se pretende estudiar en estas colisiones entre iones pesados relativistas es la del estado de la materia denominado plasma de quarks y gluones, en donde las densidades y temperaturas son muy superiores a las de la materia nuclear conocida.

2.4.2 El complejo de aceleradores del CERN

La figura 2.8 muestra el extraordinario entramado formado por los 9 aceleradores del CERN, que pueden acelerar hasta 6 tipos distintos de partículas. Esta imagen muestra la compleja instalación de máquinas aceleradoras que se han desarrollado en sus breves 50 años de historia (el CERN se creó en 1954). Es posible que hoy sea la mayor instalación del mundo dedicada a la investigación en física de partículas. Obsérvese como para acelerar protones, cada acelerador se utiliza para inyectar partículas al siguiente de mayor energía; así, se puede apreciar que la cadena es LINAC→PSB→PS→SPS→LHC. El CERN ha sabido optimizar los recursos disponibles, aprovechando las máquinas existentes, construyendo nuevos aceleradores utilizando los viejos como inyectores de partículas para los nuevos.

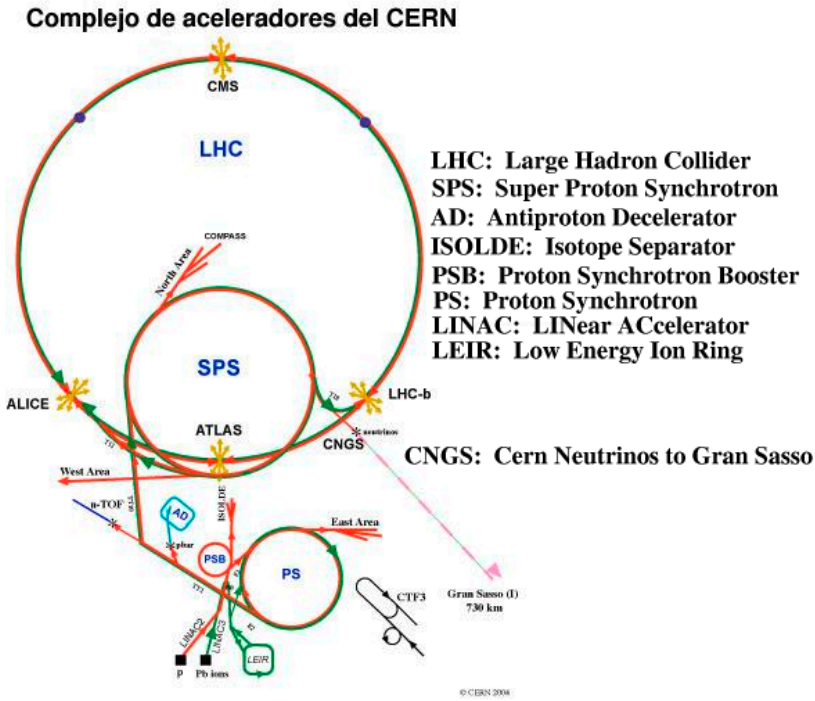


Figura 2.8: El complejo de aceleradores del CERN.

2.4.3 Colisionadores e^+e^- lineales

Para explotar las ventajas de la física accesible a través de la aniquilación e^+e^-, sin los inconvenientes de las pérdidas de energía por radiación sincrotrón que tienen lugar en los colisionadores circulares, así como por la claridad y la facilidad de estudio de las interacciones, que no están sumergidas en el fondo de las interacciones fuertes que tienen lugar en los colisionadores hadrónicos, cualquier colisionador e^+e^- del futuro tendrá que ser de tipo lineal. El ejemplo reciente de colisionador lineal es el de SLAC, cuyo esquema se puede ver en la figura 2.9. Primero se aceleran electrones que producen positrones; una vez reinyectados, se aceleran y siguen la rama curva de la derecha de la figura; los electrones, previamente acelerados, son guiados por la rama izquierda, que es más larga, con lo que los dos haces chocan en el mismo instante en el punto de colisión: la diferencia entre los tiempos de inyección se compensa con la diferencia de recorridos. Con el LEP del CERN, desmontado en el año 2000, se ha tocado el techo de la tecnología de los colisionadores e^+e^- circulares. El CERN está desarrollando un colisionador e^+e^- lineal de varios TeV llamado CLIC, que verá la luz probablemente más allá del 2015.

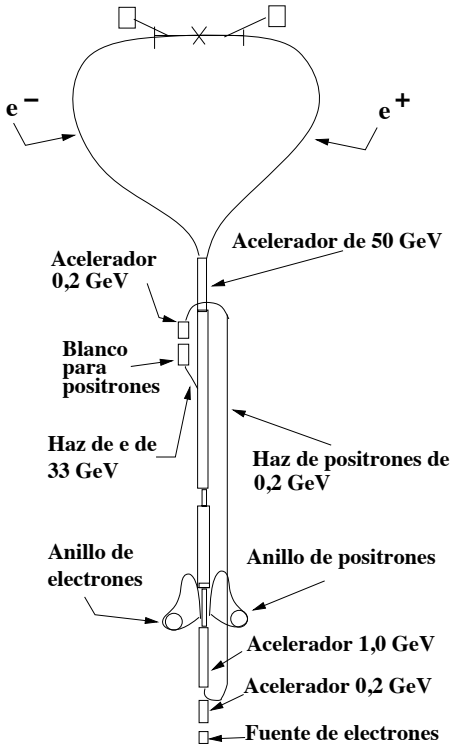


Figura 2.9: Esquema del colisionador lineal SLC de SLAC.

2.5 Ejercicios

2.1. Movimiento de partículas en un ciclotrón.
a) Demostrar que el momento de una partícula acelerada en un ciclotrón sigue la ley $p = qRB$ siendo q la carga de la partícula, R el radio de curvatura de su órbita y B el campo magnético. La demostración se hará primero en el caso no relativista y luego en el caso relativista.
b) Demostrar que la fórmula anterior se puede escribir para $|q| = 1$ en unidades de la carga del electrón:

$$pc[\mathrm{TeV}] = 0,3 \cdot B[\mathrm{T}] \cdot R[\mathrm{km}]$$

c) Demostrar que la frecuencia de giro es, en el caso no relativista, la llamada 'frecuencia del ciclotrón' $\omega_c = qB/m$ siendo m la masa de la partícula. ¿Qué ocurre en el caso relativista?

2.2. Diseño de un ciclotrón.
a) Calcular la energía máxima de los protones que puede conseguirse con un ciclotrón de 60 cm de radio y con un campo magnético de B= 1 T.

b) Calcular la frecuencia de giro de los protones.
c) Si el voltaje de aceleración es de 100 kV, calcular el número de vueltas que necesita un protón para alcanzar la energía máxima.

2.3. Acelerador de blanco fijo y colisionador.
a) Se considera un haz de protones pulsado, de 11 kHz y 10^{11} partículas por pulso. Los protones tienen un momento de 100 GeV/c y se dirigen contra un blanco de hidrógeno líquido de 0,09 g/cm^3 de densidad y 1 cm de espesor. Calcular la energía en centro de masas y la luminosidad instantánea del experimento.
b) Misma pregunta si se considera un colisionador pp con haces de protones idénticos al considerado en el apartado **a)**. Se tomará un valor de 15 μm para el radio transverso de los haces.

2.4. 2.4. Diseño de un anillo de colisiones pp.
a) En el colisionador LHC actualmente en construcción en el CERN, cuya circunferencia es de 27 km, se van a producir colisiones pp a una energía en centro de masas de $\sqrt{s} = 14$ TeV. Calcular el campo magnético que deben tener los imanes para mantener los protones en órbita.
b) Calcular la luminosidad instantánea sabiendo que los paquetes de protones contienen 10^{11} partículas, tienen un radio transverso de 15 μm, y que hay 2600 paquetes por cada haz. Calcular la luminosidad integrada en un año de toma de datos suponiendo una eficacia de 30 %.
c) Calcular el número de sucesos de interacción en cada cruce de los haces, sabiendo que la sección eficaz de colisión pp a una energía de $\sqrt{s} = 14$ TeV es de 70 mbarn.

2.5. Diseño de un anillo de colisiones $e^+ e^-$.
a) Calcular las pérdidas de energía por radiación sincrotrón para LEP tomando E_b=104 GeV (máxima energía del haz alcanzada en LEP). Suponiendo que estas pérdidas se compensan mediante cavidades RF de 1,5 m de longitud y cuyo gradiente de aceleración es de 6 MeV/m, calcular el número de cavidades necesarias.
b) ¿Qué ocurre si se aumenta la energía de los haces hasta E_b=250 GeV?
c) Calcular el radio de un anillo de colisiones $e^+ e^-$ con E_b=250 GeV y cuyas pérdidas por radiación sincrotrón fueran en porcentaje similares a las del apartado **a)** de este problema. Calcular el número de cavidades necesarias en este anillo.
d) Calcular la longitud de un colisionador lineal que alcance una energía en centro de masas de $\sqrt{s} = 500$ GeV, suponiendo que está construido con cavidades RF similares a las del apartado **a)**. Calcular el número de cavidades necesarias.

2.6. Factorías de mesones B.
En la factoría PEP II de SLAC se producen colisiones $e^+ e^-$ a una energía en centro de masas de $\sqrt{s} = 10{,}5$ GeV.
a) Calcular la luminosidad instantánea de este colisionador. Datos: la longitud del anillo es de 2,2 km, el número de $e^-(e^+)$ por paquete es de $5,9(2,7)10^{10}$, hay 1658 paquetes por haz, y las dimensiones transversas de los mismos son de 181/5,4 μm para los ejes x/y.
b) Calcular la luminosidad integrada durante 1 año suponiendo que se toman estos datos durante el 10 % del tiempo.

3. *Interacción de las partículas con la materia*

3.1 Introducción

Cuando se utiliza la expresión de 'Interacción de las partículas con la materia' se acostumbra a designar aquellos fenómenos electromagnéticos que están ligados al funcionamiento de los detectores de partículas (éstos, se estudiarán en el próximo tema). Por eso, se recogen en este tema los fenómenos más importantes que sufren las partículas cargadas y los fotones al atravesar la materia.

El principio de funcionamiento de un detector es sencillo: una partícula cargada al atravesar el material del detector, ioniza el medio (además de producir excitaciones), pierde energía y como consecuencia da una señal observable y accesible al observador. En el caso de los fotones, se verá que su interacción con la materia produce electrones (o pares electrón-positrón) que son fácilmente detectables. En ambos casos, se trata de interacciones de naturaleza electromagnética. Pero uno de los conceptos más importantes de la física nuclear y de partículas es el de *sección eficaz*. Merece que se le dedique una atención particular; por ello, a continuación se aborda este concepto. También se presentan varias curvas de secciones eficaces que ilustran el estado actual de conocimientos en el campo de las reacciones entre partículas. Por su especial interés, se han introducido también secciones eficaces de procesos de interacción fuerte y débil, que aunque tienen menos impacto en el funcionamiento general de los detectores, deben ser conocidas.

3.2 El concepto de sección eficaz

La sección eficaz está relacionada con la probabilidad de interacción de una partícula con un blanco.

El esquema presentado en la figura 3.1, muestra un experimento típico de colisión entre partículas. Puede observarse cómo las partículas incidentes (proyectiles tipo a cuyo flujo es F [$\mathrm{cm}^{-2}\mathrm{s}^{-1}$]) inciden contra un blanco material X cuya densidad de blancos por unidad de volumen es n [cm^{-3}]. Dado un

material de densidad ρ, es fácil calcular el número de átomos (o núcleos) por unidad de volumen:

$$n = \rho \frac{\mathcal{N}_{\mathcal{A}}}{A'} \tag{3.1}$$

siendo $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$ el número de Avogadro, que da el número de átomos por mol y A' el peso atómico del material que compone el blanco (en gramos por mol). No hay que confundir A' con el número másico.

En lo que sigue, se supondrá que el espesor del blanco Δx es muy delgado. El detector subtiende un ángulo sólido $d\Omega = d\Sigma / R^2$, siendo $d\Sigma$ la superficie útil del detector.

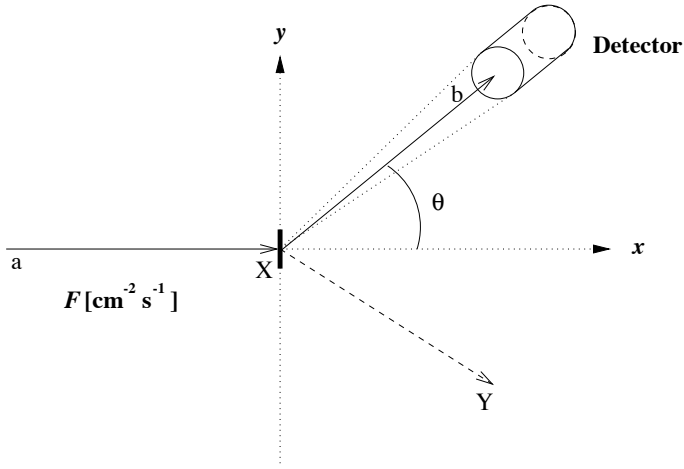


Figura 3.1: Experimento de colisión entre partículas $a + X \rightarrow b + Y$.

El haz de partículas siempre suele tener un tamaño finito; en un corte transversal del haz se supone que ocupa una superficie S. De esta forma el número total de partículas incidentes por unidad de tiempo será $N_{inc} = FS$. Como consecuencia del choque, la partícula incidente ya no sigue su dirección original (el eje x), sino que es difundida y sale formando un ángulo θ tal que puede incidir en el detector con lo que podrá producirse un registro en el mismo.

Sea $N_s(\theta)$ el número de difusiones por unidad de tiempo en el ángulo sólido $d\Omega$ que subtiende el detector. Se define la sección eficaz diferencial:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{F} \frac{dN_s}{d\Omega}$$

en donde F [cm^{-2}s^{-1}] es el flujo de partículas incidentes como ya se ha visto anteriormente. Con ello la sección eficaz total es sencillamente la integral

$$\sigma(E) = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

Ahora bien, al integrar N_s para todo el ángulo sólido se obtiene N_{tot}, es decir el número total de partículas difundidas por unidad de tiempo. Como $Sn\Delta x$ es el

número de blancos en un material de espesor Δx, siendo n la densidad volúmica de blancos, se tiene

$$N_{tot} = FSn\sigma\Delta x = N_{inc}n\sigma\Delta x$$

de forma que se puede definir la probabilidad de interacción de una partícula en un material de espesor Δx como

$$\boxed{\frac{N_{tot}}{N_{inc}} = n\sigma\Delta x} \tag{3.2}$$

con lo que el concepto de sección eficaz es realmente el de la probabilidad de interacción por proyectil y por blanco.

La unidad de sección eficaz es el barn (= 10^{-24} cm^2), que tiene dimensión de superficie, aunque en física nuclear y sobre todo en física de partículas es mucho más frecuente obtener valores de sección eficaz dadas en los submúltiplos *mili-, micro-, nano-* e incluso *pico-* o *femto-barn* (véase la tabla de múltiplos en el Apéndice B).

El tipo de reacciones que se detecta, o sea la manera de seleccionar experimentalmente N_s, determina la cantidad que se mide. Si N_s, por ejemplo, cuenta el número de partículas idénticas a las incidentes y el núcleo difundido es también del mismo tipo que el blanco entonces se trata de la sección eficaz elástica. Caso contrario, se trata de secciones eficaces inelásticas.

La sección eficaz geométrica vendría dada por $\sigma = \pi R^2$, que iría aumentando con el tamaño del núcleo. Los núcleos tienen tamaños dados por un radio $R \sim 2 - 7$ fm con lo que se tiene $\sigma \sim 12 - 150$ fm^2. Por ello se eligió el barn (=100 fm^2 = 10^{-28} m^2), como unidad de sección eficaz. Se puede también calcular la probabilidad de supervivencia del proyectil. Para ello hay que calcular la probabilidad de que no haya interacción a lo largo de un recorrido x, o sea, hay que resolver $P(x + dx) = P(x)(1 - n\sigma dx)$, lo que conduce a:

$$\boxed{P(x) = e^{-n\sigma x}} \tag{3.3}$$

O sea, en el caso de un haz de N_0 partículas que inciden en un material de espesor x, la ley de atenuación vendrá dada por:

$$N = N_0 e^{-n\sigma x}$$

De la misma manera se puede calcular la probabilidad de sobrevivir hasta x e interaccionar entre x y $x + dx$:

$$F(x)dx = P(x)n\sigma dx$$

Otra magnitud estadística muy importante es el recorrido libre medio:

$$\boxed{\lambda = \frac{\int xP(x)dx}{\int P(x)dx} = \frac{1}{n\sigma}} \tag{3.4}$$

que representa la longitud media recorrida por la partícula antes de sufrir una colisión. Se suele escribir también $P(x) = e^{-x/\lambda} = e^{-\mu x}$, siendo μ el coeficiente de absorción.

Ejemplo: la sección eficaz de Thomson (colisión elástica clásica entre un fotón y un electrón $\gamma + e \rightarrow \gamma + e$) vale

$$\sigma_{Th} = \frac{8}{3}\pi r_e^2 = 0,67 \text{ barn} \tag{3.5}$$

siendo $r_e = \dfrac{e^2}{m_e c^2} = 2,82$ fm, el radio clásico del electrón, y $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C, la carga del electrón.

A partir de las definiciones de los distintos tipos de sección eficaz, se pueden calcular las longitudes (recorridos libres medios) de colisión y de absorción:

$$\lambda_{\mathrm{T}} = \frac{1}{n\sigma_{\mathrm{T}}} \qquad\qquad \lambda_{\mathrm{I}} = \frac{1}{n\sigma_{\mathrm{I}}}$$

Una recopilación de valores de estas magnitudes a alta energía se puede ver en la tabla 3.1

Teóricamente las secciones eficaces se calculan utilizando la regla dorada de Fermi, que da la probabilidad de interacción (transición del estado $i \rightarrow f$) por unidad de tiempo:

$$\boxed{\lambda_{i\rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} \mid \langle f|H'|i\rangle \mid^2 \rho(E_f)} \tag{3.6}$$

a partir del elemento de matriz del hamiltoniano de interacción H'_{fi} y la densidad de estados finales $\rho(E_f)$. La sección eficaz se obtiene a partir de la expresión anterior:

$$\boxed{\sigma_{i\rightarrow f} = \frac{\lambda_{i\rightarrow f}}{F}} \tag{3.7}$$

siendo F el flujo de partículas incidentes (en cm^{-2} s^{-1}, con lo que la sección eficaz tiene unidades de superficie).

En el caso de la colisión $a + X \rightarrow b + Y$,

$$\sigma_{a\rightarrow b} = \frac{1}{\pi\hbar^4} \mid \langle H'_{fi}\rangle \mid^2 \frac{p_b^2}{v_a v_b} \tag{3.8}$$

que podría haberse escrito también $\sigma_{X\rightarrow Y}$. Las variables p_b, v_a y v_b vienen dadas todas ellas en el centro de masas. Salvo constantes, representan el espacio fásico disponible en el estado final de la reacción, $\rho(E_f) = \dfrac{dN_b}{dE}$, como de costumbre. El término $\langle H'_{fi}\rangle$ es el elemento de matriz del hamiltoniano responsable de la interacción estudiada.

Si se aplica la expresión (3.8) a las reacciones con neutrones incidentes, por ejemplo, se tiene:

- en la difusión elástica: $v_a = v_b = p/m_n$, con lo que σ es independiente de la energía,
- en la producción de partículas α, p_b y v_b son independientes de v_a, con lo que

$$\sigma \propto \frac{1}{v_a}$$

o sea, inversamente proporcional a la velocidad del neutrón incidente. También es aplicable a otros proyectiles como se verá por ejemplo en el estudio de la fusión nuclear.

TABLA 3.1: Propiedades atómicas y nucleares de varios elementos. Se muestran los valores de la sección eficaz total, σ_{T}, la sección eficaz de absorción (o inelástica), σ_{I}, la longitud de colisión nuclear,λ_{T} y la longitud de absorción λ_{I}, para colisiones con protones o neutrones de alta energía (80-240 GeV/c), que dependen muy poco de la energía. La densidad, ρ, corresponde al estado sólido o líquido en punto de ebullición; en el caso del C es para grafito puro.

Material	Z	A	σ_{T} (barns)	λ_{T} (g/cm^2)	σ_{abs} (barns)	λ_{I} (g/cm^2)	ρ (g/cm^3)
H_2	1	1,01	0,0387	43,3	0,033	50,8	0,0708
D_2	1	2,01	0,073	45,7	0,061	53,7	0,162
He	2	4,00	0,133	49,9	0,102	65,1	0,125
Li	3	6,94	0,211	54,6	0,157	73,4	0,534
Be	4	9,01	0,268	55,8	0,199	75,2	1,848
C	6	12,01	0,331	60,2	0,231	86,3	2,265
N_2	7	14,01	0,379	61,4	0,265	87,8	0,808
O_2	8	16,00	0,420	63,2	0,292	91,0	1,14
Ne	10	20,18	0,507	66,1	0,347	96,6	1,20
Al	13	26,98	0,634	70,6	0,421	106,4	2,70
Ar	18	39,95	0,868	76,4	0,566	117,2	1,40
Fe	26	55,85	1,120	82,8	0,703	131,9	7,87
Cu	29	63,55	1,232	85,6	0,782	134,9	8,96
Sn	50	118,69	1,967	100,2	1,21	163	7,31
W	74	183,85	2,767	110,3	1,65	185	19,3
Pb	82	207,19	2,960	116,2	1,77	194	11,35
U	92	238,03	3,378	117,0	1,98	199	18,95

Para ilustrar el concepto de sección eficaz, se han escogido una serie de procesos representativos de las interacciones entre partículas (ya sean hadrones, fotones, leptones), bien conocidos, que permiten realizar una comparación de los diversos valores que toma esta magnitud para cada una de las interacciones conocidas.

3.2.1 Secciones eficaces de interacción fuerte

La sección eficaz neutrón+protón a baja energía es muy bien conocida. Su característica más importante es que es prácticamente constante en un amplio rango de energías: $\sigma = 20$ barn, entre $T_n = 1$ y 10^4 eV, como puede comprobarse en la figura 3.2. Esta sección eficaz ha sido de gran valor histórico pues permitió comprender las propiedades de la interacción fuerte. La ventaja de su estudio es que como el neutrón no tiene carga, no sufre interacción electromagnética (o culombiana). Las secciones eficaces de proyectiles cargados a muy baja energía están dominadas por la interacción culombiana y deben de tenerse en cuenta hasta que la energía del proyectil es suficientemente grande de forma que sólo interviene la interacción fuerte. Esto se apreciará en las próximas curvas.

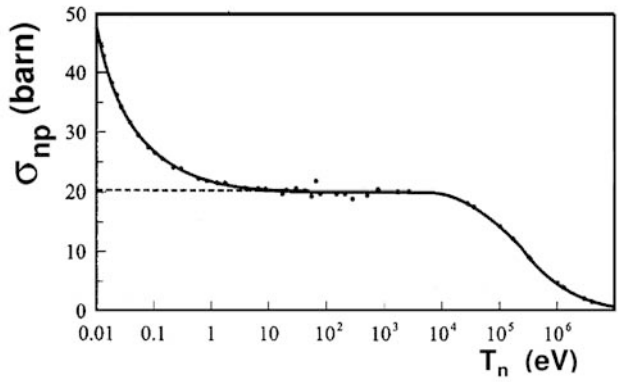


Figura 3.2: Curva de sección eficaz de difusión $n + p$ en función de la energía cinética del neutrón, en eV.

Los experimentos con aceleradores de partículas han permitido medir las secciones eficaces más elementales. En la figura 3.3 pueden verse las secciones eficaces totales partícula (antipartícula) + protón, es decir, $p(\overline{p}) + p; \pi^+(\pi^-) + p; K^+(K^-) + p$. Estas secciones eficaces pueden parametrizarse, siguiendo las ideas de la teoría de Regge (en la que las interacciones proceden mediante el intercambio de trayectorias de Regge) y de la matriz S, mediante expresiones en función de la energía total en el cdm, $\sqrt{s}$, del tipo

$$\sigma^{ab} = A + B\log^2(s/s_0) + C(s_1/s)^{\eta_1} \mp D(s_1/s)^{-\eta_2}$$

siendo A, B, C, D, constantes que dependen del tipo de hadrones, s_0, s_1 escalas de energía (se toma $s_1 = 1$ GeV) y el signo $\mp$ se aplica según que a sea la partícula o su antipartícula. La tabla de partículas (*Review of Particle Physics*, Particle Data Group, *Phys. Lett.,* **B592** (2004) 1-1109; véase también su

página Web http://pdg.lbl.gov/) contiene los parámetros y tablas para todas las reacciones conocidas.

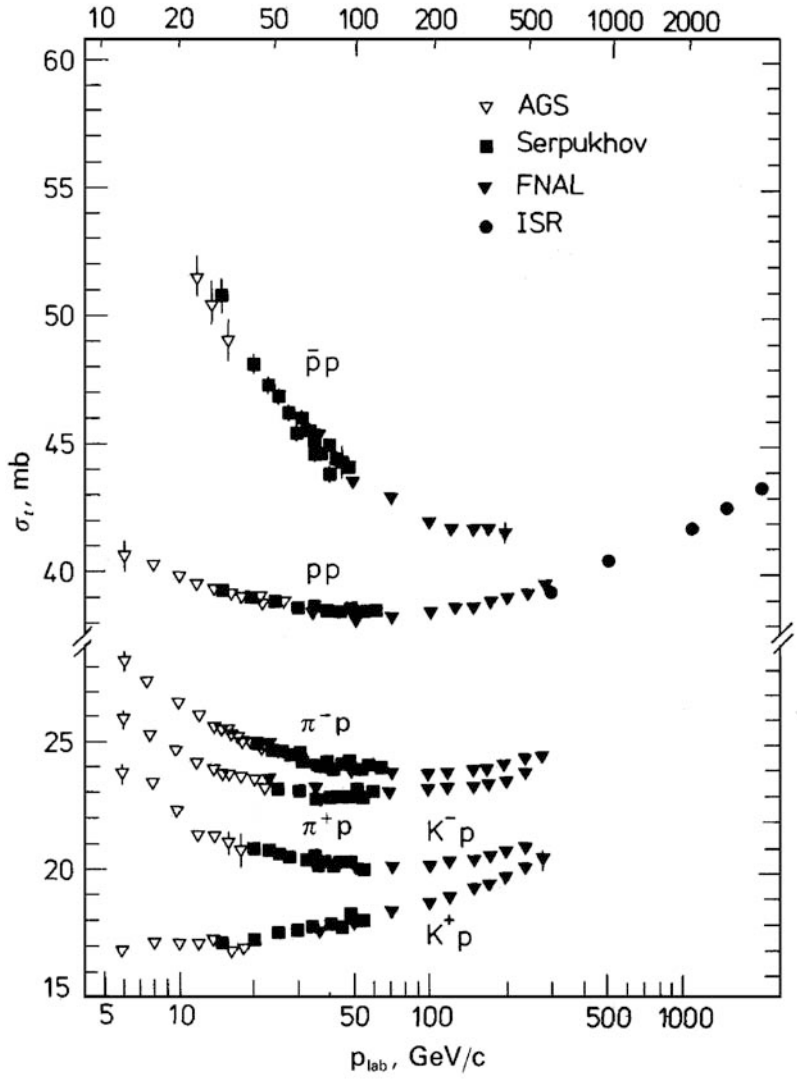


Figura 3.3: Sección eficaz total, σ_t, partícula (antipartícula) + protón. En el eje de abscisas, abajo, la escala da el momento del proyectil en el sistema laboratorio; arriba, la energía total en el cdm, $\sqrt{s}$. Fuente de secciones eficaces: tablas del PDG (http://pdg.lbl.gov/).

De la observación de las curvas de la figura 3.3 se constata que:

a) excepto en el caso $K^+ + p$, las secciones eficaces disminuyen con la energía incidente, hasta unos 100 GeV/c, en donde las secciones eficaces toman valores entre 20 y 40 mb. A partir de esta energía, aumentan logarítmicamente con la energía total en el cdm, s, lo que se asocia con el mecanismo de intercambio del Pomerón y

b) las secciones eficaces partícula y antipartícula tienden a igualarse a gran energía. Sucede que cuando la partícula es negativa tiene una sección eficaz ligeramente superior respecto a su compañera positiva.

Por otra parte, la figura 3.4 muestra con más detalle, pero en escala logarítmica, las secciones eficaces protón+protón total y la elástica. Esta última desciende en función de la energía hasta los 100 GeV/c y mantiene un valor aproximado igual al 16 % de la sección eficaz total.

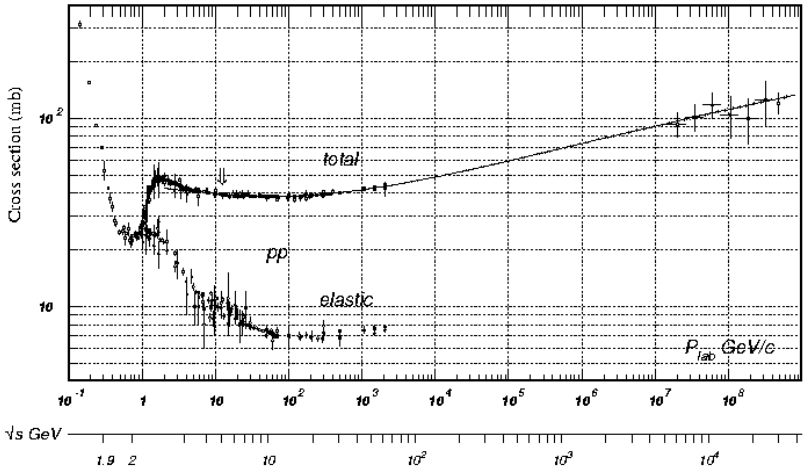


Figura 3.4: Sección eficaz total y elástica protón + protón.

Las secciones eficaces determinan el ritmo de colisiones I, a partir del ritmo de partículas incidentes del haz I_0;

$$I = I_0 \left(\frac{\rho \mathcal{N}_{\mathrm{A}} x}{A} \right) \sigma_{\mathrm{T}}$$

siendo ρ, x y A la densidad, el espesor y el peso atómico del material que compone el blanco. Así, el recorrido libre medio de colisión se calcula $\ell_{col} = A/(\rho \mathcal{N}_{\mathrm{A}} \sigma_{\mathrm{T}})$.

Cuando se trata de blancos nucleares, la sección eficaz geométrica puede estimarse a partir de $\sigma = \pi r_n^2$; es decir, como si el núcleo tuviese un radio $r_n = r_0 A^{2/3}$. Esta sección eficaz representa muy bien las medidas de la absorción nuclear. O sea, parametrizando $\sigma = \sigma_0 A^{\alpha}$, el mejor ajuste a los datos

experimentales da $\sigma_0 = 41,2$ mb y $\alpha = 0,711$. Puede comprobarse que este exponente confirma la forma del radio nuclear que se ha tomado.

También se conocen las secciones eficaces pión + protón y kaón + protón, tal como se muestra en la figura 3.5. En este caso, se observa con mayor nitidez las estructuras que aparecen entre 1 y 2 GeV de energía en el centro de masas y que corresponden a la producción de resonancias en la zona de baja energía. Estas resonancias están bien identificadas; corresponden a hadrones, partículas compuestas por quarks y cuya naturaleza es similar a la de los nucleones (bariones).

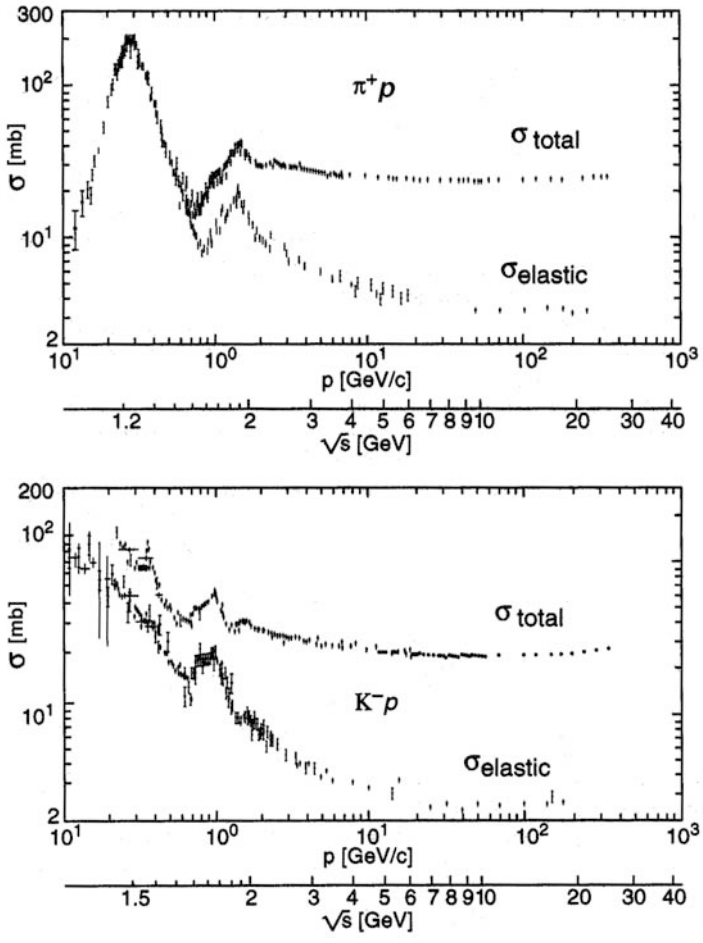


Figura 3.5: Secciones eficaces total y elástica para las colisiones $\pi^+ + p$ y $K^- + p$. $\sqrt{s}$ es la energía total en el cdm.

3.2.2 Secciones eficaces de interacción débil

La interacción débil es unos 11 órdenes de magnitud más pequeña que la interacción fuerte, a las energías del GeV. Como ejemplo de esta interacción se ha seleccionado las interacciones de neutrinos tipo corriente cargada: Un haz de neutrinos incide en blancos nucleares y se detecta la producción de un muón en el estado final: $\nu_\mu + N \rightarrow N + \mu^-$ mientras que si el haz es de antineutrinos entonces se produce un μ^+ en el estado final. En la figura 3.6 se puede observar que las secciones eficaces de colisión de neutrinos y de antineutrinos con los nucleones son constantes con la energía en un amplio rango. En efecto, según la teoría V-A la sección eficaz es

$$\boxed{\sigma_{\nu_\mu} = \frac{G^2}{\pi(\hbar c)^4} s} \tag{3.9}$$

con $s = 2m_e c^2 E_\nu$, la energía al cuadrado en el centro de masas. De estos resultados se desprende que los nucleones están compuestos por entes puntuales (los partones), con los que el neutrino colisiona elásticamente. En efecto, el comportamiento de las secciones eficaces neutrino nucleón siguen la misma ley que las secciones eficaces elásticas entre constituyentes como se verá en el tema 10.

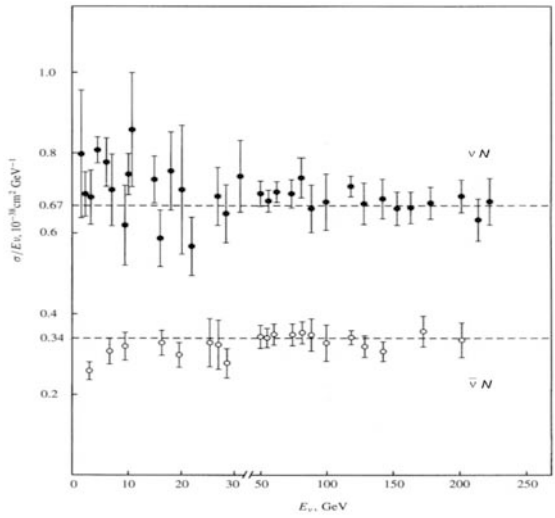


Figura 3.6: Sección eficaz total de interacción $\nu_\mu N$ y $\overline{\nu}_\mu N$, obtenida gracias a los haces de neutrinos en el CERN, Fermilab y Serpukhov. Se observa que las medidas de σ_ν son constantes con la energía, lo que confirma que la naturaleza de la interacción es puntual.

La teoría V-A también predice que las interacciones de antineutrinos son un factor 3 más pequeñas que las del neutrino. Puede comprobarse en la figura 3.6, que experimentalmente se cumple la predicción.

3.2.3 Secciones eficaces de interacción electromagnética

La disponibilidad de haces secundarios de fotones ha permitido medir las secciones eficaces de fotoproducción de hadrones (o sea la producción de hadrones tras el choque de un fotón contra un protón o un deuterón). Un haz etiquetado de fotones se consigue a partir de un haz de electrones extraido de un acelerador (véase figura 3.7). El haz se colima mediante colimadores y se selecciona en momento con imanes dipolares. Al pasar por un radiador (normalmente un blanco de plomo), los electrones emiten fotones por *bremsstrahlung* que inciden en el experimento. El electrón difundido se detecta en los contadores de etiquetado (*tagger*): conociendo el contador, se conoce la cinemática del proceso y por lo tanto el momento del fotón. Este es el principio utilizado en los experimentos WA4 y NA14 del CERN.

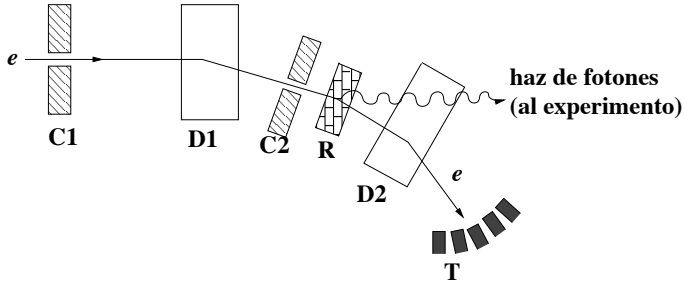


Figura 3.7: Elementos de un haz secundario de fotones, con sistema de etiquetado; (D1,D2) imanes dipolares; (C1,C2) colimadores; (R) material radiador; (T) detectores de electrones para etiquetar los fotones.

La figura 3.8 presenta las secciones eficaces fotón protón y fotón deuterón. Son práctimente constantes (unos 100 μb para $\gamma + p$ hasta energías de unos 20 GeV, es decir dos órdenes de magnitud inferior que la interacción entre hadrones. Esta es una propiedad del fotón que recuerda que, en cierta manera, se acopla como un bosón vectorial y tiene una probabilidad de comportarse como un hadrón (bosón con espín paridad 1^-).

Medidas más recientes conciernen resultados de la aniquilación en colisionadores e^+e^- o $p\overline{p}$. Los primeros han servido para comprobar la teoría QCD (intercambio de fotón) y la teoría electrodébil (intercambio de Z). Así la figura 3.9 muestra los resultados obtenidos con el colisionador PETRA de DESY (Hamburgo) en los años 1980, y se observa el buen acuerdo con la predicción teórica ($\sigma = 4\pi\alpha^2/(3s)$).

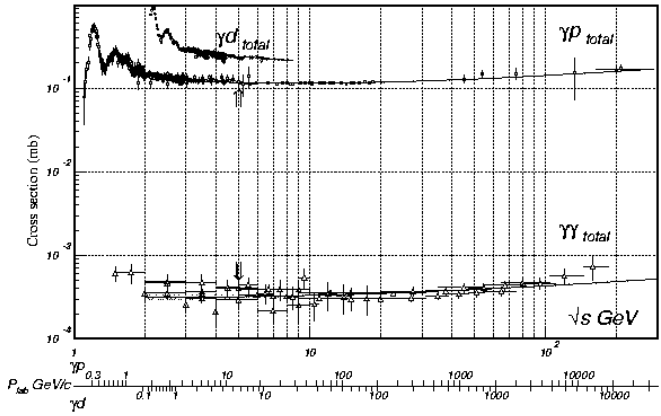


Figura 3.8: Curva de sección eficaz del proceso $\gamma + \gamma$, así como de la fotoproducción de hadrones sobre protón $\gamma + p$ y sobre deuterio $\gamma + d$ en función de la energía del fotón, en GeV.

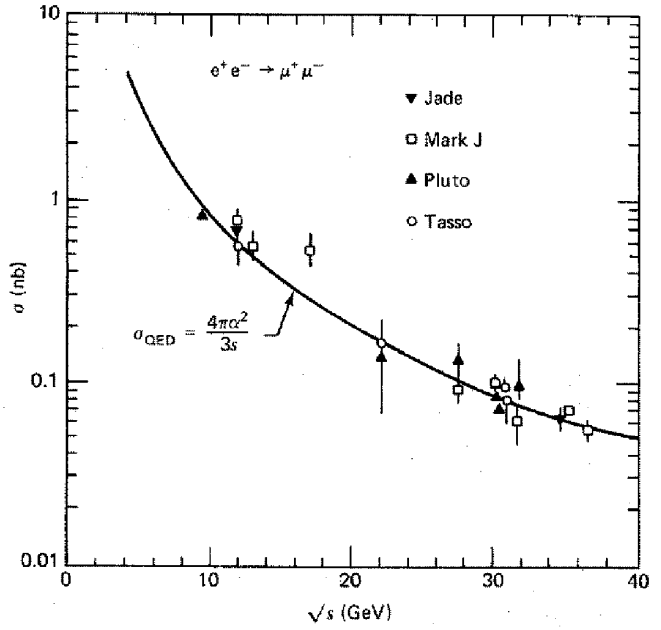


Figura 3.9: Sección eficaz de la aniquilación $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ obtenida en el colisionador PETRA de DESY (Hamburgo). $\sqrt{s}$ es la energía total en el cdm, que en el caso de colisionadores equivale a $2E$, siendo E la energía del haz.

3.3 Interacción de partículas cargadas con la materia

El estudio de las interacciones de las partículas con la materia es un capítulo fundamental de la física nuclear y de partículas (también llamada física subnuclear) que proporciona el método más corriente de obtener información relativa a los núcleos que componen la materia (tamaño, forma, niveles energéticos, etc.) y además permite profundizar en las propiedades de las propias partículas.

Cualquier experimento en física nuclear o subnuclear, generalmente tiene por objetivo el estudio de reacciones entre partículas o núcleos y en otros casos estudia la desintegración de las partículas o núcleos. Se comprende así que, en todo experimento, existen tres componentes: una fuente de partículas, un blanco material (del que se conoce su composición atómica y nuclear) y un detector de partículas.

Se suelen considerar tres fuentes de partículas (o de radiación):

- radiactividad (natural o artificial),
- radiación cósmica (natural),
- aceleradores de partículas (artificial).

El funcionamiento de los detectores de partículas explota generalmente fenómenos electromagnéticos; es decir, está basado en el conocimiento de la interacción electromagnética de las partículas cargadas con el material (gas, líquido o sólido) que compone el propio detector. Uno de los fenómenos más frecuentes es el de la ionización, en el que la energía perdida por la partícula es utilizada para arrancar electrones de los átomos (ionizar) de la materia.

La interacción electromagnética es la más probable de las interacciones, aunque no es la más intensa. Su alcance es infinito y la sección eficaz de ionización es del orden de 10^{-16} a 10^{-17} cm^2, o sea ¡entre 10^7 y 10^8 barn![1] Para el estándar de secciones eficaces nucleares estos valores son gigantescos.

Los fenómenos producidos por el paso de partículas cargadas a través de la materia suelen clasificarse según la masa del proyectil en:

partículas cargadas masivas
- choques con e^-: pérdida de energía
- choques con núcleos: cambio de dirección

partículas cargadas ligeras ($e^{\pm}$)
- choques con e^-: pérdida de energía
- choques con núcleos: cambio de dirección
- *bremsstrahlung*: emisión de radiación gamma

Las partículas neutras no tienen interacción electromagnética (exceptuando el fotón, que aunque tiene carga nula, es el mediador del campo electromagnético con lo que tiene interacción electromagnética) y, por lo tanto, puede

[1] barn = 10^{-24} cm^2.

suceder que atraviesen un detector sin dejar ninguna señal observable. En particular no ionizan. La detección de las partículas neutras se realiza indirectamente gracias a que sufren otros tipos de interacción que dan lugar en el estado final a la aparición de partículas cargadas.

He aquí tres casos frecuentes ilustrados con ejemplos del tipo de interacción de partículas neutras:

fotones (γ)	interacción electromagnética, a través de los fenómenos: efecto fotoeléctrico, efecto Compton, creación de pares
neutrones (n)	interacción fuerte, por ejemplo $n + p \rightarrow n + p$ (elástica)
neutrinos (ν_e, ν_μ, ν_τ)	interacción débil, ejemplo: $\nu_e + n \rightarrow e^- + p$

que producen secundarios cargados, y que una vez detectados, permiten calcular las magnitudes físicas de las partículas neutras.

El objetivo de este capítulo será pues abordar de una manera completa los fenómenos más frecuentes que se producen cuando las partículas atraviesan la materia, de forma que puedan utilizarse las señales inducidas en los detectores.

La electrodinámica cuántica (abreviadamente QED) es la teoría que describe la interacción electromagnética entre partículas cargadas. En ella, la magnitud física que entra en juego es la carga eléctrica. La interacción se describe mediante el intercambio de fotones, partícula $gauge$ de la propia teoría QED, invariante $gauge$. Será la interacción entre la carga de la partícula y los átomos del detector (electrones o núcleos) la que dará una señal observable. La forma de la señal dependerá del tipo de detector que se utilice.

3.4 Interacción partícula-átomo

La interacción partícula-átomo puede visualizarse gracias al parámetro de impacto, b, que corresponde cuánticamente al momento transferido en la colisión. Esta magnitud se comparará a r_e, el radio clásico del electrón que ya ha sido definido anteriormente en la sección 3.2. Si $b \gg r_e$ entonces es muy probable que el átomo quede excitado. En el caso en que $b \approx r_e$ se produce un choque de la partícula con el e^-; el e^- puede ser arrancado y hay ionización. Por último, si b$< r_e$ se produce una difusión culombiana; es decir, una interacción con la carga del núcleo.

Ya se ha visto anteriormente que la interacción de una partícula cargada con los átomos dará lugar a dos fenómenos distintos:

- pérdida de energía por ionización (colisiones con e^-), o
- cambio de dirección (difusiones elásticas con núcleos).

El primero de estos fenómenos viene descrito por la fórmula de Bethe-Bloch, asociándose prácticamente a los choques (colisiones) con los electrones del medio y el segundo por la ecuación de Rutherford, que explica los choques (cambios de dirección) con los núcleos. Se verá a continuación la pérdida de energía debida a la ionización del medio atravesado por la partícula.

3.5 La fórmula de Bethe-Bloch

Una partícula cargada, moderadamente relativista, pierde energía en la materia principalmente por ionización. Para ilustrar el fenómeno de pérdida de energía es muy apropiado seguir el cálculo clásico de Bohr.

Sea una partícula masiva, con masa $M > m_e$, velocidad v y carga $Z_1 e$. Incide sobre un átomo de un material (cuyo número atómico del núcleo es Z_2) y el parámetro de impacto es b. Se supondrá de momento que el choque tiene lugar sobre un electrón. La energía transferida en el choque es

$$\Delta E = \frac{p^2}{2m_e}$$

con p el momento transferido $p = \int F\,dt = e\int E_\perp dt = e\int E_\perp \frac{dx}{v}$, que, aplicando el teorema de Gauss sobre el cilindro que define el electrón

$$\int E_\perp 2\pi b dx = 4\pi Z_1 e$$

queda

$$\boxed{\Delta E(b) = \frac{2Z_1^2 e^4}{m_e v^2 b^2}} \tag{3.10}$$

Sólo interviene la componente del campo eléctrico $E_\perp$ perpendicular a la trayectoria de la partícula. Al sumar sobre todos los electrones en el volumen $dV = 2\pi b\ db\ dx$:

$$-dE(b) = \Delta E(b) n_e dV = \frac{4\pi Z_1^2 e^4}{m_e v^2} n_e \frac{db}{b} dx$$

donde $n_e = Z_2 \frac{\rho \mathcal{N}_\mathcal{A}}{A}$ es el número de electrones por unidad de volumen ($\mathcal{N}_\mathcal{A}$ es el número de Avogadro, ρ la densidad y A es el peso atómico del material), con lo que queda

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi Z_1^2 e^4}{m_e v^2} n_e \ln \frac{b_{\max}}{b_{min}}$$

habiendo realizado la integral sobre el parámetro de impacto entre los valores que tienen sentido físico:[2]

[2] La definición y significado de las variables relativistas β y γ puede verse en (7.5) y siguientes.

- $b_{min} = \frac{Z_1 e^2}{\gamma m_e v^2}$, dado por el valor máximo de la energía transferida en un choque frontal, $\Delta E_{\max} = \frac{1}{2} m_e (2v)^2 \approx 2m(\gamma\beta c)^2$, y
- $b_{\max} = \frac{\gamma v}{\overline{\nu}}$, que se obtiene al suponer el tiempo de interacción $t \sim \frac{b}{\gamma v}$ similar al de la frecuencia orbital media de los electrones, $\tau \sim \frac{1}{\overline{\nu}}$, quedando finalmente

$$\boxed{-\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi Z_1^2 e^4}{m_e v^2} n_e \ln \frac{\gamma^2 m v^3}{Z_1 e^2 \overline{\nu}}} \tag{3.11}$$

Esta es la llamada fórmula de Bohr. En las fórmulas anteriores, se ha introducido el factor γ relativista para corregir el cálculo clásico.

Si la velocidad de la partícula incidente es mayor que la de los electrones orbitales ($\sim \alpha c$), y no se trata de un electrón con lo que no existe radiación de frenado (*bremsstrahlung*), entonces la pérdida específica media de energía, al realizar un cálculo relativista completo, viene dada por

$$\boxed{-\frac{dE}{dx} = D_e n_e \left(\frac{Z_1}{\beta}\right)^2 \left[\ln \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{I} - \beta^2\right]} \tag{3.12}$$

que es la fórmula de Bethe-Bloch, y es válida para energías > 100 keV. La representacion grafica de la fórmula de Bethe-Bloch puede verse en la figura 3.10.

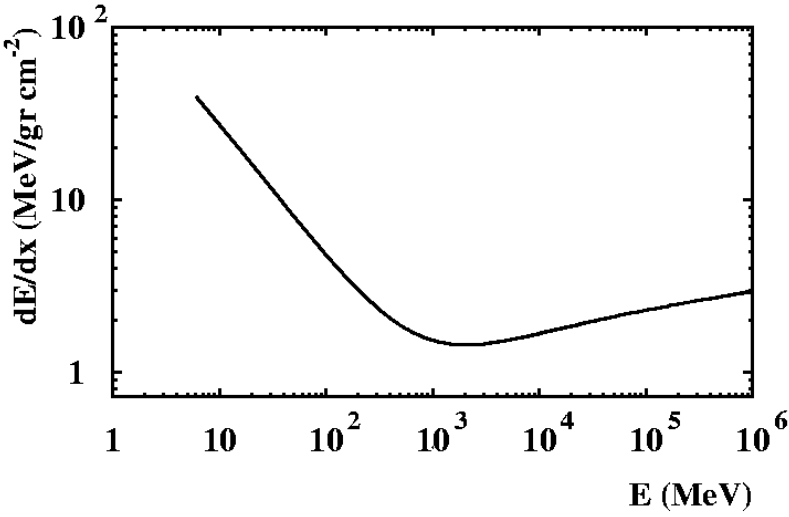


Figura 3.10: La fórmula de Bethe-Bloch (calculada para el $^{63}_{29}Cu$).

La constante $D_e = 4\pi r_e^2 m_e c^2 = 5{,}0989 \times 10^{-25}$ MeV$\cdot$ cm^2; I es el potencial de excitación del material, llamado también potencial medio de excitación. Se ha medido experimentalmente y en función del número atómico del material Z_2,

$$I = 12\ Z_2 + 7 \qquad \text{[eV]} \quad (\ Z_2 < 13)$$

$$I = 9,76\ Z_2 + \frac{58,8}{Z_2^{0,19}} \qquad \text{[eV]} \quad (\ Z_2 \geq 13)$$

También se puede aproximar por $I \sim 16 \times Z_2^{0,9}$ (eV).

Ejemplos: $I_{\text{aire}} = 86$ eV, $I_{Al} = 166$ eV. Puede verse en la tabla 3.2 el potencial medio de excitación I para varios elementos.

La pérdida específica de energía se suele denominar también poder frenante y, como se verá inmediatamente, se acostumbra a hablar de longitud reducida $d\epsilon = \rho dx$, con lo que la longitud se mide en gr$\cdot$ cm^{-2}. En la fórmula de Bethe-Bloch (3.12) se observan claramente las siguientes propiedades:

1. Es independiente de la masa, M, de la partícula incidente.
2. Es proporcional al cuadrado de la carga, Z_1^2, de la partícula incidente.
3. A baja energía varía con la velocidad como $1/v^2$.
4. A gran energía (γ = E/M) varía como $\ln \gamma^2$.
5. La dependencia con el medio de la pérdida de energía másica $\frac{1}{\rho}\frac{dE}{dx}$ es pequeña.
6. Tiene un mínimo $\frac{dE}{d\epsilon} \approx 2$ MeV/(gr $\cdot$ cm^{-2}) para $\gamma\beta \sim 3$ $(\beta \approx 0,96)$.

Para colisiones de partículas ultrarrelativistas con medios densos es necesario corregir la fórmula de Bethe, añadiendo unos términos empíricos cuya magnitud es pequeña. El corchete de la ecuación (3.12) quedaría:

$$\left[\ln \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{I} - \beta^2 - \frac{\delta}{2} - \frac{C}{Z_2}\right]$$

en donde δ representa el efecto densidad que para partículas muy energéticas se aproxima a $2 \ln \gamma$ más una constante y C representa la corrección de capas, importante cuando la velocidad de la partícula es $\sim\ \alpha c$, o sea, del orden de la velocidad orbital de los electrones atómicos. La fórmula de Bethe es válida sólo hasta unos varios %. Estas correcciones relativistas y cuánticas reducen el aumento de dE/dx con la energía, por lo que tiene sentido hablar de partículas en el mínimo de ionización y partículas mínimo ionizantes (mip). Así, después del mínimo aparece el llamado *plateau* de Fermi. Para cálculos muy refinados debería consultarse la literatura especializada.

Ejemplos: el mínimo del poder frenante dE/dx es 1,82 MeV/(gr$\cdot$ cm^{-2}) para el aire y 1,13 MeV/(gr$\cdot$ cm^{-2}) para el Pb. El aire de la atmósfera terrestre equivale a 1000 gr$\cdot$ cm^{-2}, con lo que sólo protones cósmicos con una energía ≥ 2 GeV podrán alcanzar el nivel del mar (sólo considerando ionización). A baja energía la pérdida de energía es grande; un protón de 10 MeV se para completamente en 0,25 mm de Cu.

Conviene ahora comparar la pérdida de energía por choques con electrones y con núcleos de masa M_N:

$$\frac{Z_2 E_e}{E_N} = \frac{Z_2/m_e}{Z_2^2/(2Z_2 m_p)} \approx 4000 \tag{3.13}$$

ya que $M_N \sim 2Z_2 m_p$ y la dependencia con la carga en el caso del núcleo es Z_2^2. La pérdida de energía es debida a los choques con los electrones del medio.

3.5.1 Consecuencias de la fórmula de Bethe-Bloch

Ley de mezclas

Para una mezcla de elementos con peso atómico A_i, si a_i es el el número de átomos del elemento i en la molécula de la mezcla, entonces $f_i = a_i \frac{A_i}{A_m}$ es la fracción de peso molar de cada uno de ellos y $A_m = \sum a_i A_i$, se cumple la regla de Bragg:

$$\frac{dE}{d\epsilon} = \sum f_i \left|\frac{dE}{d\epsilon}\right|_i$$

donde se observa que se utiliza el poder frenante másico $\frac{dE}{d\epsilon}$, prácticamente independiente del material, y que está relacionado con el poder frenante lineal $\frac{dE}{dx}$ a través de $\epsilon = \rho x$.

Relación alcance-energía

La ionización provoca una pérdida gradual de la energía de las partículas. Es un fenómeno estadístico ya que el número de choques fluctúa de un evento al otro.

Se define el alcance medio R para partículas de energía E_0:

$$R = \int_0^{E_0} \frac{1}{(dE/dx)} dE$$

De hecho se utiliza una fórmula semiempírica:

$$R(T_0) = R(T_{min}) + \int_{T_{min}}^{T_0} \frac{1}{(dE/dx)} dE$$

ya que la fórmula de Bethe es válida sólo a partir de un valor T_{min} de la energía.

Si se mide la curva de transmisión experimentalmente, se observa que la curva pasa suavemente de 1 a 0 (véase figura 3.11). De hecho el espectro de alcances para una energía determinada T_0, sigue una distribución gaussiana. Es lo que se denomina *straggling*, y está directamente relacionado con el *straggling* de energía debido a que la fórmula de Bethe estima un valor medio, válido estadísticamente;

$$< E - \overline{E} >^2 = \left(\frac{dE}{dx}\right)^2 < R - \overline{R} >^2$$

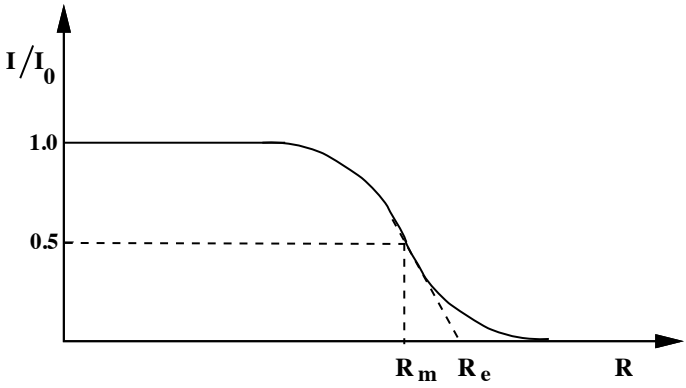


Figura 3.11: La curva de transmisión, donde se observa el alcance medio R_m y el alcance extrapolado R_e.

Ejemplos de alcances

Se espera que $R \propto T^n$ con $n \approx 2$ ya que $dE/dx \sim \beta^{-2} \sim T^{-1}$, siendo T la energía cinética. Existen varias expresiones fenomenológicas para el alcance,

- para protones y partículas α de baja energía en el aire (si STP, $\rho_{\text{aire}} = 1,293 \times 10^{-3}$ gr$\cdot$ cm^{-3}):

  $$R(m) = (T/T_0)^{1,8}$$

  con $T_0(p) = 9,3$ MeV y $T_0(\alpha) = 37,2$ MeV.

- para partículas α tales que T_α <200 MeV)

  $$R_\alpha(\text{cm}) = 0,318\ T_\alpha^{3/2} \qquad [T \text{ en MeV}]$$

- para electrones en materiales (Al,Cu,...),

  $$R_e(\text{gr}\cdot\text{cm}^{-2}) \approx 0,5\ T_e - 0,1 \qquad [T \text{ en MeV}]$$

En general las relaciones alcance-energía han sido muy utilizadas para calcular la energía de las partículas. También son importantes para calcular el tamaño de los blindajes contra la radiación.

La curva de Bragg

La curva de Bragg da la ionización en función de la profundidad. Es de gran interés médico: la ionización aumenta hacia el final de la trayectoria de la partícula (v pequeña), con lo que sirve para tratar tumores, localizados, sin dañar excesivamente el resto del cuerpo.

También se conoce como curva de ionización específica; o sea, el número de pares de iones producidos en función de la profundidad (véase la figura 3.12). Sea w la energía necesaria para crear un par $e^- X^+$ (en el aire, $w \sim 35,5$ eV, y en gases $w \approx 25 - 50$ eV), entonces, si ΔE es la energía total perdida, el número total de pares $N_\pm = \frac{\Delta E}{w}$.

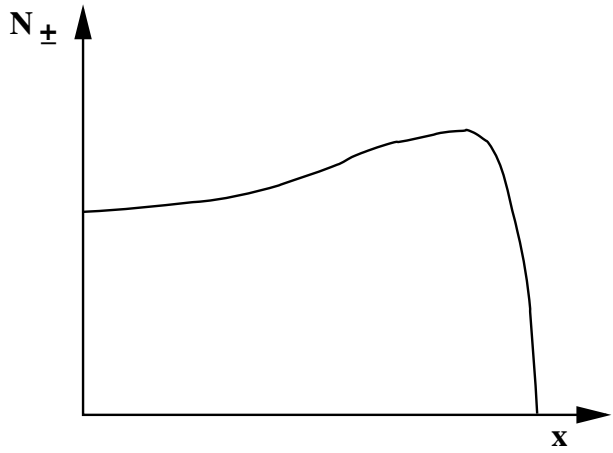


Figura 3.12: La curva de Bragg.

La ley de Bragg-Kleeman

La ley de Bragg permite relacionar alcances entre distintos medios, para una misma partícula:

$$\boxed{R\frac{\rho}{\sqrt{A}} = \text{cte}} \tag{3.14}$$

con lo que conocido para un medio como por ejemplo el aire ($\rho_{\text{aire}} = 1,226 \times 10^{-3}$ gr$\cdot$ cm^{-3} y $\sqrt{A_{\text{aire}}} = 3,82$), se tiene para otro material

$$R_1(\text{cm}) \approx 3,2 \times 10^{-4} \frac{\sqrt{A_1}}{\rho_1} R_{\text{aire}}(\text{cm})$$

expresión que reproduce los resultados con un error inferior al 15 %.

Reglas de escala

A partir de la dependencia $dE/dx = Z_1^2 f(\beta)$ pueden demostrarse fácilmente las siguientes relaciones de escala

$$\frac{dT_b}{dx}(T_b) = \left(\frac{Z_b}{Z_a}\right)^2 \frac{dT_a}{dx}(T_b \frac{M_a}{M_b})$$

$$R_b(M_b, Z_b, p_b) = \frac{M_b}{M_a}\left(\frac{Z_a}{Z_b}\right)^2 R_a(M_a, Z_a, p_b \frac{M_a}{M_b})$$

3.5.2 Difusión múltiple o culombiana. Fórmula de Rutherford

Según la fórmula de Bethe, la dependencia de la pérdida de energía varía como m^{-1} , siendo m la masa del blanco. La pérdida de energía por ionización debida a choques con núcleos es despreciable (véase (3.13)) comparada a la de los choques con los electrones.

Por el contrario, la difusión con los núcleos puede introducir cambios importantes en la trayectoria de la partícula incidente.

La fórmula de Rutherford es

$$\boxed{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_R = \frac{1}{4}\left(Z_1 Z_2 r_e \frac{m_e c}{\beta p}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\frac{\theta}{2})}} \tag{3.15}$$

válida para partículas de espín 0. En el caso de partículas de espín 1/2, la sección eficaz viene dada por la fórmula de Mott,

$$\boxed{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_M = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_R (1 - \beta^2 \sin^2(\frac{\theta}{2}))} \tag{3.16}$$

Además de probar la existencia del núcleo en el famoso experimento de Geiger y Marsden, sirvió para determinar la carga de los núcleos. En 1920 Chadwick la utilizó para medir $Z_{Cu} = 29,3 \pm 0,45$ y $Z_{Pt} = 77,4 \pm 0,77$.

Se puede observar que según la fórmula de Rutherford:

$$\left(\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega}\right)_R = \frac{1}{4}\left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{pv}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\frac{\theta}{2})}$$

la probabilidad de difusión es mayor para ángulos pequeños, pero pueden existir difusiones a gran ángulo con los núcleos ya que la sección eficaz es proporcional a Z_2^2 , mientras que para los electrones es proporcional a Z_2 , puesto que cada uno interviene con carga 1.

A este cambio de trayectoria dominada por difusiones con los núcleos se denomina difusión múltiple o también difusión culombiana.

La difusión culombiana es un fenómeno estadístico. Para pequeños ángulos, la distribución de probabilidades del ángulo de difusión sigue la ley de Gauss (que se estudia en la sección 5.3.4),

$$P(\Theta)d\Theta = \frac{1}{\Theta_0\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\Theta^2_{plano}}{2\Theta^2_0}} d\Theta$$

El valor esperado de Θ^2_s vendrá dado por

$$\overline{\Theta}^2_s = Ln_a \int \Theta^2 \frac{d\sigma(\Theta)}{d\Omega_R} d\Omega$$

$$\overline{\Theta}^2_s = 8\pi r^2_e Ln_a Z^2_1 Z^2_2 (\frac{mc}{\beta p})^2 \ln \frac{2}{\alpha^2 \sqrt[3]{AZ_2}}$$

que aproximadamente da

$$\overline{\Theta}^2_s = \frac{4\pi}{\alpha} Z^2_1 (\frac{mc}{\beta p})^2 \frac{L}{X_0}$$

En el cálculo del ángulo medio de difusión múltiple interviene X_0, un parámetro llamado longitud de radiación, que depende del material Z_2 y cuyo valor es,

$$\boxed{\frac{1}{X_0} = 4\sigma_0 n_a \ln \frac{183}{\sqrt[3]{Z_2}}} \qquad (3.17)$$

siendo $\sigma_0 = \alpha r^2_e Z^2_2$. Será estudiado en el próximo apartado.

Definiendo $E_s = \sqrt{\frac{4\pi}{\alpha}} mc^2$ = 21,2 MeV, se obtiene la ecuación de Rossi-Greisen

$$\overline{\Theta}_s = \frac{E_s}{pv} Z_1 \sqrt{\frac{L}{X_0}}$$

3.6 Interacción de e^+ y e^- con la materia

La pequeñez de la masa de los electrones (m_e= 0,511 MeV/c^2) introduce ciertas diferencias en la pérdida de energía respecto a las partículas de mayor masa (piones, protones, etc.). Hay que tener en cuenta también que son partículas idénticas a los electrones del material. Lo más notable es que en presencia de campos eléctricos intensos (la carga nuclear), los $e^{\pm}$ pueden emitir fotones (radiación denominada *bremsstrahlung*, del alemán: radiación de frenado). Este es el mismo fenómeno que sucede en los aceleradores de electrones con trayectoria curvada (los sincrotrones) en los que existe emisión de radiación *sincrotrón*.

La expresión de la pérdida de energía será pues,

$$\left(\frac{dE}{dx}\right) = \left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{col}} + \left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{rad}}$$

en donde aparecen dos términos, uno para cada tipo de pérdida de energía.

3.6.1 Pérdida de energía de $e^{\pm}$ por colisión

En el límite relativista, la pérdida de energía de electrones y positrones por unidad de recorrido en un medio homogéneo debida a las colisiones con los electrones del medio es muy similar a la pérdida de energía de partículas de masa elevada M$> m_e$

$$\boxed{\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{col}} = \frac{1}{2} D_e n_e \left(\frac{1}{\beta^2}\right) \left[2 \ln \frac{2 m_e c^2}{I} + 3 \ln \gamma - 1,95\right]} \qquad (3.18)$$

3.6.2 Radiación de frenado. Longitud de Radiación $\mathbf{X_0}$

La radiación de frenado (*bremsstrahlung*) es el mecanismo dominante de pérdida de energía de los electrones y positrones a alta energía. En presencia de un campo eléctrico intenso los electrones son frenados y emiten fotones. Este es el origen del continuo de los espectros de rayos X o de la radiación sincrotrón en trayectorias curvas. El electrón de energía E_i emite un fotón de energía E_γ tal que $E_\gamma = E_i - E_f$. El ángulo de emisión es independiente de E_γ y vale $\theta_\gamma \sim \frac{m_e c^2}{E_i}$.

El cálculo semiclásico de la sección eficaz de *bremsstrahlung* para partículas relativistas da:[3]

$$\frac{d\sigma}{dE_\gamma} \approx 5 \frac{e^2}{\hbar c} Z_1^4 Z_2^2 \left(\frac{m}{M \beta_1}\right)^2 \frac{r_e^2}{E_\gamma} \ln \frac{M \beta_1^2 c^2 \gamma^2}{E_\gamma}$$

es decir, es $\propto (1/M)^2$, por lo que sólo es importante para $e^{\pm}$. También se observa que la dependencia con el medio es según Z_2^2.

Clásicamente se conoce la potencia radiada por una carga con aceleración a:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} a^2$$

El cálculo de la sección eficaz de este proceso, según la teoría QED, se realiza teniendo en cuenta el apantallamiento de la carga nuclear que realizan los electrones del átomo, lo que se caracteriza por una variable

$$\xi = \frac{100 m c^2 E_\gamma}{\sqrt[3]{Z_2} E_i E_f}$$

y donde $\xi = 0$ representa apantallado total y $\xi >> 1$, sin apantallamiento. Para energías relativistas (>MeV), la sección eficaz de *bremsstrahlung* (según Koch y Motz[4] es,

$$\frac{d\sigma}{dE_\gamma} = \frac{4\sigma_0}{E_\gamma} \left\{ \left[\left(1+\epsilon^2\right) \left[\frac{\phi_1(\xi)}{4} - \frac{1}{3} \ln Z_2 - f(Z_2) \right] - \frac{2}{3} \epsilon \left[\frac{\phi_2(\xi)}{4} - \frac{1}{3} \ln Z_2 - f(Z_2) \right] \right] \right\}$$

[3] J. Jackson, *Classical Electrodynamics*, New York, Wiley, 1962.
[4] H. W. Koch, J. W. Motz, *Rev. Mod. Phys.*, **4** (1959) 920.

con $\epsilon = \frac{E_f}{E_i}$, $\sigma_0 = \alpha Z_2^2 r_e^2$, y en donde ϕ_i son dos funciones de apantallamiento que se calculan en el marco del modelo de Thomas-Fermi y $f(Z_2)$ es una pequeña corrección culombiana a la aproximación de Born. Para más detalles consúltese el texto de Leo [10] en la bibliografía.

En el límite relativista ($E_i >> mc^2$) y para apantallamiento total ($\xi = 0$),

$$\frac{d\sigma}{dE_\gamma} = \frac{4\sigma_0}{E_\gamma}\left[\left(1+\epsilon^2-\frac{2}{3}\epsilon\right)\left[\ln\frac{183}{\sqrt[3]{Z_2}} - f(Z_2)\right] + \frac{\epsilon}{9}\right]$$

La pérdida de energía por radiación queda entonces,

$$\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{\text{rad}} = \int_0^{E_\gamma^{\max}} E_\gamma \cdot n_a \frac{d\sigma}{dE_\gamma} dE_\gamma$$

siendo $E_\gamma^{\max} = E_i - mc^2$. Se puede extraer E_i quedando

$$\boxed{\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{\text{rad}} = n_a E_i \sigma_{\text{rad}}} \tag{3.19}$$

donde

$$\sigma_{\text{rad}} = \frac{1}{E_i}\int_0^{E_\gamma^{\max}} E_\gamma \frac{d\sigma}{dE_\gamma} dE_\gamma$$

que en el caso de apantallamiento completo y en el límite relativista resulta ser

$$\sigma_{\text{rad}} = 4\sigma_0\left[\ln(183 Z_2^{-1/3}) + 1/18 - f(Z_2)\right] \tag{3.20}$$

que es independiente de E_i. También puede incluirse el *bremsstrahlung* debido a la interacción con los e^- del átomo, para lo que debe cambiarse $Z_2^2 \rightarrow Z_2(Z_2+1)$.

El resultado más importante es, pues, que la pérdida de energía por radiación aumenta linealmente con E_i. Esta es la pérdida de energía dominante de electrones y positrones a alta energía.

Longitud de radiación X_0

A alta energía, dado que σ_{rad} es prácticamente constante, se puede definir un recorrido libre medio de radiación

$$\boxed{\frac{1}{X_0} = n_a \sigma_{\text{rad}}} \tag{3.21}$$

que sólo depende del medio y que se denomina longitud de radiación cuyo significado físico se puede comprender al integrar la expresión $\frac{dE}{E} = \frac{dx}{X_0}$, resultando

$$\boxed{E = E_i e^{-x/X_0}} \tag{3.22}$$

Para calcular X_0 se utiliza la expresión (3.21), sustituyendo el valor de (3.20). Se prueba que

$$X_0 \sim \frac{716\,A}{Z_2(Z_2+1)\ln(287/\sqrt{Z_2})}\ \ [\text{gr}\cdot\text{cm}^{-2}].$$

Por ejemplo $X_0(Pb) = 0,56$ cm, $X_0(\text{Aire}) = 300,5$ m y $X_0(NaI) = 2,59$ cm. En la tabla 3.2 pueden encontrarse valores para otros elementos.

TABLA 3.2: Propiedades electromagnéticas de varios elementos. n_a y n_e dan el número de átomos y electrones por unidad de volumen ($\times 10^{23}/\text{cm}^3$), respectivamente; I es el potencial medio de excitación y L_0 y X_0 representan la longitud de radiación del elemento. La densidad, ρ, corresponde al estado sólido o líquido en punto de ebullición; en el caso del C es para grafito puro.

	Z	A	n_a	n_e	I (eV)	L_0 (cm)	X_0 (g/cm^2)	ρ (g/cm^3)
H_2	1	1,01	0,423	0,423	21,8	865	61,28	0,0708
He	2	4,00	0,188	0,376	41,8	757	94,32	0,125
Li	3	6,94	0,463	1,39	40,0	155	82,76	0,534
Be	4	9,01	1,230	4,94	63,7	35,3	65,19	1,848
B	5	10,81	1,320	6,60	76	22,2	52,69	2,37
C	6	12,01	1,146	6,82	78	18,8	42,70	2,265
N_2	7	14,01	0,347	2,43	85,1	47,0	37,99	0,808
O_2	8	16,00	0,429	3,43	98,3	30,0	34,24	1,14
Ne	10	20,18	0,358	3,58	137	24,0	28,94	1,207
Al	13	26,98	0,603	7,84	166	8,89	24,01	2,70
Si	14	28,09	0,500	6,99	173	9,36	21,82	2,33
Ar	18	39,95	0,211	3,80	188	14,0	19,55	1,40
Fe	26	55,85	0,849	22,1	286	1,76	13,84	7,87
Cu	29	63,55	0,845	24,6	322	1,43	12,86	8,96
Zn	30	65,39	0,658	19,6	330	1,75	12,43	7,14
Kr	36	83,80	0,155	5,59	352	5,26	11,37	2,16
Ag	47	107,87	0,586	27,6	470	0,85	8,97	10,5
Sn	50	118,69	0,371	18,5	488	1,21	8,82	7,31
W	74	183,85	0,632	46,8	727	0,35	6,76	19,3
Pt	78	195,08	0,662	51,5	790	0,305	6,54	21,45
Au	79	196,97	0,577	45,6	790	0,34	6,46	18,88
Pb	82	207,19	0,330	27,0	823	0,56	6,37	11,35
U	92	238,03	0,479	44,1	890	0,32	6,00	18,95

Energía crítica

Es aquélla en la que las pérdidas por ionización igualan a las de radiación. O sea que, como

$$\frac{(dE/dx)_{\text{col}}}{(dE/dx)_{\text{rad}}} = \frac{1600\, mc^2}{Z_2 E_i}$$

se igualan para la energía crítica:

$$\boxed{E_c = \frac{800}{Z_2}\ \text{MeV}} \tag{3.23}$$

dando, por ejemplo, para el Pb un valor de unos 10 MeV.

El alcance para $e^{\pm}$ es mucho más impreciso que para las partículas masivas. Ello es debido a la difusión múltiple que también es importante con los electrones atómicos, dando lugar a trayectorias más imprecisas.

Se puede hablar de la absorción de electrones β, que es consecuencia de la forma del espectro de desintegración β. La ley de atenuación es la típica exponencial: $I = I_0 e^{-\mu_m x}$. Se da también la circunstancia que la medida del coeficiente de absorción μ_m permite determinar el *end point* del espectro β; o sea, que estima la masa del neutrino. Se encuentra un valor empírico para el coeficiente

$$\mu_m = \frac{17}{E_m^{1,14}}\ \ [\text{cm}^2\ \text{gr}^{-1}]$$

La tabla 3.2 muestra una relación de varias propiedades electromagnéticas de algunos elementos.

3.6.3 Aniquilación de positrones. El orto- y para-positronio

Los positrones de gran energía tienen pérdidas por ionización y radiación igual que los electrones. A muy baja velocidad, el e^+ y el e^- forman el $positronio$, un estado ligado muy parecido al átomo de hidrógeno, pero sus estados ligados son dos veces menos espaciados que los del H:

$$\boxed{E = -\frac{\mu c^2 \alpha^2}{2n^2}} \tag{3.24}$$

es decir, $E \approx -\frac{6,8}{n^2}$ eV, ya que la masa reducida del positronio es $\mu = \frac{mM}{m+M} = \frac{m}{2}$, la mitad que la del átomo de H.

El positronio se desintegra con una probabilidad igual a la de la superposición de las funciones de onda. Este fenómeno se denomina $aniquilación$. Definiendo $\gamma = \frac{E_+}{mc^2}$, siendo E_+ la energía del positrón, la sección eficaz de aniquilación en función de γ es:

$$\sigma_{an} = \pi r_e^2 \frac{1}{\gamma+1}\left[\frac{\gamma^2+4\gamma+1}{\gamma^2-1}\ln(\gamma+\sqrt{\gamma^2-1}) - \frac{\gamma+3}{\sqrt{\gamma^2-1}}\right]$$

que tiene un máximo alrededor de $\gamma = 1$.

La aniquilación del positronio puede tener lugar a través de un proceso de emisión de dos fotones:

$$e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$$

en el que el positronio está en estado singlete (espín $J = 0$), denominado *para-positronio*. La energía de cada fotón es de 0,511 MeV (aniquilación en reposo). La vida media de este estado es $\tau = 10^{-10}$ s.

Si la desintegración se realiza en el estado triplete (espín del sistema $J = 1$), se denomina entonces *orto-positronio*. Su desintegración es a través de tres fotones:

$$e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma + \gamma$$

y su vida media es $\tau = 10^{-7}$ s.

Un positrón que aparezca en la materia, acabará siempre aniquilándose con un electrón, dando fotones en el estado final, después de un brevísimo tiempo en el que ha formado el estado llamado positronio.

3.6.4 Retrodifusión. Albedo

Una consecuencia de la difusión múltiple para e^+ y e^- es el fenómeno de la retrodifusión. Es un fenómeno que se produce principalmente para energías inferiores a 1 MeV. Un electrón o positrón, al entrar en un material, puede sufrir difusiones a gran ángulo, que pueden llegar a difundirlo en la dirección opuesta a la de incidencia (de ahí el nombre de retrodifusión).

El coeficiente de retrodifusión $\mathcal{A}$, también llamado albedo, mide la probabilidad del fenómeno; suele ser constante hasta energías del orden de 1 MeV y se anula para valores de unas decenas de MeV. Es característico del material. Para metales como Au, Ag, etc. se tiene $\mathcal{A} \approx 50\,\%$.

Este fenómeno explica pérdidas importantes en la detección de electrones de muy baja energía. Así, con un detector de NaI, cerca del 80 % de los electrones emitidos por fuentes radiactivas son retrodifundidos y, por tanto, no dan señal en el detector.

3.7 Interacción de fotones con la materia

En la interacción de partículas cargadas con la materia, se ha visto que si bien van frenando y acaban parándose, su naturaleza no cambia. Un fotón, para poder ser detectado, debe interaccionar y dar lugar a partículas cargadas.

Las interacciones de los fotones con la materia siempre se abordan bajo su aspecto corpuscular. Se habla de propiedades corpusculares de la radiación.

Tres son los fenómenos físicos que describen la interacción de los fotones con la materia, con distinto comportamiento energético:

- efecto fotoeléctrico, $\approx 1/E_\gamma^3$, importante para $E_\gamma < 500\ keV$,
- efecto Compton, $\approx 1/E_\gamma$, domina para $E_\gamma \sim 1$ MeV, y
- creación de pares e^+e^-, constante con E_γ y cuenta para $E_\gamma > 50$ MeV.

Otros fenómenos son: la difusión coherente (difusión Rayleigh), que es una difusión con los electrones del material, sin llegar a excitarlos (fenómeno despreciable a partir de energías de rayos X), y la absorción fotonuclear, proceso en el que se arranca un neutrón del núcleo y es importante en la región conocida como la de la resonancia gigante (se produce a energías entre 10 y 25 MeV).

Es tradicional relacionar la naturaleza de la radiación γ con su energía de acuerdo con la siguiente tabla:

infrarroja	0,01	-	1	eV
visible	1	-	3	eV
ultravioleta	3	-	100	eV
rayos X	0,1	-	100	keV

3.7.1 Efecto fotoeléctrico

El fotón es absorbido totalmente por un átomo que al desexcitarse emite un electrón, (al estar ligado puede conservarse el momento), o sea:

$$\gamma + A \rightarrow\ A^* \rightarrow\ A^+ + e^-$$

La energía del e^- (denominado fotoelectrón) será $E_e = E_\gamma - E_b$, en donde E_b es la energía de ligadura del e^-. Einstein propuso $E_\gamma = h\nu$ y explicó los experimentos de Millikan en los que se pusieron de manifiesto las frecuencias de corte dependientes del material (o sea, las energías de ligadura atómicas).

Como la energía del electrón emitido es $E_e = E_\gamma - E_b$, al detectar el electrón se obtiene un pico para el valor de la energía $E - e$; es el llamado fotopico.

Los cálculos de la sección eficaz son complejos. Por encima de la capa K pero $E_\gamma << m_e c^2$ en la aproximación de Born, la sección eficaz del efecto fotoeléctrico por átomo es,

$$\boxed{\sigma_\phi = \sigma_{Th}\, 4\sqrt{2}\alpha^4 Z_2^5 \left(\frac{mc^2}{E_\gamma}\right)^{7/2}} \tag{3.25}$$

con $\sigma_{Th} = \frac{8}{3}\pi r_e^2$, sección eficaz de Thomson que, como se ha visto, da el límite clásico de la difusión elástica $\gamma + e \rightarrow\ \gamma + e$. Se observa, en particular,

una fuerte dependencia con el Z_2 del material ($\sim Z_2^5$). En el caso de Pb, por ejemplo, $\sigma_\phi(E_\gamma = 1 \text{ MeV}) \approx 1$ barn y sube hasta ~ 1 Kbarn cerca del pico de la capa K (88 MeV).

Existen picos para los valores de E que coinciden con los de las capas $K, L, M, ...$ Así, en el Pb, para $E_\gamma > 88\ keV$ ya se pueden arrancar e^- de la capa K. Puede verse la forma de estos picos de la sección eficaz del efecto fotoeléctrico en la curva 3.15, obtenida tomando como blanco un cristal centelleador de NaI.

3.7.2 Efecto Compton

Se trata de la difusión elástica $\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$, como si el electrón atómico estuviera libre.

La conservación del cuadrivector energía-momento (véase la figura 3.13) se escribe:

$$\begin{array}{lcl} E_\gamma + m_e c^2 & = & E'_\gamma + E_e \\ \vec{p}_\gamma & = & \vec{p}'_\gamma + \vec{p}_e \end{array} \tag{3.26}$$

donde se observa que el electrón inicial se considera en reposo y se puede escribir $E_e = \gamma m_e c^2$ y $p_\gamma = E_\gamma / c$. Suponiendo que el fotón es difundido según el ángulo θ, y escribiendo $\epsilon = \dfrac{E_\gamma}{m_e c^2}$ (energía reducida del fotón) y $x = 1 - \cos\theta$ se obtiene

$$E'_\gamma = \frac{E_\gamma}{1 + \epsilon x} \tag{3.27}$$

con lo que la máxima energía del fotón ($E'_\gamma = E_\gamma$) se obtiene para $\theta = 0$ y la mínima ($E'_\gamma \approx mc^2/2$) para $\theta = 180^o$. Si se escribe en términos de longitudes de onda del fotón $\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$ entonces la constante $\lambda_e = \frac{h}{mc} = 0,0243$ Å recibe el nombre de longitud de onda Compton del electrón.

La sección eficaz (QED) fue calculada por Klein-Nishina:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{KN} = \frac{r_e^2}{2} \frac{1}{(1+\epsilon x)^2} \left(1 + \cos^2\theta + \frac{\epsilon^2 x^2}{1 + \epsilon x}\right) \tag{3.28}$$

que al integrarla queda

$$\sigma_c = \frac{3}{8\epsilon}\sigma_{Th} \left\{ \left[1 - \frac{2(\epsilon+1)}{\epsilon^2}\right] \ln(2\epsilon + 1) + \frac{1}{2} + \frac{4}{\epsilon} - \frac{1}{2(2\epsilon+1)^2} \right\},$$

donde σ_{Th} es la sección eficaz de Thomson vista en (3.5). Se verifica que cuando $\epsilon \rightarrow \infty$ se tiene que $\sigma_c \rightarrow \frac{3}{8\epsilon}\sigma_{Th}\left(\ln 2\epsilon + \frac{1}{2}\right)$, o sea que, por átomo, va como Z_2/E_γ.

Análogamente, como en (3.26) se cumple que $E_e = T_e + m_e c^2$, siendo E_e la energía total del electrón y T_e su energía cinética, puede comprobarse que

$$T_e = E_\gamma - E'_\gamma = E_\gamma \left(1 - \frac{E_\gamma}{1 + \epsilon x}\right)$$

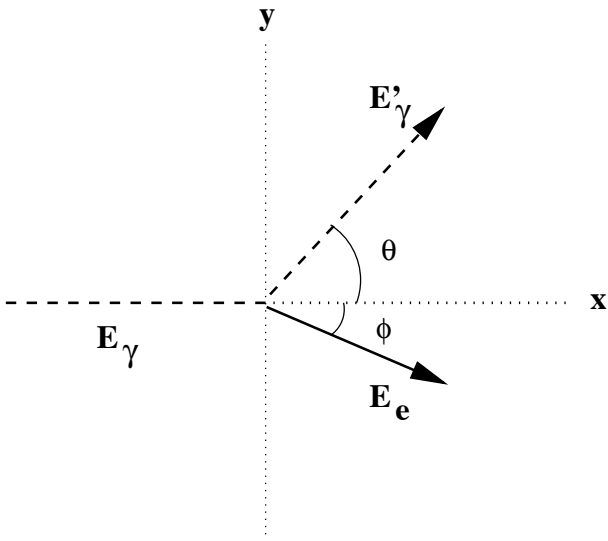


Figura 3.13: Colisión Compton entre un fotón y un electrón.

También se observa que existe un valor máximo de la energía del electrón (llamado el *Compton edge*), para un choque con $\cos\theta = -1$, y que como $mc^2 \approx 0,5$ MeV, se tiene

$$\boxed{T_e^{\max} = \frac{4E_\gamma^2}{1+4E_\gamma}}$$

Este máximo corresponde al mínimo de la energía del fotón difundido:

$$E_\gamma^{'\min} = \frac{E_\gamma}{1+4E_\gamma}$$

que suele aparecer en los espectros de las fuentes radiactivas γ como un pico muy ancho, llamado pico de *backscattering*, puesto que corresponde al efecto fotoeléctrico en el detector de los fotones con energía $E_\gamma^{'\min}$, emitidos tras una difusión hacia atrás del fotón inicial E_γ. Para valores elevados de E_γ el pico de *backscattering* tiende a $E'_\gamma \approx mc^2/2$, es decir, cercano a unos 250 keV. En la figura 3.14, la distancia entre E_γ y el *Compton edge* viene dada por E_c, que tiene un valor igual a $E_\gamma^{'\min}$.

Los espectros de fuentes emisoras de fotones suelen ser más complejos que el caso mostrado en la figura 3.14. Así por ejemplo, si se mide el espectro de una fuente tal que la energía de los fotones es suficiente para crear pares e^+e^-, entonces la aniquilación de los positrones produce la aparición de otros fotopicos que se superponen al fondo Compton. En efecto, si se mide el e^- y los dos fotones del e^+, aparecerá el pico con la energía del fotón. Pero, si uno de los fotones escapa del detector, aparecerá otro pico en $E - 0,511$ MeV (el

llamado pico de escape simple) y, si los dos fotones escapan, aparecerá el pico de escape doble en $E - 1,022$ MeV.

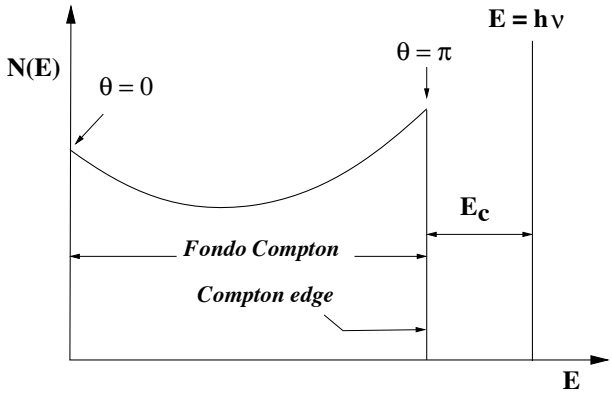


Figura 3.14: Espectro energético (teórico) de los electrones producidos en el efecto Compton. La distancia entre $E_\gamma = h\nu$ y el *Compton edge* viene dada por E_c, que tiene un valor igual a $E_\gamma^{'\min}$, definido en el texto.

El espectro Compton se obtiene a partir de la sección eficaz de Klein-Nishina, y su expresión es:

$$\frac{d\sigma}{dT_e} = \frac{\pi r_e^2}{mc^2\epsilon^2}\left[2 + \frac{t^2}{\epsilon^2(1-t)^2} + \frac{t}{1-t}\left(t - \frac{2}{\epsilon}\right)\right]$$

en donde se ha escrito $t = \frac{T_e}{E_\gamma}$ y, como antes, $\epsilon = \frac{E_\gamma}{m_e c^2}$.

3.7.3 Creación de pares e^+e^-

El proceso $\gamma \rightarrow\ e^+ + e^-$, en presencia de un campo eléctrico intenso, es posible si $E_\gamma \geq 1,022$ MeV ya que la conservación de la energía exige que

$$E_\gamma = T_+ + mc^2 + T_- + mc^2$$

y el ángulo de emisión del par $e^\pm$ a alta energía sigue $\theta \sim \frac{mc^2}{E_e}$. La energía total del electrón es $E_- = T_- + mc^2$ y la del positrón $E_+ = T_+ + mc^2$. El ángulo de emisión del par $e^\pm$ respecto a la dirección del fotón, a alta energía, cumple $\theta \sim \frac{mc^2}{E_\pm}$; es decir, a muy alta energía, electrón y positrón se emiten a muy pequeño ángulo.

Se trata del proceso dominante para $E_\gamma \geq 5$ MeV. Físicamente se trata del proceso inverso del *bremsstrahlung*. El cálculo, hecho por Bethe y Heitler,

tiene de nuevo en cuenta el apantallamiento de la carga nuclear. Para ello se usa el parámetro $\xi = \dfrac{100\ mc^2 E_\gamma}{E_+ E_- Z^{1/3}}$, que cuando $\xi \approx 0$ representa apantallamiento total.

En la aproximación de Born, y en el caso de apantallamiento total ($\xi = 0$), la sección eficaz diferencial para producir un positrón de energía E_+ es

$$\frac{d\sigma}{dE_+} = \frac{4\sigma_0}{E_\gamma^3}\left[\left(E_+^2 + E_-^2 + \frac{2}{3}E_+E_-\right)\left[\ln\frac{183}{\sqrt[3]{Z_2}} - f(Z_2)\right] - \frac{E_+E_-}{9}\right]$$

en donde la función $f(Z_2)$ se introduce para tener en cuenta la interacción de los pares creados con la carga nuclear y σ_0 la misma constante vista en (3.17).

Al integrar, en el caso de apantallamiento total se obtiene,

$$\sigma_{\text{par}} = 4\sigma_0\left\{\frac{7}{9}\left[\ln(183/Z_2^{1/3}) - f(Z_2)\right] - \frac{1}{54}\right\}$$

También puede incluirse la creación de pares por interacción con los e^- del átomo; para ello debe cambiarse $Z_2^2 \to Z_2(Z_2+1)$.

Longitud de creación de pares X_{par}

Al igual que en el *bremsstrahlung* se puede introducir la longitud de creación de pares,

$$\frac{1}{X_{\text{par}}} = n\sigma_{\text{par}} \approx \frac{1}{\frac{9}{7}X_0}$$

ya que como puede comprobarse, $\sigma_{\text{par}} = \dfrac{7}{9}\sigma_{\text{rad}}$.

Por ejemplo, para el centelleador NaI, se ha visto que $X_0 = 2,59$ cm (9,49 gr$\cdot$ cm^{-2}), o sea $X_{\text{par}} = 3,33$ cm (12,20 gr$\cdot$ cm^{-2}).

3.7.4 Atenuación de fotones. Longitud de conversión X_c

La probabilidad de absorción total de un fotón será,

$$\boxed{\sigma_\gamma = \sigma_\phi + Z_2\sigma_c + \sigma_{\text{par}}} \tag{3.29}$$

La probabilidad de absorción por unidad de longitud será $\mu = n_a \cdot \sigma_\gamma = \dfrac{N_A}{A}\rho\sigma_\gamma$, llamado coeficiente de absorción total. Si se representa la variación con la energía del coeficiente de absorción total de los fotones se encuentra la dependencia que se muestra en la figura 3.15, donde se ha tomado como blanco un centelleador NaI. Esta figura contiene la dependencia de todos los efectos estudiados: fotoeléctrico, Compton y creación de pares.

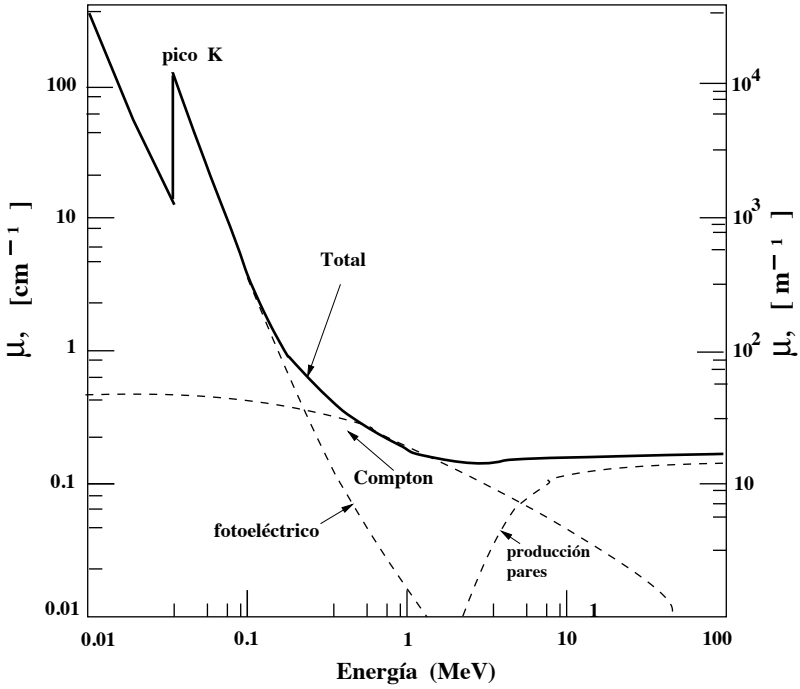


Figura 3.15: Coeficiente de absorción, μ, para fotones en un detector de NaI.

La fracción de fotones que sobrevive al atravesar una distancia de materia x:

$$\boxed{\frac{N}{N_0} = e^{-\mu x}} \tag{3.30}$$

y es válida para toda energía. Se suele utilizar también el coeficiente de absorción másico, μ/ρ (cm^2/gr).

A altas energías, domina la producción de pares, y como σ_{par} es constante se puede definir la longitud de conversión, X_c,

$$\frac{1}{X_c} = n_a \sigma_{\text{par}} = \frac{7}{9} n_a \sigma_{\text{rad}} = \frac{1}{\frac{9}{7} X_0}$$

en función de la longitud de radiación X_0. Por lo tanto, para alta energía,

$$\boxed{I = I_0 e^{-x/X_c}} \tag{3.31}$$

la intensidad de un haz de fotones se atenúa exponencialmente.

La teoría de Klein-Nishina da el coeficiente de absorción para energías del fotón $E_\gamma >> m_e c^2$,

$$\mu = \frac{2Z_2}{A} \frac{0,038}{E(\text{MeV})} (1,86 + \ln E) \qquad [\text{gr} \cdot \text{cm}^{-2}]$$

que, por ejemplo, para el agua resulta ser $\mu_{\text{agua}} = \frac{4,3}{E}(1,86 + \ln E)$ $[\text{m}^{-1}]$

Se podría hablar de alcance de fotones, definiéndolo como aquel recorrido en el que la intensidad disminuye de un factor 2. Así, por ejemplo, se puede comparar el alcance en el aluminio (ρ_{Al}= 2,7 gr· cm^{-2}) para varios tipos de partículas de 1 MeV de energía, dando:

$$R_\alpha \approx 3\ \mu\text{m},\ R_\beta \approx 1{,}6\ \text{mm},\ R_\gamma \approx 4{,}3\ \text{cm}.$$

3.8 Ejercicios

3.1. Pérdidas de energía por ionización.
a) Utilizando la fórmula de Bethe-Bloch, demostrar que el valor del mínimo de ionización se alcanza para $\beta\gamma \approx 3$ cualquiera que sea el material. Deducir, utilizando esta aproximación, una fórmula para el valor de dicho mínimo.
b) Aplicar las fórmulas anteriores para el plomo y el carbono y comparar con los valores de las tablas. Datos: $Z = 82, A = 207$ para el plomo y $Z = 6, A = 12$ para el carbono.

3.2. Penetración de partículas en la materia.
a) Utilizando las curvas de alcance, calcular la distancia de penetración de muones con p = 1 GeV/c en un bloque de plomo y en un bloque de carbono.
b) Suponiendo que el bloque de material tiene 10 cm de espesor, calcular la pérdida de energía por ionización del muón de 1 GeV/c al atravesar dicho bloque. Estimar el valor de la fluctuación en dicha pérdida de energía. Datos: ρ =11,35 g/cm^3 para el plomo y ρ =2,26 g/cm^3 para el carbono.

3.3. Longitud de radiación y de interacción.
a) Hacer una tabla con los valores de ρX_0, $\rho\lambda_I$ y el cociente de ambos para los siguientes elementos: $He, C, Al, Fe y Pb$. Verificar la fórmula empírica $\lambda_I / X_0 \approx Z/3$.
b) Utilizando un modelo geométrico del núcleo, demostrar que $\rho\lambda_I \approx 37 \cdot A^{1/3}$ g/cm^2 y deducir utilizando el apartado **a)** que $\rho X_0 \approx 140 \cdot Z^{-2/3}$ g/cm^2.
¿Cuál es la precisión de estas fórmulas aproximadas?

3.4. Longitud de radiación de un compuesto.
a) Demostrar que para un elemento compuesto, la longitud de radiación es:

$$\frac{1}{\rho X_0} = \sum_i w_i \left(\frac{1}{\rho X_0}\right)_i$$

donde w_i es la fracción de masa del elemento i del compuesto. Aplicar la fórmula al yoduro de sodio NaI y comparar el resultado obtenido con el valor de las tablas.
b) Calcular la fracción de energía contenida en un cristal de NaI de 10, 20 y 30 X_0 de espesor, para energías del electrón incidente de 1 GeV y 100 GeV.

3.5. Efecto Compton.
a) Un haz de fotones incide sobre una cámara de niebla, observándose un suceso que contiene un electrón Compton con momento 1,5 MeV/c emitido a un ángulo de 10° respecto al haz incidente. Calcular las energías del fotón incidente y del

fotón difundido.
b) Determinar la energía mínima que debería tener el fotón para que el electrón Compton pudiera ser detectado mediante radiación Cherenkov (se supondrá $n = 1{,}33$).

3.6. Atenuación de fotones en agua.
Calcular la longitud de atenuación de fotones en agua, para las siguientes energías del fotón incidente: 10 keV, 1 MeV, 100 MeV.

3.7. Cascadas electromagnéticas en la atmósfera.
a) Calcular la longitud de radiación del aire a nivel del mar (suponiendo una densidad de $\rho_0 = 1{,}25 \cdot 10^{-3}$ g/cm^3) y comparar con el valor de las tablas.
b) La densidad del aire decrece con la altura h según la fórmula $\rho = \rho_0 \cdot e^{(-h/h_0)}$ siendo $h_0 = 8{,}27$ km. Calcular el espesor de la atmósfera en longitudes de radiación en función de la altura sobre el nivel del mar h. Calcular la probabilidad de que un fotón cósmico alcance una altura de 5000 m sin interaccionar.
c) El máximo de la cascada creada por un fotón cósmico de energía E se alcanza tras recorrer una distancia $X_{max} = X_0 \cdot \mathrm{Log}(E/\epsilon_c)$ siendo X_0 la longitud de radiación del aire y ϵ_c la energía crítica. Calcular a qué altura h sobre el nivel del mar se alcanza dicho máximo, para energías del fotón cósmico de 10^{12} y 10^{19} eV.

4. Detectores de partículas

4.1 Detectores de partículas

Habiendo estudiado los fenómenos físicos producidos por la radiación (o sea, partículas cargadas o partículas neutras como los fotones), es el momento de abordar el estudio de los detectores más conocidos y más utilizados en la detección de partículas.

4.1.1 Clasificación de detectores de partículas

He aquí una clasificación de detectores de partículas cargadas:

a) Detectores eléctricos. Los e^- emitidos por ionización son acelerados por un potencial y a su vez producen más ionización, con lo cual la señal final es amplificada. Si el medio es un gas, funcionan por las descargas en gases (cámaras de ionización, contadores proporcionales, tubos de Geiger-Müller). En los cristales semiconductores, son los pares e^- −hueco creados por el paso de la partícula los que determinan la señal.

b) Contadores de centelleo y Cherenkov. Las partículas cargadas excitan los átomos del medio. La emisión luminosa producida en la desexcitación es convertida en pulso eléctrico por efecto fotoeléctrico y amplificada en un fotomultiplicador.

c) Detectores de trazas. La trayectoria de la partícula se hace visible; por ejemplo, en cámaras de niebla o de Wilson, de burbujas, de chispas, emulsiones, etc.

La única manera de poder detectar partículas neutras es conseguir que interaccionen con el detector y que se produzcan en el estado final partículas cargadas. Gracias a la detección de las partículas cargadas (secundarias) se podrán reconstruir las características de la partícula neutra incidente. Los detectores que se diseñen para partículas neutras deben ser sensibles a las interacciones siguientes:

- Si se quiere detectar fotones (γ), hay que aprovechar la interacción electromagnética de dichos fotones, es decir, el efecto fotoeléctrico, el efecto Compton o la creación de pares.

- Si se quiere detectar neutrones (n), hay que utilizar la interacción fuerte, por ejemplo, la colisión elástica $np \longrightarrow np$, de forma que el protón adquiere energía y es el que se detecta.

- Si se pretende detectar neutrinos (ν), debe existir previamente interacción débil. Pero esto es sólo posible si se dispone de flujos muy intensos ya que la probabilidad de interacción de un neutrino es insignificante.

La noción de detector engloba también la electrónica asociada. El tratamiento electrónico de las señales, las computadoras, etc., juegan un papel esencial en la detección de partículas.

La información que se extrae de los detectores es muy variada; he aquí las magnitudes que se suelen medir en los detectores:

- Recuento. Es útil, por ejemplo, para medir actividades de fuentes radiactivas.

- Identificación, o sea, conocer la masa. En detectores de trazas, normalmente la traza es debida a la ionización, que es una función f(β, Z), de la velocidad de la partícula y de su carga eléctrica. Además suele utilizarse un campo magnético $\vec{\mathcal{B}}$, que curva las partículas en función de su momento.

  También puede identificarse una partícula gracias a los detectores Cherenkov.

- Energía, midiendo alcances en detectores de trazas, o a más alta energía en calorímetros.

- Secciones eficaces de interacción o vidas medias; midiendo las longitudes medias de interacción λ_{I} o de desintegración λ_{D} en detectores de trazas.

- Dirección y tiempo de paso, con detectores de trazas, y utilizando técnicas de coincidencias.

- Flujo, contando número de partículas incidentes.

4.2 Magnitudes características de los detectores

Hay que partir de la idea de que no existe un detector de partículas universal. Para cada tipo de partícula y, dependiendo del rango de energías, interesa un tipo distinto de detector.

Existen varias propiedades físicas de los detectores que conviene analizar antes de decidir su uso. En cualquier caso, es siempre necesario conocer magnitudes tales como la resolución energética y la eficiencia. A continuación se definen una serie de magnitudes características de los detectores.

4.2.1 Sensibilidad

La sensibilidad de un detector es su capacidad para producir una señal útil. La sensibilidad depende de σ, la sección eficaz, y de la masa del detector. Ambas determinarán la probabilidad de interacción de la partícula en el medio del detector (o en el caso de fotones, la probabilidad de conversión de la radiación incidente).

Detectores con poca masa detectarán una pequeña parte de la energía y serán poco sensibles a partículas neutras. Por el contrario el material envolvente del detector y el ruido (del detector y de la electrónica) fijarán el mínimo de señal detectable.

4.2.2 Respuesta

Sea una partícula que al atravesar un detector pierde una cantidad de energía E_{rad}. La respuesta del detector se define como

$$\rho = \frac{E_{rad}}{V} \qquad \text{o} \qquad \rho = \frac{E_{rad}}{Q}$$

siendo V o Q la señal (en voltaje o en carga) del detector. La respuesta debe ser lo más lineal posible.

4.2.3 Función respuesta

Se trata en este caso de medir la energía de las partículas. Una partícula de energía E atraviesa un detector, depositando toda su energía. La señal del detector, que frecuentemente es un pulso electrónico caracterizable por su altura $PH(E)$ (llamado altura del pulso, en inglés *pulse height*), es la respuesta del detector. Idealmente la respuesta de un detector a partículas de energía E, debería ser una distribución delta de Dirac $\delta(E' - E)$. Lo más frecuente es que sea una función de Gauss, y a veces la función respuesta $\rho(E', E)$ es más complicada. La función respuesta da la energía obtenida en el detector E', cuando la energía de la partícula es E. Entonces, partiendo de un espectro teórico $S(E)$ (por ejemplo, la curva de respuesta al paso de un fotón de energía E en un detector de centelleo tipo NaI, como puede verse en la figura 4.1) el espectro experimental de alturas de pulso, $PH(E)$, que se obtendría sería el resultado de la convolución:

$$PH(E) = \int S(E')\rho(E', E)dE'$$

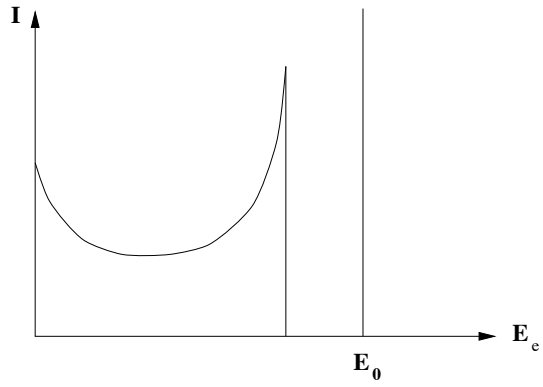


Figura 4.1: Espectro ideal de energías de electrones, medibles en un detector al paso de fotones de energía E_0. El pico en E_0 representa el efecto fotoeléctrico y la distribución continua es debida al efecto Compton con su máximo en el extremo del espectro (llamado límite Compton o *Compton edge*).

Normalmente esta es la expresión que se utiliza para determinar el espectro de origen $S(E)$, conocida la función respuesta del detector. Una vez medido el espectro experimental (es decir, las alturas de pulso), debe invertirse la expresión anterior, lo que se convierte en un problema de desconvolución.

Ejemplos:

a) Sea una fuente radiactiva que emite S_0 partículas/seg de energía E_0. El espectro teórico será $S(E) = S_0\delta(E - E_0)$. Si las partículas se miden con un detector cuya función respuesta es $\rho(E', E)$, el espectro de alturas de pulso que se obtendrá será

$$PH(E) = \int \rho(E', E) S_0 \delta(E' - E_0) dE' = S_0 \rho(E, E_0)$$

b) Si se trata de un espectro teórico cuya forma sigue la función uniforme (cuadrada) entre E_1 y E_2 y la función respuesta es una función de Gauss (véase la sección 5.3.4):

$$f_r(E') = \frac{1}{\sigma_r\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(E-E')^2}{2\sigma_r^2}}$$

cuya desviación estándar es σ_r; entonces la distribución experimental será

$$\begin{aligned} PH(E) = \textstyle\int_0^\infty dE' f_r S(E') \quad &= S_0 \textstyle\int_{E_1}^{E_2} f_r dE' = \\ &= \frac{S_0}{2}\left[erf\left(\frac{E_2 - E}{\sigma\sqrt{2}}\right) - erf\left(\frac{E_1 - E}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right] \end{aligned}$$

es decir, la distribución experimental será una suma de funciones error. Recuérdese que la función error es:

$$erf\left(\frac{E_0 - E}{\sigma\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{(E_0-E)}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \tag{4.1}$$

c) Si se trata de un espectro teórico cuya forma sigue la función de Gauss $f_s(\mu = E_0, \sigma_s)$ y la función respuesta es también una función de Gauss cuya desviación estándar es σ_r, entonces

$$PH(E) = \int_{-\infty}^{\infty} dE' f_s f_r = \frac{S_0}{\sqrt{2\pi(\sigma_s^2 + \sigma_r^2)}} e^{-\frac{(E-E_0)^2}{2(\sigma_s^2+\sigma_r^2)}}$$

es decir, la distribución experimental será una función de Gauss pero con $\sigma^2_{\text{total}} = \sigma_s^2 + \sigma_r^2$.

4.2.4 Resolución energética

Se define la resolución energética de un detector como el cociente

$$\boxed{R = \frac{\Delta E}{E_0}} \tag{4.2}$$

siendo ΔE la anchura total a media altura (FWHM; del inglés, *full width at half maximum*) de la curva de Gauss correspondiente a la medida de un haz monoenergético de energía E_0, también llamada en este caso curva de resolución (véase la figura 4.2). Por ejemplo para γ de 1 MeV, un detector de centelleo tipo NaI tiene una resolución energética aproximadamente del 8 %.

Para detectores delgados (en los que la pérdida de energía por unidad de recorrido dE/dx es pequeña), el número de ionizaciones $N_\pm$ es pequeño y entonces se aplica la estadística de Poisson (véase la sección 5.3.3), con lo que, partiendo de $N_\pm = E/w$, siendo w la energía necesaria para crear un par $e^- X^+$ se tiene que $\sigma^2 = N_\pm$, con lo que la resolución en energía viene dada por el error estadístico que se tiene sobre la determinación de $N_\pm$:

$$R = \frac{\Delta E}{E} = 2,35\frac{\sqrt{N_\pm}}{N_\pm} = 2,35\sqrt{\frac{w}{E}}$$

puesto que FWHM = $2\sqrt{2\ln 2}\,\sigma = 2,35\,\sigma$.

Si la partícula pierde toda la energía, entonces ya no existen las fluctuaciones debidas a dE/dx y, siguiendo a Fano, se cumple que $\sigma^2 = FN_\pm$, siendo F el factor de Fano, que para gases vale $F \leq 0,01$, y para centelleadores $F \approx 1$. Entonces se tendrá una resolución mejor:

$$R = 2,35\sqrt{\frac{Fw}{E}} \tag{4.3}$$

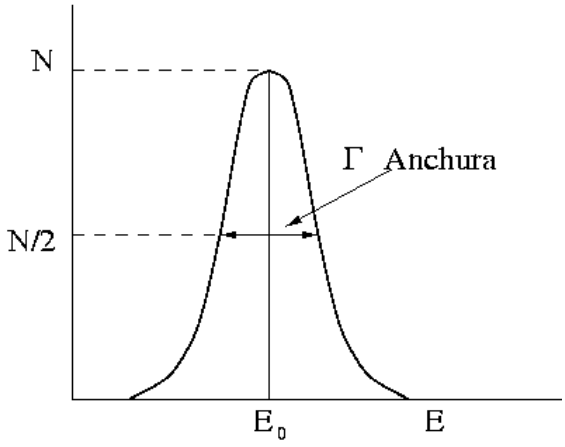


Figura 4.2: Esquema para el cálculo de la resolución energética de un detector. La anchura total a media altura $\Delta E = \Gamma$, es denominada FWHM.

El cálculo de la resolución total del detector se hará sumando cuadráticamente la resolución anterior a la debida a la electrónica y a la de otros factores que puedan intervenir.

4.2.5 Resolución espacial y temporal

Se suele dar en forma de desviación típica: σ_x , σ_t. Representan el poder separador espacial y temporal respectivamente.

4.2.6 Tiempo de respuesta

Es el tiempo que transcurre entre el paso de la partícula y la formación de la señal. Viene determinada por el flanco de subida del pulso electrónico. Contribuye al tiempo muerto del detector que se verá más adelante.

4.2.7 Eficiencia

Un detector no es perfecto. Generalmente, no responde al paso de todas las partículas que lo atraviesan. Se define la eficiencia total de un detector de partículas como el cociente entre el número de partículas detectadas y el número de partículas emitidas. La eficiencia total se puede descomponer en eficiencia geométrica $\mathcal{E}_{\text{geo}}$ y eficiencia intrínseca $\mathcal{E}_{\text{int}}$. La eficiencia geométrica, es consecuencia del tamaño finito del detector y de su distancia a la fuente de partículas.

Se deduce una vez conocida la probabilidad de la emisión de la radiación en función del ángulo.

Si la emisión es isótropa, entonces

$$d\mathcal{E}_{\text{geo}} = \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{2\pi sin\theta d\theta}{4\pi} \tag{4.4}$$

es decir, como era de esperar, la probabilidad de emisión entre un ángulo θ y $\theta + d\theta$ es $P(\theta)d\theta = \frac{1}{2}sin\theta d\theta$. Dicho de otra manera, la eficiencia geométrica representa la porción de ángulo sólido que subtiende el detector. A veces se le denomina también factor geométrico.

La eficiencia intrínseca, viene dada por la probabilidad de interacción de la radiación en el detector; o sea, es función del recorrido libre medio de las partículas en el detector, λ_i, o lo que es lo mismo de la sección eficaz de interacción, $\sigma_i = \frac{1}{n\lambda_i}$.

$$\mathcal{E}_{\text{int}} = \left(1 - e^{-x/\lambda_i}\right) \tag{4.5}$$

con lo que la eficiencia total se puede factorizar quedando,

$$d\mathcal{E}_{\text{tot}} \approx d\mathcal{E}_{\text{geo}} \cdot \mathcal{E}_{\text{int}}$$

Utilizando las definiciones anteriores, se puede hablar de eficiencia absoluta y eficiencia relativa. La determinación de eficiencias absolutas es generalmente un problema muy complejo. Más fácil y frecuente es la determinación de eficiencias relativas, para las que es necesario disponer de un estándar, cumpliéndose la siguiente definición:

$$\text{eficiencia relativa} = \frac{\text{eficiencia absoluta}}{\text{estándar}}$$

En el caso de los detectores de fotones, cuando se habla de *eficiencia de un detector* hay que tener en cuenta que puede tratarse de una de las cuatro definiciones siguientes:

1. Eficiencia total del detector ($\mathcal{E}_{\text{tot}}$).

2. Eficiencia del detector a determinadas señales muy concretas. Sea el caso de un fotón con $E_\gamma > 1,022$ MeV. Si existe creación de pares, el positrón se aniquila y produce dos fotones de 0,511 MeV, pudiendo escapar del detector uno (escape simple) o los dos fotones (doble escape). Esto tiene como consecuencia la aparición de picos en el espectro:

   a) el pico de energía total (fotopico),

   b) el pico de escape simple,

   c) el pico de doble escape.

Otro pico posible es el llamado de *backscattering*. Se trata de sucesos en los que tras el efecto Compton, el electrón sale del detector sin ser detectado. Queda el fotón difundido cuya energía mínima es $E_{\min} = \frac{E}{1+4E}$, valor en el que hay un pico de *backscattering*.

La eficiencia total absoluta vale $\mathcal{E}_{\text{tot}} = \mathcal{E}_{\text{int}} \times \mathcal{E}_{\text{geo}}$ siendo $\mathcal{E}_{\text{geo}}$ la fracción de ángulo sólido subtendido por el detector, igual que en el caso general presentado más arriba. La eficiencia intrínseca se podría escribir

$$\mathcal{E}_{\text{int}} = \left(1 - e^{-\mu(E)\,L}\right)$$

donde $\mu(E)$ es el coeficiente de absorción total y L la longitud del detector. La eficiencia geométrica se calcula de la misma manera que en el caso general.

Sea por ejemplo el esquema de la figura 4.3. Supóngase que el detector detecta r partículas por segundo (una vez corregido el efecto del tiempo muerto y sustraído el ruido de fondo) y que $\mathcal{A}$ es la actividad de la fuente radiactiva. La eficiencia del detector viene dada por:

$$\mathcal{E}(E) = \frac{r}{\mathcal{A}\Omega\mathcal{F}(E)} \tag{4.6}$$

donde $\mathcal{F}(E) = f_a \cdot f_b \ldots$ es una combinación de factores de corrección que hay que aplicar para tener en cuenta varias pérdidas como por ejemplo, la autoabsorción en la fuente, el *backscattering*, pérdidas en el aire y en la ventana del detector, etc... A este factor $\mathcal{F}$ se le suele llamar aceptancia, y en general depende de la energía de la partícula detectada.

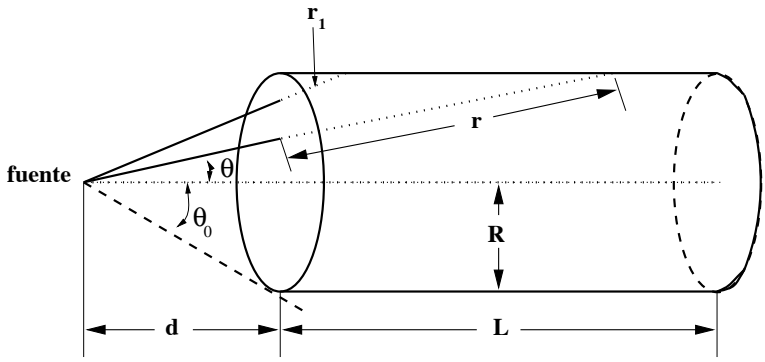


Figura 4.3: Esquema para el cálculo de la eficiencia geométrica de un detector.

El factor geométrico Ω o ángulo sólido, en el caso en el que se suponga una fuente puntual como la de la figura 4.3 es:

$$\Omega = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{d}{\sqrt{d^2 + r^2}}\right)$$

En conclusión, al medir la actividad $\mathcal{A}$ de una fuente (el número total de partículas emitidas), se obtendrá experimentalmente un número de cuentas r dado por:

$$r = \Omega \mathcal{F}(E) \mathcal{E} \mathcal{A}$$

y todos los factores que intervienen, $\Omega \mathcal{F}(E) \mathcal{E}$, representan la eficiencia total del proceso, con lo que a partir de la medida de r, puede calcularse la actividad de la fuente simplemente despejando en la fórmula anterior $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} = \frac{r}{\Omega \mathcal{F}(E) \mathcal{E}} \tag{4.7}$$

4.2.8 Tiempo muerto

El tiempo muerto representa el tiempo de inoperatividad del detector originado al pasar una partícula que crea una señal. Es importante conocer el tiempo muerto τ del detector, ya que limita la capacidad de recuento. Se suele distinguir entre tiempo muerto *extensible* y *no extensible*. En el caso extensible, si una partícula atraviesa el detector en el tiempo muerto, lo prolonga. Se estudia a continuación el caso no extensible.

En el caso de tiempo muerto *no extensible*, si durante un tiempo T el contador registra un número K de cuentas, o sea, $k = K/T$ cuentas por segundo, entonces el número verdadero de cuentas por segundo m cumple $mT = kT + mk\tau$, con lo que

$$\boxed{m = \frac{k}{1 - k\tau}} \tag{4.8}$$

Para determinar τ puede utilizarse el método de las dos fuentes. Se cuentan separadamente las partículas de dos fuentes radiactivas, obteniéndose r_1 y r_2 cuentas por segundo, respectivamente. Se procede a continuación al recuento de las dos juntas, obteniéndose r_{12}. Si los números de cuentas verdaderos son n_1 y n_2, se cumple:

$$n_1 = r_1/(1 - r_1\tau), \;\; n_2 = r_2/(1 - r_2\tau), \;\; n_1 + n_2 = r_{12}/(1 - r_{12}\tau)$$

y de aquí,

$$\boxed{\tau = \frac{r_1 r_2 - \sqrt{r_1 r_2 (r_{12} - r_1)(r_{12} - r_2)}}{r_1 r_2 r_{12}}} \tag{4.9}$$

Se trata de un método práctico aunque es un poco pesado y suele dar resultados con una precisión del 5-10 %.

La corrección del efecto del tiempo muerto es, pues, inmediata. Sea el caso descrito por la ecuación (4.6). Si k es el número de cuentas/seg que se miden en el detector y b el número de cuentas/seg del ruido de fondo, entonces el valor neto de cuentas/seg, r, se calculará

$$r = \frac{k}{1 - k\tau} - b$$

siendo τ el tiempo muerto del detector.

4.3 Detectores gaseosos. Contador Geiger-Müller

La primera idea de estos contadores se debe a Rutherford y Geiger[1] quienes observaron que era posible amplificar la señal en un detector de gas.

Estos detectores utilizan la ionización ($N_\pm$ pares $e^- X^+$) producida por la partícula cargada, proporcional a la energía perdida en el gas del detector. En efecto, la energía perdida dE/dx, calculable por la fórmula de Bethe, es debida a los procesos de:

(1) excitación del átomo X: $q + X \rightarrow \ q + X^\star$ (para gases nobles, $\sigma \sim 10^7$ barn y potencial de excitación $\sim$ 10 eV)

(2) ionización, $qX \rightarrow \ qX^+e^-$ (para gases nobles, $\sigma \sim 10^8$ barn, potencial de ionización $\sim$ 15 eV). Este proceso tiene mayor umbral que el anterior. A veces se producen e^- muy energéticos (rayos δ), que a su vez, ionizan.

La señal básica (los $N_\pm$ pares) es amplificada gracias a un campo eléctrico creado entre el ánodo y el cátodo del contador, produciendo un incremento del voltaje o sea una señal eléctrica:

$$\Delta V = \frac{AN_\pm e}{C_0 L} \tag{4.10}$$

siendo A la ganancia o factor de amplificación, L, la longitud del detector, $C_0 = 2\pi\epsilon/\ln(r_c/r_a)$ la capacitancia por unidad de longitud del detector y ϵ, la constante dieléctrica del gas.

Se supone un detector de forma cilíndrica, con r_c y r_a los radios del cátodo y del hilo anódico respectivamente. La tensión aplicada al ánodo es V_0, y el cátodo, cuya pared cilíndrica es conductora, se conecta a la masa (véase la figura 4.4).

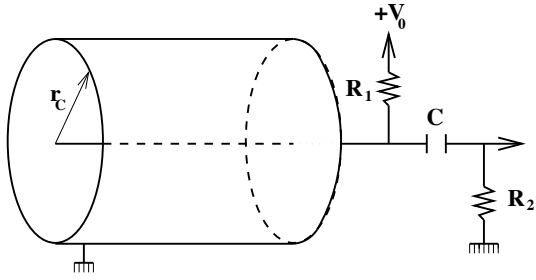


Figura 4.4: Modelo de un contador gaseoso.

Al aplicar la tensión V_0, el campo eléctrico E en el interior del contador es

$$E(r) = \frac{C_0 V_0}{2\pi\epsilon r} = \frac{V_0}{r\ln(r_c/r_a)}$$

[1] *Proc. Roy. Soc.*, **A81** (1908) 141.

Se suele tener una capacidad, C, en el ánodo para aislar V_0 de la señal, cumpliéndose que $C >> C_0$, ya que $C_0 \sim 10$ pF/m, es muy pequeña.

El mismo diseño de la figura 4.4 sirve para obtener tres tipos de detectores, cuyas señales pueden compararse utilizando (véase la figura 4.5) la curva de Montgomery (1941):

1. Cámara de ionización.
2. Cámara proporcional.
3. Contador Geiger-Müller.

Para la mejor comprensión, se tomarán dos tipos de partículas:

1) Un muón (μ) cósmico, relativista, que normalmente creará unos 50 pares $e^- X^+$ en 1 cm de gas. Recuérdese que $w \sim 35$ eV y la pérdida de energía en 1 cm de gas Ar es de unos 2 keV.

2) Una partícula α de una fuente radiactiva (~ 5 MeV), que dejará unos 10^4 pares $e^- X^+$ al atravesar 1 cm de gas.

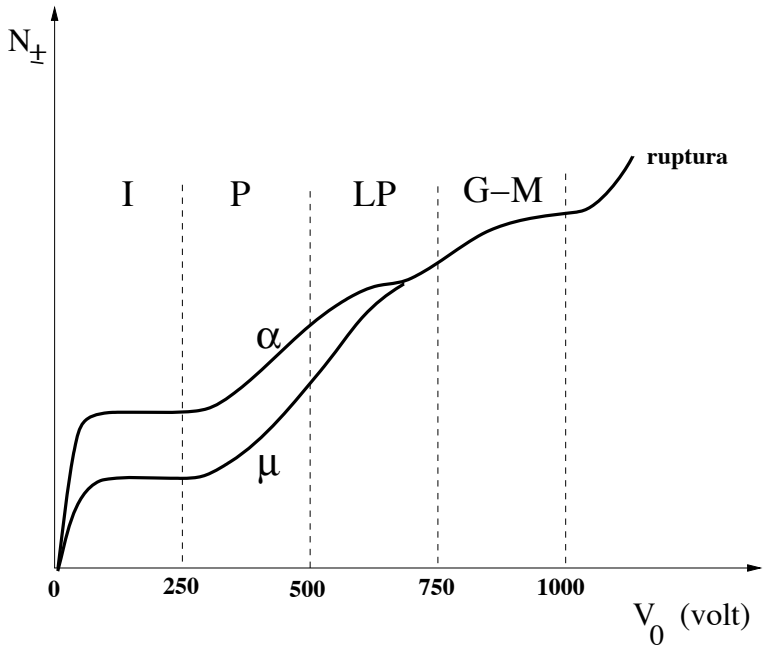


Figura 4.5: La curva de Montgomery.

En función de V_0 se distinguirán los siguientes fenómenos:

a) Recombinación, fenómeno que tendrá lugar para $V_0 \sim 0$. Hay emisión de γ como consecuencia del proceso $X^+ + e^- \rightarrow X + \gamma$. El número de iones recombinados será $dn = \beta n_+ n_- dt$, con β coeficiente de recombinación que dependerá del gas. Se tendrá $dn = \beta n^2 dt$, por lo que

$$\boxed{n = \frac{n_0}{1 + \beta n_0 t}} \tag{4.11}$$

siendo n_0 la concentración inicial de iones. La vida media de un ión (para recombinarse) $\tau = \frac{1}{\beta n_0}$ da el orden de magnitud de duración del proceso. Valores normales de β van de 10^{-6} a 10^{-8} cm^{3}s^{-1}.

b) Cámara de ionización (I). En la zona $V_0 < 250$ V, las señales son proporcionales a la ionización producida (que a su vez es proporcional a la pérdida de energía dE/dx). Se mantendrá la relación $\Delta V_\alpha / \Delta V_\mu \approx 10^4/50$. Por eso reciben el nombre de cámaras de ionización.

La señal será $\Delta V = \frac{\Delta Q}{C} = \frac{N_\pm e}{C}$, o sea, al introducir la carga del electrón

$$\boxed{\Delta V\,(\text{Volt}) = 1,6 \times 10^{-7} \frac{N_\pm}{C\,(\text{pF})}} \tag{4.12}$$

una señal extremadamente débil ($<$ mV).

c) Cámara proporcional (P). Hasta unos 500 V, la energía de los e^- primarios, acelerados por el campo eléctrico más intenso, permite ionizar a su vez. Se forma una cascada secundaria. La señal es ahora

$$\boxed{\Delta V\,(\text{Volt}) = 1,6 \times 10^{-7} \frac{A N_\pm}{C\,(\text{pF})}} \tag{4.13}$$

siendo A el factor de amplificación, o ganancia, función de V_0. Para obtener ganancias del orden de $10^6 - 10^7$, es necesario mezclar gases. En el régimen proporcional se sigue teniendo $\Delta V_\alpha / \Delta V_\mu \approx 10^4/50$. Al aumentar la tensión hasta los 750 V, fenómenos de carga espacial limitan la señal y se entra entonces en una zona de proporcionalidad limitada (LP).

d) Contador Geiger-Müller (GM). Para valores aún mayores, alrededor de 1000 V, los átomos excitados cerca del ánodo, emiten fotones que pueden a su vez producir más electrones dando lugar a una reacción en cadena (descarga). Se entra en la región llamada de Geiger-Müller. La descarga se para gracias a la presencia de gases que puedan absorber los fotones (*quenching*). En la zona Geiger, se observa un *plateau*, en el que la saturación de la señal no permite distinguir entre distintas ionizaciones primarias. Así, ahora se tendrá que $\Delta V_\alpha / \Delta V_\mu = 1$.

Si se continúa aumentando V_0, se llega a la ruptura del contador.

En todos estos detectores gaseosos, la resolución energética es la vista en (4.3):

$$R = 2,35\sqrt{\frac{Fw}{E}}$$

con F factor de Fano para gases, $F \leq 0,1$ y w, energía necesaria para crear un par $e^- X^+$, $w \approx 35$ eV para el aire y $w \approx 30$ eV para gases.

Estos tres tipos de detectores gaseosos todavía se usan en la práctica. En los experimentos de física de altas energías se utilizan variantes de estos detectores gaseosos tales como: las MWPC (cámaras proporcionales multi-hilos), las *cámaras de deriva* y más recientemente las TPC (cámaras de proyección temporal), capaces de medir las tres coordenadas espaciales de la trayectoria de las partículas cargadas.

4.3.1 Movimiento de cargas en gases

La teoría cinética de los gases enseña que las velocidades de e^- y X^+, en equilibrio térmico sigue una distribución de Maxwell con velocidad media

$$v_{\mathrm{T}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

lo que a temperatura ambiente (T = 300 K), implica $v_{\mathrm{T}}^- \sim 10^6$ cm s^{-1} y $v_{\mathrm{T}}^+ \sim 10^4$ cm s^{-1}. Los recorridos libres medios de los iones entre choques pueden calcularse mediante la conocida expresión $\lambda = \frac{1}{n\sigma}$. Si se estima la sección eficaz geométrica $\sigma = \pi R^2$ con $R \sim 1$ Å, se obtiene $\lambda \sim 10^{-5}$ cm. Los iones tienen recorridos muy pequeños entre choques.

La velocidad de deriva en presencia de un campo eléctrico es

$$v^{\pm} = \mu^{\pm}\mathcal{E}$$

con $\mu^{\pm}$ la movilidad del ión correspondiente. Esta velocidad se superpone a la térmica, $eV = \frac{3}{2}kT$, que para $T = 300$ K vale unos 0,04 eV y, en general, es mucho más pequeña. Por ejemplo para el argón, $\mu^+ = 1200$ cm$\cdot$ s^{-1}/(V$\cdot$ cm^{-1}), y μ^- (para los e^-) es unas 10^3 veces mayor.

4.3.2 Avalancha

Se llama así al proceso de multiplicación de los e^- secundarios, formando una especie de gota. Si α es la probabilidad de ionización por cm ($\lambda = 1/\alpha$ es entonces el recorrido libre medio de un e^-), por tanto, a partir de n electrones, el número de e^- creados en un recorrido dx será $dn = n\alpha dx$, con lo que

$$\boxed{n = n_0 e^{\alpha x}} \tag{4.14}$$

O sea, que el factor de amplificación es

$$\boxed{A = \frac{n}{n_0} = e^{\alpha x}} \tag{4.15}$$

cuyo límite es $\alpha x \approx 20$, llamado límite de Raether, que permite valores del factor de amplificación hasta $A \leq 10^8$. Más allá hay ruptura.

4.3.3 Forma del pulso electrónico

Se ha visto que para una cámara con capacitancia por unidad de longitud C_0, la señal obtenida al paso de una partícula es

$$\Delta V = \frac{A N_{\pm} e}{C_0 L} \tag{4.16}$$

siendo L la longitud del cilindro del contador. Es fácil demostrar que la forma del pulso debido a una carga en r es $V(r) = -\frac{C_0 V_0}{2\pi\epsilon} \ln(r/r_a) = -\frac{Q}{2\pi\epsilon L} \ln \frac{r(t)}{r_a}$, luego

$$\boxed{V(t) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon L} \ln\left(1 + \frac{t}{t_0}\right)} \tag{4.17}$$

en donde la constante $t_0 = \frac{\pi\epsilon r_a^2}{\mu C_0 V_0}$, lo que se obtiene al integrar la velocidad de deriva $v_d = \frac{dr}{dt} = \mu\mathcal{E} = \mu \frac{V_0}{\ln(r_c/r_a)} \frac{1}{r}$, que al integrar da

$$r = \left\{ r_a^2 + \frac{2\mu V_0}{\ln(r_c/r_a)} t \right\}^{1/2}$$

Posteriormente la señal se amortigua al pasar por un circuito diferenciador con constante de tiempo $\tau = RC$, de forma que para $t = \tau$ el pulso queda reducido a $V_0/e = 0,37 \times V_0$.

4.4 Detectores de centelleo. Fotomultiplicadores

Se basan en la emisión de luz (luminiscencia) al desexcitarse los átomos, después de haber sido excitados por el paso de las partículas cargadas. Este mecanismo es complejo y diferente para materiales orgánicos e inorgánicos. En los primeros, es la desexcitación de los estados moleculares (véase la figura 4.6) la que produce radiación ultravioleta. En los segundos (cristales), la captura de electrones por impurezas (los *centros de activación* del cristal) producen emisión de luz al desexcitarse.

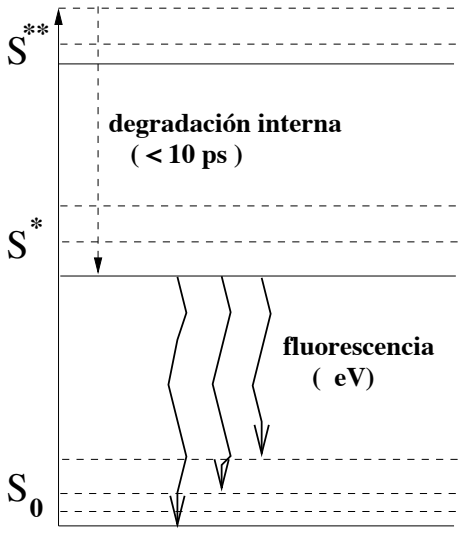


Figura 4.6: Emisión de luz de centelleo.

La emisión de luz (fotones) sigue una ley exponencial,

$$N = \frac{N_0}{\tau_d} e^{-t/\tau_d}$$

y se distinguen dos tipos de emisión: fluorescencia, muy rápida ($\tau \sim 10^{-8}$ seg.) y fosforescencia, que puede llegar a $\tau_d \sim \mu$s, o incluso horas. Por supuesto, para física de partículas se prefieren los materiales con tiempos de desexcitación τ, rápidos.

El primer detector de este tipo fue el *spinthariscope* de Crookes (1903), usado por Geiger y Marsden (el famoso experimento de difusión $\alpha + Au$ de Rutherford). El material era SZn. Pero con el descubrimiento del fotomultiplicador (PM), por Curran y Baker en 1944, se impuso extraordinariamente el uso de centelleadores. Su fiabilidad pronto excedió a la de los contadores gaseosos.

4.4.1 Características generales

Un montaje típico de un detector de centelleo puede observarse en la figura 4.7.

La información que proporciona es:

1. sensible a la energía depositada (respuesta lineal),
2. respuesta rápida (buen *timing*),
3. capaz de identificar el tipo de partícula por el tipo de pulso producido (*pulse shape discrimination*).

y se exige de ellos:

1. gran eficiencia de emisión de luz,
2. transparencia a la radiación fluorescente,
3. espectro de emisión similar al de los fotomultiplicadores y
4. tener una constante τ_d muy corta.

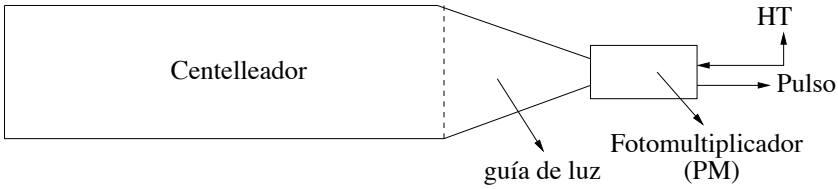


Figura 4.7: Diseño de un contador de centelleo.

4.4.2 Tipos de materiales centelleadores

A Orgánicos: hidrocarburos aromáticos con anillos de benceno. Muy rápidos ($\tau_d \sim$ ns.). La luz es debida a la desexcitación de electrones de valencia en orbitales $\pi-$moleculares (véase la figura 4.6). La luz emitida no es fácilmente absorbida ya que hay muchos estados vibracionales y la energía del fotón es menor que la necesaria para excitar el electrón desde S_0 (estado fundamental). Todas las transiciones entre estados singlete (S, S^*) son rápidas. Entre tripletes son lentas. Se tiene

$$N \sim Ae^{-t/\tau_f} + Be^{-t/\tau_s}$$

siendo el término rápido (τ_f) dominante.

A continuación se realiza un sencilla clasificación de los diferentes tipos de centelleadores orgánicos.

a) Cristales: antraceno ($C_{14}H_{10}$), patrón de luminosidad ($\tau \sim 30$ ns); trans-stilbeno; naftaleno ($C_{10}H_8$). No muy isótropos y de difícil corte.

b) Líquidos: se suele usar dopante centelleador, por ejemplo: p-terfenil ($C_{18}H_{14}$), PBD ($C_{20}H_{11}ON_2$), PPO ($C_{15}H_{11}NO$), POPOP ($C_{24}H_{16}N_2O_2$) disueltos en concentraciones del orden de 3 g/ℓ en disolventes tales como xyleno, tolueno, benceno, fenilclorohexano, etc.

c) Plásticos: se usan los mismos centelleadores que en el caso anterior, pero ahora se disuelven en concentraciones del orden de unos 10 g/ℓ en plásticos sólidos como poliviniltolueno, polifenilbenceno o poliestireno.

Son los más fáciles de utilizar y de obtener industrialmente. El espectro de γ va de unos 350 a unos 500 nm y tienen pico de emisión en la zona de ≈ 440 nm. Son muy rápidos ($\tau \sim 2$ ns).

B Cristales inorgánicos. Son cristales alcalinos con impurezas activadoras. El más conocido es el $NaI(T\ell)$. También el $CsI(T\ell)$. Son higroscópicos y producen señal lenta. Otros ejemplos son $CsI(Na)$ y $LiI(Eu)$.

El BGO (permanganato de bismuto: $Bi_4Ge_3O_{12}$) y BaF_2 no son higroscópicos. Son más eficientes pero con respuesta luminosa menor.

C Gases. Generalmente los gases nobles. También el N_2. Emiten en el UV; por ello se necesita utilizar material *wls* (*wave length shifter*).

D Vidrios. Como el silicato de boro.

4.4.3 Respuesta luminosa

La respuesta luminosa de un centelleador es la energía necesaria para crear un γ de centelleo: $\epsilon = \frac{\Delta E}{N_\gamma}$. Cuanta más energía pierda una partícula al atravesar un centelleador, más fotones de centelleo se producirán. Recuérdese que en un material de densidad $\rho \approx 1$ gr/cm^3, como en el caso de los plásticos, una partícula relativista pierde aproximadamente 2 MeV/cm.

La respuesta luminosa puede entenderse como la eficiencia del detector para producir una señal. A esta eficiencia habrá que añadir la del fotomultiplicador, que suele ser $< 30\,\%$.

La siguiente tabla muestra la respuesta luminosa de materiales centelleadores frecuentemente utilizados:

	$\epsilon = eV/\gamma$
antraceno	60
NaI	25
plásticos	100
BGO	300

La emisión luminosa es lineal con la energía ($N_\gamma \propto E$), pero existe dependencia con la temperatura, excepto en los cristales inorgánicos.

La forma del pulso luminoso permite (en centelleadores líquidos) discriminar el tipo de partícula incidente, sobre todo entre n y γ.

4.4.4 Eficiencia en el transporte de luz

En el dispositivo de la figura 4.7, la luz producida por el paso de una partícula en cualquier punto del detector, debe llegar al fotocátodo del fotomultiplicador para que dé una señal. Existen diversas pérdidas de los fotones que hay que conocer.

La propia luz de centelleo, al propagarse por el centelleador se atenúa según la ley de atenuación: $N(x) = N_0 e^{-\mu x}$. El coeficiente μ es el coeficiente de atenuación de la luz en el medio.

La propagación de la luz de centelleo se realiza por reflexión total. Sean $n = 1,58$ y $n_0 = 1,0$ los índices de refracción del centelleador y del aire, respectivamente. Un fotón incide con un ángulo θ. El ángulo crítico es $\sin\theta_c = \frac{n_0}{n}$, y se toma respecto a la perpendicular a la superficie del centelleador. La fracción de luz transmitida será:

$$f = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\theta_c} 2\pi \sin\theta d\theta = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{n^2-1}}{n}\right) \tag{4.18}$$

o sea, para $n = 1,58$, $f = 14,3\,\%$.

También habrá que tener en cuenta las pérdidas en la guía de luz, así como, por último, el teorema de Liouville, que dice que el porcentaje máximo de fotones que entraran en el fotomultiplicador viene dado por el cociente entre superficies del fotomultiplicador y del centelleador $f_L = \frac{S_{PM}}{S_C}$.

4.4.5 Fotomultiplicadores (PM)

Son tubos electrónicos que convierten pulsos de luz en pulsos de corriente eléctrica. Sus componentes son el fotocátodo, los dínodos y el ánodo.

a) Fotocátodo. Hecho de material semiconductor, por ejemplo una mezcla de Sb con un elemento alcalino (Na, K, Cs), con gran probabilidad de efecto fotoeléctrico. La energía del electrón arrancado es $E_e = E_\gamma - B_e$, siendo B_e la energía de ligadura del electrón en su correspondiente capa atómica. Es la llamada *work function*. Hablando de fotomultiplicadores es costumbre distinguir entre *fotoelectrones*, nombre que reciben los electrones emitidos por efecto fotoeléctrico, que se denominarán γ_e y los fotones que inciden en el cátodo, γ_{inc}.

   La eficiencia cuántica del cátodo es

$$\eta(\lambda) = \frac{\text{número de fotoelectrones } \gamma_e}{\text{número de fotones incidentes } \gamma_{\text{inc}}}$$

   es decir, la probabilidad de efecto fotoeléctrico sobre el cátodo y suele valer 20 ó 30 % para fotones de una longitud de onda de unos 440 nm.

b) Dínodos. En ellos se produce la multiplicación de electrones como consecuencia del choque de los electrones, acelerados por el campo eléctrico

existente, sobre la superficie del dínodo. En cada dínodo se produce emisión secundaria de δ electrones por electrón incidente. El material de los dínodos suele ser de mezclas tales como $Ag-Mg, Cu-Be$ ó $Cs-Sb$.

c) Ánodo. En él se recoge la avalancha final de electrones dando lugar al pulso eléctrico, que en general será un voltaje en función del tiempo, $V(t)$.

La ganancia del PM es el factor de amplificación de la cadena de dínodos:

$$G = \delta^n = (kV_d)^n \tag{4.19}$$

siendo n el número de dínodos (entre 10 y 14). Ganancias típicas son $G \approx 10^7$ y $\delta \sim 8-10$. V_d es el potencial entre dínodos. El mínimo voltaje total V_{T} para una ganancia G vale, $V_{\mathrm{T}} = nV_d = \frac{n}{k}G^{1/n}$ y a partir de $\frac{dV_{\mathrm{T}}}{dn} = 0$ se obtiene:

$$\boxed{n = \ln G} \tag{4.20}$$

y la variación de G respecto al V_{T} será

$$\frac{dG}{G} = n\frac{dV_d}{V_d} = n\frac{dV_{\mathrm{T}}}{V_{\mathrm{T}}} \tag{4.21}$$

es decir, un 1 % de cambio en V_{T} produce un n % de cambio en la ganancia.

Forma del pulso electrónico

El circuito equivalente de un PM es el de un generador de corriente. Si N es el número de fotoelectrones se tiene que cumplir

$$I(t) = \frac{GNe}{\tau_s}e^{-t/\tau_s}$$

y como $I(t) = \frac{V}{R} + C\frac{dV}{dt}$, llamando $\tau = RC$,

$$V(t) = \begin{cases} \frac{GNeR}{\tau_s^2}te^{-t/\tau_s} & \text{para} \quad \tau = \tau_s \\ -\frac{GNeR}{\tau - \tau_s}\left[e^{-t/\tau_s} - e^{-t/\tau}\right] & \text{para} \quad \tau \neq \tau_s \end{cases}$$

En general C se suele mantener pequeña ($\sim$ pF) para maximizar la amplitud.

Una forma típica de un pulso electrónico de un detector de centelleo puede verse en la figura 4.8.

Suelen darse dos modos de operación:

- corriente, con amplitudes pequeñas y *rise-time* rápido. Caso $\tau << \tau_s$.
- voltaje, más lento y menos sensible a fluctuaciones. Es útil para bajas frecuencias y $\tau >> \tau_s$.

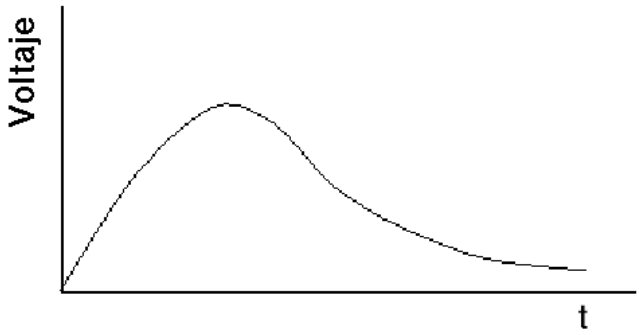


Figura 4.8: Pulso electrónico típico de un detector de centelleo. La anchura de la señal suele ser de unas decenas de nanosegundos (10^{-9} s).

Resolución temporal

Los centelleadores, acoplados a fotomultiplicadores, suelen ser detectores muy rápidos. Por ello tienen aplicaciones importantes en la medida de tiempos y es muy importante conocer su resolución temporal.

La resolución temporal, en inglés *jitter*, viene causada, principalmente, por dos tipos de fluctuaciones:

- fluctuaciones del tiempo de tránsito de los electrones, debido a las trayectorias en el campo eléctrico. Suele valer $\sim$ 0,5 ns.

- fluctuaciones debidas al ruido, que a su vez suele clasificarse en

  i) negro o termoiónico, que obedece la ecuación de Richardson $I = AT^2 e^{-e\phi/kT}$, del orden del nA; y

  ii) estadístico, con desviación cuadrática media (rms) dada por

$$< \Delta I^2 >= Ie/\tau$$

Otros factores ambientales que afectan el funcionamiento de los PM son la luz y el campo magnético $\mathcal{B}$. Incluso el pequeño campo magnético terrestre (cuya magnitud es del orden del gauss) afecta a los fotomultiplicadores sensibles. Por ello, siempre se suelen proteger con un cilindro exterior metálico (*mu-metal* y hierro) para apantallarlo.

4.5 Detectores de estado sólido

Basados en las propiedades de los cristales de Si y Ge. Su principio de operación es similar al de los contadores gaseosos, salvo que ahora se crean pares electrón-hueco en vez de pares e^- −ion. Son buenos detectores de partículas cargadas y γ. En efecto, el parámetro más importante que caracteriza las propiedades de los semiconductores como detectores de partículas es la energía necesaria para producir un par e^- −hueco: $\omega_{Si} = 3,62$ eV para el Si (a 300 K) y es aún menor para el Ge: $\omega_{Ge} = 2,96$ eV (a 77 K).

Así por ejemplo, un protón de 3 MeV pierde toda su energía en 100 μm en el Si (una partícula α de 10 MeV en 40 μm).

4.5.1 Semiconductores

Son cristales tetravalentes (Si, Ge) con impurezas tipo p (B, In, Ga) o tipo n (P, As, Sb), tales que el *gap* entre las bandas de valencia y conducción es del orden de $E_g \sim 1$ eV, comparado a los 6 eV de los aislantes.

Para temperaturas > 0 K, algunos e^- y huecos se liberan respectivamente en las bandas de conducción y valencia. Aparecen dos tipos de corriente, la de los e^-, donantes en la banda de conducción y la de los huecos, receptores minoritarios en la banda de valencia.

En equilibrio térmico la concentración de portadores

$$np = n_i^2 = AT^3 e^{-E_g/kT}$$

ya que $N_v \sim T^{3/2} e^{-E_g/kT}$ y $n_i = \sqrt{N_v N_c}$.

Las concentraciones típicas son muy bajas; por ejemplo a T = 300 K se tiene:

$N_i \sim$ 2,5$\times 10^{13}$ cm^3 para el Ge (o sea 1 átomo en 10^9)
1,5$\times 10^{10}$ cm^3 para el Si (o sea 1 átomo en 10^{12})

La recombinación de pares es debida a la presencia de impurezas, que deben mantenerse $< 10^{10}$ cm^{-3}. Sin embargo existen impurezas con efectos positivos: dopantes tipo n o tipo p.

4.5.2 La unión $p - n$ como detector

En la unión $p - n$ se produce una compensación de portadores que crean un potencial eléctrico que impide la existencia de cargas en la unión. Aparece la denominada zona desierta, visible en la figura 4.9.

Un sencillo modelo de carga espacial permite calcular el potencial eléctrico y el tamaño de la zona desierta (véase la figura 4.10). Sean $N_{\rm D}$ y $N_{\rm R}$ las densidades de donantes y receptores de las zonas n y p, respectivamente. Si x_n y x_p dan los tamaños de la zona sin carga en las respectivas partes de la unión en el cristal (que es neutro), se tendrá que cumplir: $N_{\rm D} x_n = N_{\rm R} x_p$.

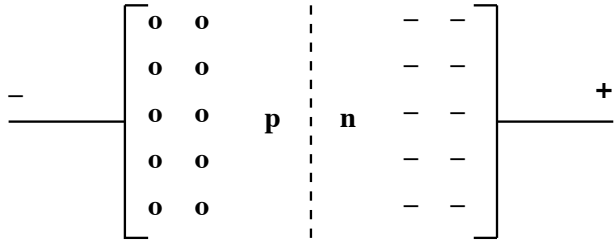


Figura 4.9: Principio de operación de una unión $p-n$ como detector de partículas.

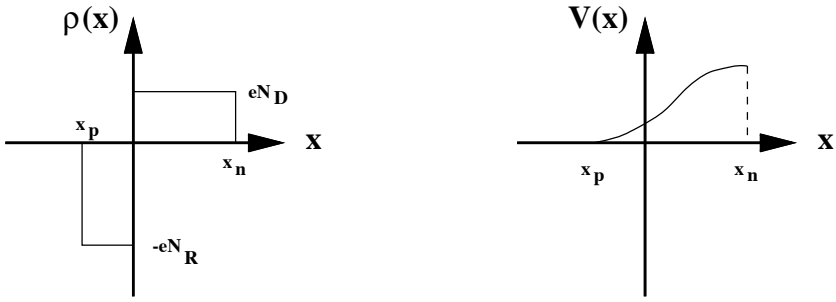


Figura 4.10: Distribución de carga y potencial en la unión $p-n$.

El potencial es la solución de la ecuación de Poisson,

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\epsilon} \tag{4.22}$$

siendo ϵ la constante dieléctrica del semiconductor. La solución es:

$$V(x) = \mp\frac{eN_i}{\epsilon}\left(x^2 \mp x_i x\right) + C_i \tag{4.23}$$

donde el potencial de contacto (en x_n) $V_0 = \frac{e}{2\epsilon}\left(N_{\rm D}x_n^2 + N_{\rm R}x_p^2\right)$. Las constantes de integración desaparecen al exigir $V(x) = V_0$ en x_n y $V(x) = 0$ en $-x_p$. Se puede deducir la dimensión de la zona sin carga:

$$x_n = \left\{\frac{2\epsilon V_0}{eN_{\rm D}(1+N_{\rm D}/N_{\rm R})}\right\}^{1/2} \tag{4.24}$$

que también se cumple para x_p, sustituyendo $N_{\rm D}$ por $N_{\rm R}$ y viceversa con lo que

$$d = x_p + x_n = \sqrt{\frac{2\epsilon V_0}{e}\frac{N_{\rm R}+N_{\rm D}}{N_{\rm R}N_{\rm D}}}$$

La densidad de corriente $J = \rho v = \rho\mu\mathcal{E} = \sigma\mathcal{E}$, siendo $\sigma = r^{-1}$ la conductividad y r la resistividad. Para un cristal tipo p, la densidad de receptores $N_{\mathrm{R}} >> N_{\mathrm{D}}$ se cumple que $d \sim x_n$ y como $r^{-1} = e n_{\mathrm{D}} \mu_e$ se verifica que:

$$d \approx \sqrt{2\epsilon\rho_n\mu_e V_0}$$

es decir, da el tamaño de la zona desierta, que es prácticamente la región n. Por ejemplo para el Si de alta resistividad $r \sim 20\ K\Omega$·cm y $V_0 = 1$ V, queda $d \approx 75\ \mu$m lo que da lugar a una zona desierta muy pequeña.

4.5.3 Potencial de polarización

Si se aplica un potencial externo (potencial de polarización V_B), puede ampliarse el tamaño de la zona desierta (véase la figura 4.9).

Al aumentar el tamaño, la capacitancia disminuye, porque $C = \epsilon\frac{S}{d}$, lo que mejora el ruido, pero sobre todo aumenta la zona desierta que es el verdadero detector. Se obtienen tamaños del orden del mm.

No debe aumentarse V_B indiscriminadamente. Puede forzarse la conducción eléctrica a través del cristal llegando a romperse. El límite viene dado por la resistividad.

4.5.4 Características de los detectores de estado sólido

a) Se realizan contactos óhmicos (p^+,n^+), conectando preamplificadores de carga de bajo ruido.

b) La energía necesaria para crear un par e^--hueco es $w = 3,62$ (2,96) eV para el Si (Ge).

c) La señal $V = \frac{Q}{C} = \eta\frac{E}{wC}$ es lineal si la partícula pierde toda la energía en el detector. η es la eficiencia de colección de portadores.

d) La resolución es $R = 2,35\sqrt{\frac{Fw}{E}}$, con $F = 0,12$ para el Si, Ge. Así por ejemplo, para una partícula α de 5 MeV, R = 0,07 % (3,5 keV), que en la práctica es mayor (unos 18 keV) debido al ruido introducido por la electrónica.

e) El ruido, debido a la corriente de fuga, es del orden de nA/cm^2. Las impurezas o los efectos de superficie aumentan esta corriente hasta μA/cm^2. Se suele medir en equivalentes de carga (ENC, carga equivalente al ruido). Si V_{rms} es el ruido, entonces, $ENC = e\frac{V_{rms}}{w}C$. Es importante mantener C pequeña.

f) El pulso es rápido (del orden del ns).

4.6 Detección de partículas neutras

La detección de partículas neutras es posible gracias a la detección de las partículas cargadas producidas en la interacción de dichas partículas neutras.

Sólo la interacción electromagnética de las partículas cargadas produce señales observables y accesibles en los detectores.

La técnica empleada en la detección de las partículas neutras dependerá fundamentalmente de la energía y del tipo de interacción. Para fotones de baja energía se pueden construir buenos detectores de γ como ya se ha visto (NaI, Ge, BGO, etc.). A alta energía se han desarrollado los calorímetros, detectores de partículas neutras por excelencia que se han especializado en calorímetros electromagnéticos y calorímetros hadrónicos.

En todo caso, la detección de partículas neutras está basada en el tipo de su interacción con la materia:

- γ, electromagnética
- n, fuerte
- ν, débil

y éste será el enfoque que se utilizará en lo que sigue.

4.6.1 Detección de neutrones por interacción fuerte

El neutrón fue descubierto en 1932 por Chadwick, como ya se ha visto, al bombardear berilio con partículas α de una fuente de polonio; es decir, ${}^{9}_{4}Be(\alpha,n){}^{12}_{6}C$, seguido de un blanco de parafina en el que detectó la colisión elástica $n + p \rightarrow p + n$.

El neutrón, en estado libre, tiene una vida media muy larga: τ_n=898 $\pm$ 16 seg. La desintegración del neutrón es debida a la interacción débil. Es la conocida desintegración beta del neutrón. Antes de desintegrarse sólo tiene colisiones por interacción fuerte.

La interacción fuerte es menos probable que la interacción electromagnética. Ésta tiene un alcance infinito y la fuerza fuerte tiene un alcance del orden del fm (10^{-13} cm). Como la materia está prácticamente vacía, los neutrones penetran mucho más que las partículas cargadas, porque tienen menos probabilidad de encontrar un núcleo en su recorrido.

Los neutrones pueden tener diversos tipos de reacciones con la materia:

- Colisiones elásticas con núcleos; por ejemplo $A(n,n)A$. Así los neutrones van perdiendo energía.
- Reacciones inelásticas; $A(n,n)A^{\star}$, o con producción de más de un neutrón. El núcleo en el estado final, excitado, puede emitir fotones al desexcitarse.
- Captura radiativa. Importante a bajas energías porque la sección eficaz varía $\sigma \sim 1/v$, siendo v la velocidad del neutrón. Las reacciones son $n + A \longrightarrow \gamma + A'$, siendo A' un isótopo de A con un neutrón más. A veces aparecen superpuestos varios picos en las secciones eficaces (resonancias).

- Reacciones de captura del neutrón. Son procesos importantes a baja energía (eV al keV), como por ejemplo reacciones tipo $(n,p),(n,d),(n,\alpha),(n,t)$.
- Fisión por captura neutrónica. Importante a energías *térmicas* ($E \sim kT = 1/40$ eV).
- Reacciones a gran energía.

En los detectores de neutrones que existen en el laboratorio, las reacciones de interés para detectar neutrones $térmicos$ utilizan frecuentemente el boro, $^{10}B(n,\alpha)^{7}Li$ + 2,78 MeV, que, como puede verse es una reacción de captura neutrónica.

El estudio de las reacciones de los neutrones es muy importante porque determinan la estructura de los núcleos de los reactores de fisión, y de sus envolventes. Las secciones eficaces están generalmente bien determinadas, y pueden fácilmente encontrarse en la bibliografía especializada.

El fenómeno más importante en los reactores de fisión es conseguir que los neutrones pierdan energía (desde algunos MeV) hasta termalizarse (una fracción de eV). Este proceso se denomina moderación. Se consigue simplemente por choques elásticos con material ligero (grafito, agua pesada). En efecto, un neutrón de energía E_n que colisiona elásticamente con un núcleo de masa A, después del choque la energía del neutrón E'_n, emitido en el ángulo θ^* en el centro de masas de la reacción cumple:

$$\frac{E'_n}{E_n} = \frac{A^2 + 1 + 2A\cos\theta^*}{(A+1)^2} \tag{4.25}$$

de donde se confirma que cuando A es muy ligero ($A \sim 1$), se logra el máximo de pérdida de energía (supóngase por ejemplo $\cos\theta^* = -1$). Si se utilizase hidrógeno como blanco, en unos diez choques, el neutrón se termalizaría.

4.7 Detectores Cherenkov

El denominado efecto Cherenkov fue descubierto en los años 1930 por el físico ruso Cherenkov, al observar las emisiones azuladas de una piscina de agua que contenía materiales radiactivos de un reactor.

El efecto Cherenkov es la emisión coherente de radiación (luz entre 350-500 nm, que corresponde a un rango de longitudes de onda apto para utilizar fotomultiplicadores), debida a la excitación polarizada de los átomos de un medio material, llamado radiador, cuando una partícula atraviesa dicho medio con una velocidad mayor que la velocidad de propagación de la luz en ese medio:

$$v > c/n$$

siendo n el índice de refracción del medio.

Existirá una velocidad umbral a partir de la cual se producirá el efecto Cherenkov:

$$\beta_u = \frac{1}{n} \tag{4.26}$$

lo que se traduce, equivalentemente, en una energía umbral:

$$E_u = \gamma_u m c^2 = m c^2 \sqrt{\frac{n^2}{n^2 - 1}} \tag{4.27}$$

siendo m la masa de la partícula. Por ejemplo en el agua (n=1,33), $\beta_u = 0,75$, o sea que si se trata de electrones, la energía cinética mínima será $T_u^{(e)} = E_u - m_e c^2 = (\gamma_u - 1) m_e c^2 = 0,26$ MeV.

A partir del valor umbral, la emisión de luz Cherenkov se produce a un ángulo, alrededor de la dirección del movimiento de la partícula, dado por

$$\cos\theta_c = \frac{1}{\beta n} \tag{4.28}$$

El ángulo de emisión variará con β, o sea con la energía, hasta llegar a un valor máximo que vendrá dado por $\cos\theta_c^{\max} = \frac{1}{n}$ que en el caso del agua vale $\theta_c = 41^o 30'$.

Este fenómeno es particular a este tipo de emisión y se distingue de la luz de centelleo que, por el contrario, se emite de manera isótropa.

Este efecto puede visualizarse mediante la figura 4.11.

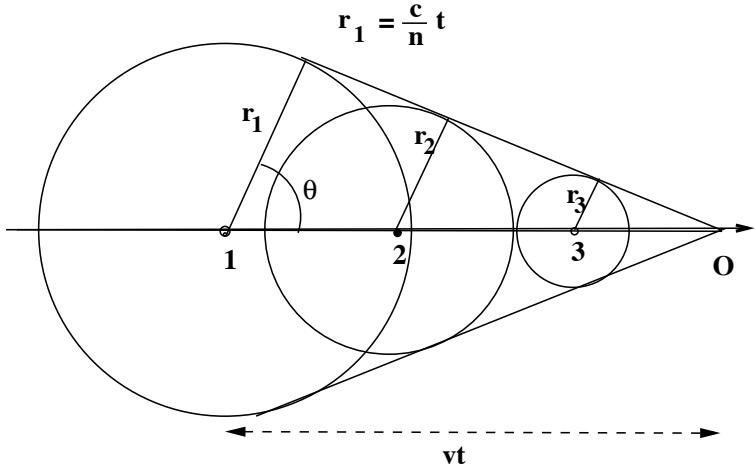


Figura 4.11: Esquema del efecto Cherenkov.

Mientras la partícula recorre la distancia del punto 1 al punto O, o sea, $\ell = vt$, el frente de la onda electromagnética se ha desplazado según la esfera de radio $r_1 = \frac{c}{n} t$. El ángulo θ_c es el de emisión de luz Cherenkov.

La electrodinámica clásica permite probar que la energía perdida por la partícula al atravesar un espesor L, emitiendo fotones de frecuencia w es,

$$\frac{dE}{dw} = Z_1^2 \alpha \frac{\hbar w}{c} L \sin^2 \theta_c$$

Suponiendo L muy delgado, puede tomarse $L = dx$ con lo que esta última expresión se puede integrar para las frecuencias w de emisión de luz Cherenkov con lo que se obtiene la pérdida de energía por unidad de recorrido,

$$\frac{dE}{dx} = Z_1^2 \alpha \frac{\hbar}{c} \int w \sin^2 \theta_c dw$$

que entre 350 nm y 550 nm, sólo representa $\sim 10^{-3}$ MeV / g$\cdot$ cm^{-2}. Por lo tanto, en los materiales sólidos (≥ 1 g$\cdot$cm^{-2}) la pérdida de energía debida al efecto Cherenkov es unas mil veces menor que la de ionización.

Así pues, se puede concluir que la pérdida de energía por unidad de recorrido vale

$$\frac{dE}{dx} = 1180 \sin^2 \theta_c \qquad \text{[eV/cm]} \tag{4.29}$$

Por ejemplo, para el agua, $n = 1,33$, una partícula relativista pierde, por emisión de fotones Cherenkov) unos 400 eV/cm, cifra que es del orden de 10^{-3} veces más pequeña que la pérdida de energía por ionización.

El espectro de fotones Cherenkov (dado que $E = N\hbar w$) sigue la ley

$$\frac{d^2 N}{dw dx} = Z_1^2 \frac{\alpha}{c} \sin^2 \theta_c$$

o sea que, en el espectro visible, el número de fotones emitidos por efecto Cherenkov por unidad de recorrido es

$$\frac{dN}{dx} = 475 \cdot Z_1^2 \sin^2 \theta_c \qquad \text{[fotones/cm]} \tag{4.30}$$

El número de fotones emitidos es muy pequeño; por ello su detección es más difícil que en el caso del centelleo. Si se compara el número de fotones emitidos por efecto Cherenkov, con el número de fotones de centelleo, por cada MeV de energía perdida por la partícula, se obtiene un factor 10^{-2}.

A los detectores Cherenkov se les suelen dar tres tipos de utilización: como detectores umbral, diferenciales o RICH.

Los detectores Cherenkov de tipo umbral suelen instalarse en experimentos de blanco fijo. Si dan señal luminosa, la partícula tiene una velocidad superior a la velocidad umbral, que dependerá del material radiador según (4.26).

Los detectores Cherenkov diferenciales, permiten medir el cono de luz Cherenkov, por lo tanto, pueden seleccionar partículas de una energía determinada. Se suelen instalar en los haces de partículas con lo que ayudan a discriminar si la partícula incidente en un blanco de un experimento es un protón, kaón o pión.

Los detectores RICH son los más modernos y completos. Están diseñados para medir el cono de luz, con lo que pueden identificar la partícula (conocer su energía y su masa) que ha atravesado el detector. Suelen utilizarse en todos los nuevos espectrómetros instalados en los colisionadores.

4.8 Calorímetros

Se llaman calorímetros a los detectores que miden la energía total de una partícula o grupo de partículas. Son particularmente útiles para medir partículas neutras de gran energía (γ, neutrones, K^0, $\overline{K}^0$). A gran energía son de un tamaño más razonable que los espectrómetros magnéticos ya que éstos crecen como $\sqrt{E}$ y los calorímetros como $\ln(E)$.

4.8.1 Calorímetros electromagnéticos

Están especializados en la detección de cascadas electromagnéticas creadas por $e^{\pm}$ y fotones. La descripción de los procesos que tienen lugar en un calorímetro electromagnético la realiza, de manera aproximada, el modelo de Heitler. Éste es un modelo muy sencillo y se basa en el concepto de que en un recorrido igual a una longitud de radiación, que puede aproximarse por la expresión $X_0 \approx 180A/Z^2$ gr·cm^{-2}, el número de partículas se dobla debido a la radiación de frenado o a la creación de pares. De esta manera, si un $e^{\pm}$ o un fotón de energía E_0 entra en un calorímetro; al cabo de t longitudes de radiación:

- el número de partículas es $N(t) = 2^t$ y
- la energía de las partículas es $E(t) = E_0/2^t$, con lo cual la energía media de las partículas ($e^{\pm}$, γ) a la profundidad t será $t(E') = \ln(E_0/E')/\ln 2$.

Se supone además que la cascada acaba cuando la energía media de las partículas es E_c, la energía crítica del medio detector. La energía crítica es aquella para la que las pérdidas de energía por ionización (descrita por la fórmula de Bethe) y la pérdida de energía por radiación (*bremsstrahlung*), coinciden. Cuando la energía media de las partículas de una cascada se aproxima a E_c, ya no hay aumento del número de $e^{\pm}$ ni de γ. Por lo tanto, el número máximo de partículas se alcanza a una profundidad

$$t_{max} = \frac{\ln(E_0/E_c)}{\ln 2} \tag{4.31}$$

siendo E_c la energía crítica. El número de partículas en el máximo es

$$N_{max} = e^{t_{max} \ln 2} = E_0/E_c \tag{4.32}$$

y la suma de recorridos de las partículas cargadas,

$$L = \frac{2}{3}\int_0^{t_{max}} N(t)\,dt \approx E_0/E_c \tag{4.33}$$

luego medir N o alguna magnitud proporcional a L, como puede ser la ionización o cualquier otro fenómeno proporcional al recorrido (centelleo, efecto Cherenkov), permite encontrar la energía E_0 de la partícula incidente.

Utilizando el método de Monte-Carlo se obtienen resultados más precisos ya que pueden tenerse en cuenta muchos detalles como la variación de las secciones eficaces con la energía, la difusión múltiple (desarrollo lateral de la cascada), las fluctuaciones estadísticas, etc. Se encuentra que

$$\boxed{t_{max} = 3{,}9 + \ln E_0} \tag{4.34}$$

con E_0 en GeV y t_{max} dado en longitudes de radiación. También se obtiene

$$\boxed{N_{max} = 8{,}46 \cdot E_0^{0{,}935}} \tag{4.35}$$

La estructura lateral de una cascada viene dada en función del radio de Moliere

$$\rho_M = \frac{7A}{Z} \qquad \text{gr·cm}^{-2}$$

de manera que el 95 % de la cascada está contenida en un radio lateral igual a $2\rho_M$.

El término dominante en la resolución energética de un calorímetro viene dado por las fluctuaciones estadísticas en el desarrollo de las cascadas y es proporcional a $E^{-1/2}$. Las fluctuaciones estadísticas están ligadas a las fluctuaciones del muestreo de la energía y globalmente siguen una distribución de Poisson puesto que la energía E_0 es proporcional a N, el número de electrones en la cascada. La resolución tendrá la forma $\sigma(N)/N = 1/\sqrt{N}$. Se pueden identificar varias fuentes de estas fluctuaciones: fluctuaciones energéticas en la cascada (muestreo), el llamado *leakage*, que da la proporción de energía que escapa del detector; el ruido; las variaciones de la ganancia; el ruido electrónico y el amontonamiento de señales (*pileup*). Estas fluctuaciones son mayores en los calorímetros hadrónicos que en los electromagnéticos, ya que aparecen más tipos de partículas (piones, neutrones, muones y neutrinos) y, por tanto, las resoluciones energéticas empeoran. A bajas energías, la contribución a la resolución energética viene de los efectos instrumentales del detector, que inducen una pequeña dependencia con el inverso de la energía (por ejemplo la anchura de los pedestales de los ADC). Finalmente, un tercer y último término en la resolución energética viene inducida por los errores de calibración y otros efectos no lineales en los elementos de lectura. Esta contribución es independiente de la energía y establece un límite en la resolución energética para altas energías. De lo dicho se desprende que el error de medida de la energía en un calorímetro se puede escribir

$$\sigma_E^2(E) = \sigma_0^2 + \sigma_1^2 E + \sigma_2^2 E^2 + \ldots \tag{4.36}$$

representando respectivamente, el error de los pedestales, las fluctuaciones de Poisson y los errores debidos a la calibración energética del detector, como se acaba de ver. A partir de esta ecuación, se puede aproximar la resolución como una suma cuadrática de tres términos

$$\frac{\sigma(E)}{E} = \frac{\sigma_0}{E} \oplus \frac{\sigma_1}{\sqrt{E}} \oplus \sigma_2 \tag{4.37}$$

Por último, cabe señalar que hay dos tipos de calorímetros según su geometría:

▶ *homogéneos*, como los formados por cristales centelleadores (ejemplo: NaI, BGO); cristales de vidrio de plomo, en los que se utiliza el efecto Cherenkov o detectores de ionización basados en argón líquido, etc. Para este tipo de calorímetros, valores típicos obtenidos son $\sigma_1 = 5\,\%$ (calorímetro de de vidrio de plomo de OPAL). En el caso del calorímetro de BGO del L3, no hay fluctuación estadística ($\sigma_1 = 0\,\%$) y la resolución viene dada por la calibración ($\sigma_2 \approx 1\,\%$).

▶ *heterogéneos* o de tipo sandwich; prácticamente formados por placas de metal (conversor pasivo, habitualmente de hierro, plomo, tungsteno o uranio) que se alternan con placas de detector (centelleadores, argón líquido, etc.). Valores típicos obtenidos son: $\sigma_1 \approx 10\,\%$ para detectores sólidos o líquidos, como el de ATLAS, o $\sigma_1 \approx 20\,\%$ para detectores de gas, como en ALEPH y DELPHI en el LEP. En estos casos se suele también tener $\sigma_2 \approx 1\,\%$. Siempre se ha supuesto que E viene dada en GeV.

4.8.2 Calorímetros hadrónicos

Su tamaño longitudinal varía según la longitud de interacción

$$\lambda = \frac{1}{n_a \sigma_{abs}} \tag{4.38}$$

siendo n_a el número de átomos por unidad de volumen y σ_{abs} la sección eficaz de absorción (hadrónica). Su valor es

$$\sigma_{abs} = \sigma_{total} - \sigma_{el} - \sigma_{qel}$$

y numéricamente, $\sigma_{abs} = \sigma_0 \times A^{0,711}$ con $\sigma_0 = 41{,}2$ mbarn. En la anterior expresión σ_{el} es la sección eficaz elástica partícula-núcleo y σ_{qel}, la cuasi-elástica, es decir, partícula-nucleón.

Los calorímetros hadrónicos suelen ser heterogéneos, pues hay que utilizar materiales con longitud de interacción elevada para que los hadrones tengan probabilidad elevada de interacción y generar una cascada hadrónica. En un calorímetro hadrónico de sandwich hierro-argón líquido se ha estudiado el desarrollo de la cascada hadrónica inducida por protones de 10 GeV. Un $20{,}6\,\%$ de la energía es invisible (se destina a proporcionar energía para romper la ligadura nuclear y producir neutrinos), y aproximadamente un $21{,}0\,\%$ de la energía es de tipo electromagnético (desintegración de π^0).

La resolución energética de los calorímetros hadrónicos es generalmente menor que en el caso de los electromagnéticos. En este caso, también se puede aproximar la resolución como una suma cuadrática de tres términos

$$\frac{\sigma(E)}{E} = \frac{\sigma_0}{E} \oplus \frac{\sigma_1}{\sqrt{E}} \oplus \sigma_2 \tag{4.39}$$

Los valores de la resolución obtenidos en calorímetros hadrónicos dependen del material pasivo y del detector utilizado. Así, tomando E en GeV, en el calorímetro de ZEUS (en el colisionador HERA), hecho de uranio más centelleador, $\sigma_1 = 34\,\%$; en los experimentos CDHS y en ATLAS (hierro+centelleador) se ha obtenido $\sigma_1 = 50\,\%$; mientras que en los experimentos del LEP (ALEPH, DELPHI y OPAL) (hierro más detector de gas) se obtuvo $\sigma_1 = 100\,\%$.

Por su reciente diseño y construcción es interesante describir el sistema de calorimetría del espectrómetro ATLAS, en fase de instalación en el CERN, en el que ha participado el grupo de investigadores del IFIC (Universidad de Valencia-CSIC).

El calorímetro hadrónico de ATLAS

Al igual que en otros espectrómetros instalados en los grandes colisionadores de partículas, el sistema de calorimetría del detector ATLAS tiene como finalidad la detección de la energía absorbida por las partículas que atraviesan los diferentes componentes del detector. El sistema está constituido por un calorímetro electromagnético de argón líquido y un calorímetro hadrónico de tejas centelleantes. Ambos son calorímetros heterogéneos o de muestreo, es decir, los elementos pasivos y activos están separados. La fracción de energía absorbida es medida en el material activo y el material pasivo es utilizado únicamente para que las partículas que lo atraviesan interaccionen en él y se vayan frenando, perdiendo su energía inicial.

El calorímetro hadrónico de ATLAS es un calorímetro no compensado, como es el caso de la gran mayoría de calorímetros hadrónicos. En este tipo de calorímetro se obtiene una respuesta diferente a las cascadas electromagnéticas y hadrónicas. Esto hace que empeore la resolución energética del calorímetro (σ_{E}/E) así como su proporcionalidad lineal con la energía (E).

Las últimas medidas de la resolución energética del calorímetro hadrónico de ATLAS con datos reales tomados en períodos de test con haz (*test-beam*) establecen un valor para la resolución energética en la detección de cascadas hadrónicas (o *jets* de partículas) del orden de

$$\frac{\sigma_{\mathrm{E}}}{E} = \frac{50\,\%}{\sqrt{E}} \oplus 3\,\%$$

El calorímetro hadrónico de tejas centelleantes de ATLAS (véase figura 4.12) está constituido por tres barriles con simetría cilíndrica, uno central y otros dos situados en los extremos del cilindro. La gran originalidad en este calorímetro hadrónico es la particular disposición geométrica de los elementos activos de

detección, las tejas centelleantes, dispuestas en planos perpendiculares a la dirección z de los haces incidentes (véase figura 4.13), y no de forma longitudinal a éstos como es el caso de la mayoría de los calorímetros hadrónicos. Este nuevo diseño optimiza la homogeneidad en el muestreo de la señal en los elementos activos.

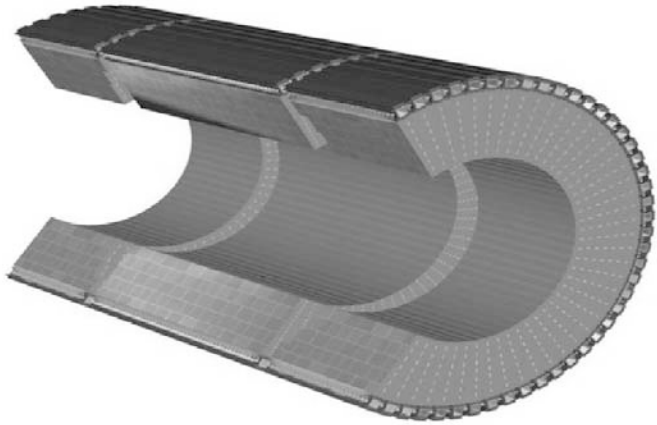


Figura 4.12: El calorímetro hadrónico de ATLAS.

Cada barril esta formado por 64 estructuras independientes con simetría azimutal denominadas módulos. Los módulos centrales tienen una longitud de unos $5{,}6$ metros mientras que los situados en los extremos miden unos 3 metros. El radio interno del detector es de $2{,}2$ metros y el radio más externo está situado a $4{,}3$ metros del punto de interacción. Cada módulo está diseñado, a su vez, como una sucesión de elementos mecánicos denominados submódulos y formados por pilas de placas de hierro de diferentes formas intercaladas con tejas centelleantes de 3 mm de espesor. Las partículas ionizantes que atraviesan las tejas centelleantes del detector producen luz con una longitud de onda en la región del ultravioleta y con una intensidad proporcional a la energía depositada por las partículas. Esta luz se propaga en el interior de la teja hasta los extremos de ésta, donde es absorbida por fibras que aumentan la longitud de onda de la luz con el fin de optimizar la eficiencia de recolección de los fotomultiplicadores. Estas fibras se denominan *Wave Length Shifting (WLS)* y están acopladas a las tejas según la dirección radial, como puede verse en la figura 4.13. La luz se propaga en su interior sin grandes pérdidas mediante reflexiones internas, y están conectadas a fotomultiplicadores que actúan como elementos de lectura.

El agrupamiento de un conjunto de fibras provenientes de diferentes tejas define regiones denominadas celdas de lectura (o de muestreo). Todas las fibras de las tejas correspondientes a una celda son leídas por dos fotomultiplicadores de forma simultánea con el fin de garantizar una suficiente recogida de luz y proporcionar redundancia en la extracción de la señal, necesaria durante los largos períodos de operación del detector.

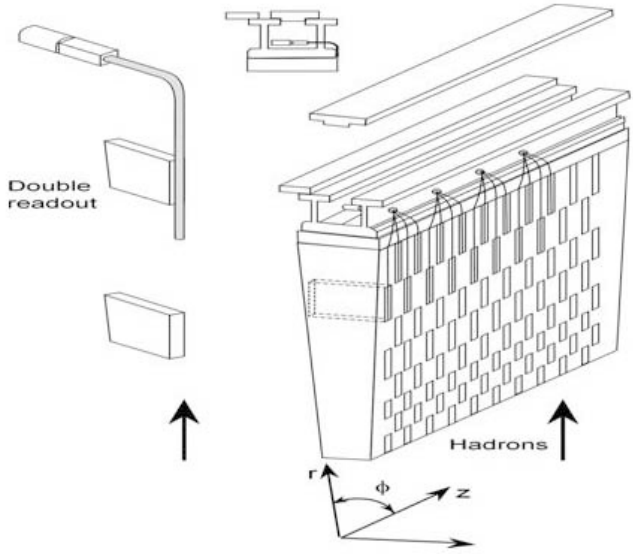


Figura 4.13: Estructura de los módulos del calorímetro hadrónico de ATLAS y detalle del contacto lateral de la lectura por fibras de las tejas centelleadoras.

La figura 4.14 muestra un esquema de las diferentes celdas de la mitad de un módulo central y un módulo completo situado en la región del extremo del detector.

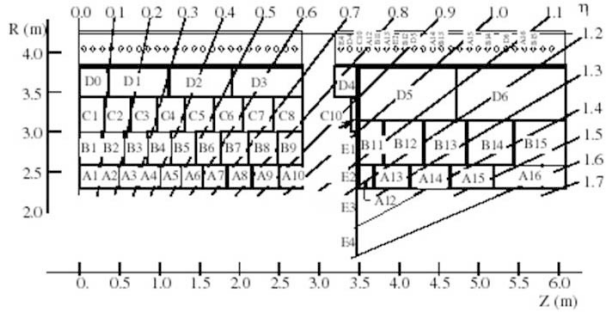


Figura 4.14: Corte transversal del calorímetro hadrónico de ATLAS mostrando la estructura del agrupamiento en celdas del detector. Las rectas señalan los valores correspondientes de la *pseudorapidity* η.

4.9 Ejercicios

4.1. El contador proporcional.
Un contador proporcional posee un cátodo cilíndrico de 7 cm de radio y 30 cm de longitud y un ánodo en forma de hilo conductor de 100 μm de radio, situado en el eje del cilindro.
a) Calcular la capacidad del condensador así formado (se tomará una constante dieléctrica para el gas del contador igual a la del vacío).
b) Calcular el campo eléctrico en función de la distancia r al eje del cilindro y de la diferencia de potencial V_0 entre ánodo y cátodo. Calcular los valores máximo y mínimo del campo eléctrico para $V_0 = 1500$ V.
c) Calcular la energía cinética adquirida por un electrón de ionización al pasar de r_1 a r_2 ($r_1 > r_2$), suponiendo que no sufre colisiones en su recorrido.
d) Sabiendo que el gas del contador es argón, cuyo potencial de ionización es $V_I = 15,8$ V, calcular la diferencia de potencial mínima que debe existir entre los electrodos para que el contador funcione en régimen proporcional. Se tomará un valor para el recorrido libre medio de los electrones en el gas del contador de $\lambda = 11,3$ μm.
e) Precisar las dimensiones de la región donde se producen avalanchas multiplicativas de electrones para el caso $V_0 = 1500$ V.

4.2. Resolución en momento de un detector de trazas.
a) Demostrar que para 3 medidas igualmente espaciadas a lo largo de una traza con resolución espacial σ_x, la resolución en momento de un detector de trazas gaseoso, de geometría cilíndrica, y con un campo magnético B paralelo al eje del cilíndro, es

$$\frac{dp_\perp}{p_\perp} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{8\sigma_x}{0,3L^2B} \cdot p_\perp$$

donde $p_\perp$ es la componente del momento perpendicular al campo magnético y L es el radio del cilindro (B está expresado en T, L en m y $p_\perp$ en GeV/c).
Aplicación numérica: $L = 1$ m, $B = 1$ T, $\sigma_x = 200$ μm.
b) Demostrar que la contribución de la difusión múltiple a la resolución en momento es:

$$\frac{dp_\perp}{p_\perp} = \frac{0,05}{\beta B\sqrt{X_0 L}}$$

donde X_0 es la longitud de radiación del gas del detector y β la velocidad de la partícula (B está expresado en T y las distancias X_0 y L en m). ¿En qué rango de momentos la resolución está dominada por la difusión múltiple? (Suponer que el gas es argón con $X_= 110$ m).

4.3. Resolución en parámetro de impacto de un detector de vértices.
a) Demostrar que la resolución en el parámetro de impacto de un detector de vértices bidimensional con dos capas de detectores de precisión, con resolución espacial σ_1 y σ_2, situados a una distancia R_1 y R_2 del punto de interacción, es

$$\sigma_d = \frac{R_1\sigma_1 \oplus R_2\sigma_2}{R_2 - R_1}$$

Aplicación numérica: $\sigma_1 = \sigma_2 = 10$ μm, $R_1 = 5$ cm and $R_2 = 6$ cm.
b) Demostrar que la contribución de la difusión múltiple a la la resolución en el parámetro de impacto es $\sigma_d = \alpha/p$, donde α es una constante y p es el momento

en el plano perpendicular al detector.
Aplicación numérica: los detectores son de silicio y su espesor es 300 μm (siendo $X_0 = 9,3$ cm para Si).
c) Incluir el efecto de un tubo de vacío de berilio de 2 mm de espesor colocado justo delante de la primera capa de detectores. ¿En qué rango de momentos está la resolución dominada por la difusión múltiple? ($X_0 = 36$ cm para Be).
d) Los detectores de silicio están construidos con 'microbandas' separadas por una distancia L. Estimar el valor de L si se desea obtener una resolución espacial de 10 μm.

4.4. Resolución en energía de un calorímetro electromagnético de muestreo.
a) La resolución en energía de un calorímetro electromagnético de muestreo se puede expresar mediante la fórmula:

$$\Delta E_s/E_s = A/\sqrt{E}$$

donde E es la energía de la partícula incidente (electrón o fotón), E_s es la energía de muestreo y A es una constante que depende de la estructura del calorímetro. Explicar la dependencia en energía de la resolución.
b) Demostrar la siguiente expresión aproximada: $A = \sqrt{\epsilon_c \tau}$, donde ϵ_c es la energía crítica del absorbente y τ el espesor de las placas de absorbente en longitudes de radiación.
Aplicación numérica: considerar un calorímetro de plomo-centelleador con placas de 0,5 cm tanto para el absorbente como para el material activo.
Datos: $X_0 = 0,56$ cm para Pb y 42,4 cm para el centelleador, las pérdidas de energía por ionización son de 12,7 MeV/cm para Pb y 2,0 MeV/cm para el centelleador.
c) Cálculos detallados utilizando la técnica de Monte Carlo demuestran que la resolución en energía de un calorímetro como el del apartado **b)** es:

$$\Delta E_s/E_s \approx 12\,\%/\sqrt{E}$$

con E en GeV. Si el material activo es gas en vez de centelleador, la constante es $20\,\%$ en vez de $12\,\%$. Explicar cualitativamente por qué la resolución es peor para calorímetros gaseosos.

4.5. Identificación de partículas.
a) Un detector TOF está constituido por un contador de centelleo situado a 1 m del punto de impacto de los haces. Su resolución es de 100 ps. Calcular su poder de discriminación (número de desviaciones estándar) para piones y kaones con momento igual a 1 GeV/c.
b) La resolución en dE/dx del detector DELPHI es de 6 %. Calcular su poder de discriminación par K/π de 1 GeV/c utilizando la fórmula de Bethe-Bloch:

$$\frac{dE}{dx} = \frac{A}{\beta^2}\left[\mathrm{Log}\left(\frac{\beta^2\gamma^2}{210^{-4}}\right) - \beta^2\right]$$

siendo A una constante.
c) El detector RICH de DELPHI utiliza un líquido con índice de refracción n = 1,2718. Calcular el umbral de la radiación Cherenkov para π y K. Suponiendo una resolución en el ángulo de la radiación Cherenkov de 30 mrad, calcular el poder de discriminación de este detector para K/π de 1 GeV/c.

4.6. Identificación de K/π con un detector tipo RICH.
a) El detector RICH del experimento DELPHI se compone de un líquido (C_6F_{14} con índice refractivo n = 1,2718) y de un gas (C_5F_{12} con índice refractivo n = 1,0017). Calcular el valor umbral del momento para la emisión de radiación Cherenkov en el líquido y en el gas (considerar el caso de piones y kaones).
b) La separación K/π se define como

$$N_\sigma = \frac{|\theta_K - \theta_\pi|}{\sigma(\theta_K) \oplus \sigma(\theta_\pi)}$$

siendo θ y $\sigma(\theta)$ el ángulo Cherenkov y su resolución experimental. Calcular N_σ para partículas con $p = 1$ GeV/c y $p = 10$ GeV/c, suponiendo $\sigma(\theta) = 30$ mrad para el líquido y 6 mrad para el gas.
c) Explicar por qué se necesita un indice refractivo muy próximo a n = 1 para conseguir separación a momentos altos.

4.7. Detector de muones.
Un detector de muones está formado por un filtro de hierro de 1 m de longitud, seguido de un sistema de cámaras de muones. Sobre el filtro se aplica un campo magnético de 2 T perpendicular a la dirección de los muones.
a) Calcular el momento mínimo para que los muones puedan atravesar el filtro.
b) Calcular el error en la medida de la posición de los muones debido a la difusión múltiple en el filtro.
c) Calcular la precisión máxima que puede alcanzarse en la medida del momento con este dispositivo.

5. *Métodos estadísticos en física de partículas*

El objetivo de todo experimento es medir magnitudes físicas. Al realizar una medida, se obtiene un valor numérico, que vendrá dado en las unidades de medida del instrumento utilizado. Este número tendrá asociado con él un error: el error de medida. Si vuelve a repetirse la medida, es muy probable que se obtenga otro resultado. Esto es debido a la existencia de errores instrumentales. En un experimento se suelen hacer varias medidas, con lo que gracias a la estadística será posible estimar el error de medida. Así pues, el resultado de un experimento será un conjunto de datos. Se suele hablar de *tratamiento de datos* o de *análisis de resultados* de un experimento. La finalidad del tratamiento de datos es extraer los dos tipos de resultado siguientes:

- Si se pretende determinar el valor verdadero de un observable que es desconocido. Se dice entonces que el objetivo es la determinación de un parámetro.
- Probar la consistencia de una teoría con los datos obtenidos. Es un test de hipótesis.

La teoría de probabilidades y la estadística son dos instrumentos importantes de ayuda a la interpretación de los resultados de los experimentos. La estadística es una herramienta de diseño y planificación; ayuda a estimar tolerancias en instrumentos, tiempos de ejecución, costes, etc. La estadística ayudará a resolver los dos tipos de problema aquí planteados.

5.1 Errores instrumentales y estadísticos

Sea x^* el valor verdadero de la magnitud x, desconocido, del que se ha realizado una medida $\hat{x}$. El error, según Webster, es la diferencia entre el valor medido y el verdadero. También se conoce por incertidumbre a la cantidad δx, que define un intervalo en el que se encuentra el valor verdadero de la magnitud:

$$x - \delta x \leq x^* \leq x + \delta x$$

La incertidumbre es pues una cantidad en principio muy pequeña; por ello es muy frecuente que ciertos cálculos sencillos de errores se realicen suponiendo que matemáticamente son diferenciales, con lo que los cálculos y las propagaciones de incertidumbres se realizan como si fuesen diferenciales. Aquí lo que interesa son los errores estadísticos que, como se verá, se asocian a desviaciones típicas, que se propagan de otra manera (cuadráticamente).

Al estudiar los errores en las medidas conviene antes aclarar que existen dos tipos de errores:

a) Error sistemático, debido a un biés (o un sesgo) en el experimento. Afecta por igual a todas las medidas (ejemplo: el cero del instrumento). No existen métodos ni procedimientos para calcularlos; debe conocerse muy bien el detector y el aparato utilizado. Para estimarlo, hay que recurrir a otro experimento independiente.

b) Error aleatorio, que sí puede ser tratado por la estadística. Los errores aleatorios son debidos a las incertidumbres experimentales y/o a la naturaleza estadística del fenómeno estudiado. No es asignable a ninguna causa concreta; más bien es fruto de una acumulación de pequeñas alteraciones regidas por las leyes del azar.

Dentro de los errores aleatorios se puede, a su vez, distinguir entre dos tipos de error:

El error instrumental, que explica las fluctuaciones debidas a las imperfecciones de los aparatos de medida (o del observador). En magnitudes descritas por variables continuas suelen distribuirse según la ley de Gauss. Se puede decir que la precisión de un instrumento de medida está ligada al error instrumental.

El error estadístico es debido a la incertidumbre propia de la medida (por utilizar una muestra finita) o porque el proceso es intrínsecamente aleatorio (como sucede en las medidas de propiedades atómicas o nucleares, como por ejemplo el número de desintegraciones de un núcleo en un intervalo de tiempo Δt).

Medir, desde el punto de vista estadístico, es obtener una muestra finita de una población teórica que debería estar compuesta por una muestra de datos infinita. El experimentador utiliza los estimadores de la muestra para estimar los verdaderos valores de los parámetros.

Los errores experimentales son variables aleatorias. Estas variables son objeto del estudio de la teoría de probabilidades y la estadística.

Es tarea del físico experimental saber estimar y minimizar los errores aleatorios de su aparato y también reducir los efectos de los sistemáticos al mínimo. (No se consideran aquí los errores garrafales, que simplemente hay que corregir.)

El error indica la precisión de la medida; por ejemplo supóngase que cierto experimento realizó la medida de la velocidad de la luz en el vacío y publicó su resultado,

$$c = (3,09 \pm 0,15) \times 10^8 \text{ m/s} \tag{5.1}$$

En este caso $3{,}09\times10^8$ m/s es el valor medio y para designar el error, convencionalmente se utiliza σ, la desviación cuadrática media o la desviación estándar (en este caso $\sigma = 0{,}15\times10^8$ m/s). Con ello se sabe de antemano la probabilidad de obtener una medida más o menos alejada del valor medio $\mu = 3,09 \times 10^8$ m/s.

A continuación se repasan las distribuciones de probabilidad más importantes para la física.

5.2 Distribuciones de probabilidad

En estadística no puede predecirse cuál será el resultado de un fenómeno aleatorio (una medida, por ejemplo). Sólo se puede calcular la frecuencia de posibles resultados, y ésta viene dada por la distribución de probabilidad $f(x)$.

Las distribuciones de probabilidad pueden ser:

- discretas; en este caso $f(x_i)$ da la frecuencia del valor x_i
- continuas; ahora $f(x)dx$ da la probabilidad de encontrar x en el intervalo $[x, x + dx]$.

En general las distribuciones de probabilidad dependen de uno o varios parámetros θ: $f(x;\theta)$, que pueden estimarse por métodos estadísticos.

Las distribuciones de probabilidad están normalizadas por lo que cumplen: $\sum_i f_i = 1$, en el caso de una función discreta y

$\int f(x)dx = 1$, si se trata de una función continua.

Conocer las distribuciones de probabilidad que se verán a continuación es disponer de una herramienta muy potente para entender y analizar los datos de un experimento. Su importancia es doble:

1. Si se conocen los parámetros de una distribución, puede utilizarse para predecir el resultado que se espera de una medida. Por ejemplo, sabiendo que la probabilidad al lanzar un dado salga un uno es 1/6, se puede calcular la probabilidad de que al tirar cinco dados, aparezcan tres unos (distribución binomial).

2. Si no se conocen los parámetros de la distribución, pero se dispone de N medidas x_i de una magnitud, como por ejemplo la longitud de una mesa, y se sabe que es un proceso regido por la distribución de Gauss, se pueden determinar los parámetros de dicha distribución.

El hecho es que normalmente, las fluctuaciones en las medidas conducen a desviaciones entre lo que se espera y lo que realmente se obtiene. La solución la da la ley de los grandes números. Esta ley dice que en cualquier experimento, cuando el número de medidas N tiende a infinito, las frecuencias medidas tienden a las probabilidades predichas por las distribuciones teóricas.

5.2.1 Parámetros estadísticos: media y varianza

A continuación se enumeran algunos parámetros estadísticos que tienen importancia para determinar las propiedades de las funciones densidad de probabilidad y, en particular, en la estimación de errores en las medidas de magnitudes.

Función acumulativa $F(a)$

La función acumulativa $F(a)$ de la función distribución de probabilidad $f(x)$, da la probabilidad de que $x < a$,

$$F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx \tag{5.2}$$

Es una función monótona creciente, $0 \leq F(x) \leq 1$ y permite calcular la probabilidad de que la variable aleatoria tenga un valor contenido en un intervalo; por ejemplo, $\text{Prob}(a < x \leq b) = F(b) - F(a)$.

Valores esperados

Sea x la variable aleatoria. El valor esperado de x, $E[x]$, se define:

$$E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \tag{5.3}$$

La extensión al caso de una función $u(x)$ de la variable aleatoria es inmediata,

$$E[u(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)f(x)dx$$

que cumple $E[ax + b] = aE[x] + b$.

Existen valores esperados muy utilizados en física. Son casos particulares de los momentos de las funciones distribución de probabilidad, que se estudian a continuación.

Momentos de distribuciones de probabilidad

Los momentos de las distribuciones de probabilidad caracterizan completamente las distribuciones de probabilidad.

Son de uso frecuente los llamados momentos de orden k:

$$\mu_k = E[x^k]$$

y los momentos centrales de orden k:

$$\mu'_k = E[(x - \mu)^k]$$

Los momentos más importantes y más frecuentemente utilizados son:

- la media μ, que equivale a $\mu_1 = E[x]$
- varianza $Var(x) = \sigma^2$, que es el momento central de orden 2:

$$Var(x) = \mu_2' = E[(x-\mu)^2] = E[x^2] - \mu^2 \tag{5.4}$$

  Se usa también la notación $\sigma^2 = Var(x) = V(x)$. Se cumple $V(ax + b) = a^2 V(x)$.
- la desviación estándar es $\sigma = \sqrt{V(x)}$.
- la mediana se define como $\mu_{1/2} \longrightarrow F(\mu_{1/2}) = 1/2$.
- el llamado *skewness* $\xi = E[(x-\mu)^3]$, mide el grado de asimetría de una distribución.

  En el caso de funciones multivariadas, $f(x,y)$, pueden definirse momentos de cada una de las variables, por ejemplo,

$$\mu_x = E[x] = \int\int x f(x,y) dx dy;$$

  y también pueden existir correlaciones entre variables aleatorias, por ello se introduce
- la covarianza: $cov(x,y) = E[(x-\mu_x)(y-\mu_y)]$. Se cumple siempre que $cov(x,y) \leq \sigma_x \sigma_y$.

El coeficiente de correlación lineal, adimensional, se define: $\rho_{xy} = \frac{cov(x,y)}{\sigma_x \sigma_y}$, y cumple $|\rho_{xy}| \leq 1$. Es decir, está comprendido entre $+1$ y -1. Si $\rho_{xy} = 0$, las variables x e y no están correlacionadas; el valor de una es independiente de la otra. Sin embargo si $\rho = \pm 1$, están totalmente correlacionadas; conocido x se sabe el valor de y.

Dos variables aleatorias son independientes si $f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$, siendo $f_1(x) = \int f(x,y) dy$ y además $\rho_{xy} = 0$. También cumplen,

$$E[f_1(x) \cdot f_2(y)] = E[f_1(x)] E[f_2(y)]$$

$$V(x+y) = V(x) + V(y)$$

En teoría de errores, la covarianza tiene una gran utilidad, ya que determina la matriz de errores para el caso de varias variables. En particular los elementos de la diagonal, coinciden con las varianzas: $cov(x,x) = V(x)$.

5.3 Distribuciones uniforme, binomial, Poisson, Gauss y χ^2

Se estudian a continuación aquí las funciones densidad de probabilidad más importantes en física experimental.

5.3.1 La distribución uniforme, $f_u(x)$

La distribución uniforme entre los límites a y b (véase el ejemplo en la figura 5.1) se define:

$$f_u(x) = \frac{1}{b-a} \quad \text{para } a \leq x \leq b$$

$$f_u(x) = 0 \quad \text{para cualquier otro valor de } x.$$

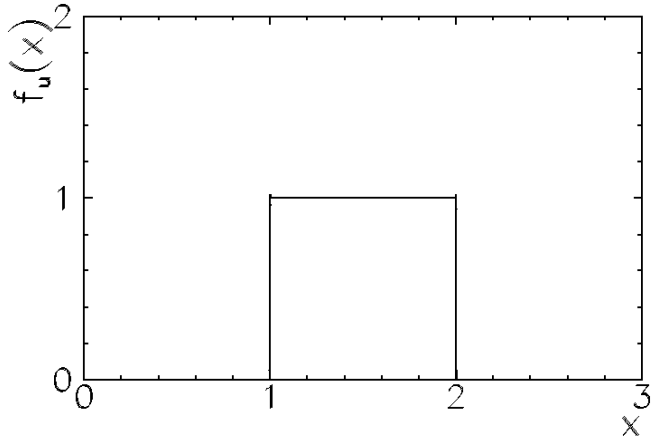


Figura 5.1: Distribución uniforme entre $x = 1$ y $x = 2$.

La media y la varianza de esta distribución puede comprobarse fácilmente que valen:

$$E[x] = \frac{b+a}{2} \qquad Var(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

La distribución uniforme es la que describe las frecuencias de sucesos al azar, por ejemplo las funciones *random* de los ordenadores. Estas distribuciones son muy utilizadas en los cálculos Monte Carlo, que es el método utilizado para simular fenómenos complejos en física nuclear y física de partículas.

5.3.2 La distribución binomial, $f_b(x)$

Estudia procesos conocidos por el nombre de procesos Bernouilly, cuyo resultado es dual: sí (éxito), o no (fracaso). Si se realizan n pruebas independientes y p es la probabilidad de éxito ($q = 1 - p$, la de fracaso), la distribución binomial da la probabilidad de obtener r (=0,1,2,...,n) éxitos:

$$\boxed{f_b(r; n, p) = \frac{n!}{r!(n-r)!} p^r q^{n-r}} \qquad (5.5)$$

La media y la varianza de esta distribución valen:

$$E[r] = np \qquad Var(r) = np(1-p) = npq$$

En efecto,

$$\mu = \sum_0^n r f_b = np \sum_0^n p^{r-1}(1-p)^{n-r} \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!},$$

que con el cambio $r' \to r-1$ y $n' \to n-1$, se verifica que está normalizada a 1.

Para calcular σ^2, se calcula el valor esperado del producto $E[r(r-1)] = p^2 n(n-1)$ y como $Var(r) = E[r^2] - \mu^2$ (véase (5.4)) resulta $\sigma^2 = np(1-p)$.

Entre las propiedades más interesantes de la función binomial cabe destacar que tiene por límite a dos de las funciones más importantes de la estadística; éstas son las funciones de Gauss y Poisson. En efecto, se cumple que

$$\text{si } n \geq 30 \text{ y } p \geq 0{,}05, \qquad f_b \longrightarrow \quad f_g(\mu, \sigma^2)$$

$$\text{si } p \leq 0,05 \text{ y } np \text{ finito} \quad f_b \longrightarrow \quad f_p(\mu).$$

en donde $\mu = np$ y $\sigma^2 = npq$.

5.3.3 La distribución de Poisson $f_p(x)$

Da la frecuencia de sucesos r en un intervalo de la variable x (que puede ser por ejemplo espacio o tiempo) esperados cuando la media es μ. La distribución de Poisson es:

$$\boxed{f_p(r;\mu) = \frac{e^{-\mu}\mu^r}{r!}, \qquad r = 0, 1, 2, \ldots} \tag{5.6}$$

La media y la varianza de esta distribución coinciden:

$$E[r] = \mu \qquad Var(r) = \mu$$

Ésta es la propiedad más interesante de la distribución de Poisson que se aplica a los experimentos cuyo resultado es un número de cuentas n; se supone que el valor medio es $\mu = n$ y por la tanto el mejor estimador del error es la desviación estándar $\sigma = \sqrt{n}$.

Es fácil verificar que está normalizada ya que $\sum \frac{\mu^x}{x!} = e^{\mu}$.

La distribución de Poisson describe la ley de producción de *sucesos raros*, o sea, de sucesos cuya probabilidad de producción es muy pequeña. Tómese por ejemplo la probabilidad de desintegración de un núcleo radiactivo de vida media larga; o sea $\lambda = 1/\tau$ muy pequeña. La probabilidad de una desintegración en el intervalo de tiempo dt será λdt, y el valor medio del número de desintegraciones en el intervalo de tiempo t, $\mu = \lambda t$. La probabilidad de que no haya

ninguna desintegración en dt será $1 - \lambda dt$, luego la probabilidad de observar r desintegraciones entre t y $t + dt$ será

$$p_r(t + dt) = p_r(t)(1 - \lambda dt) + p_{r-1}(t)\lambda dt$$

o sea, $\frac{dp_r}{dt} = \lambda \left[p_{r-1} - p_r\right]$ lo que conduce a la distribución de Poisson simplemente redefiniendo $f_p(r) = p_r$:

$$\boxed{f_p(r; \mu = \lambda t) = \frac{e^{-\mu}\mu^r}{r!}, \qquad r = 0, 1, 2, ...}$$

Se comprueba fácilmente que para $p \to 0, n \to \infty$ y np finito, f_p resulta ser límite de la ley binomial, poniendo $p = \frac{\mu}{n}$. Un ejemplo de distribución de Poisson puede verse en la figura 5.2.

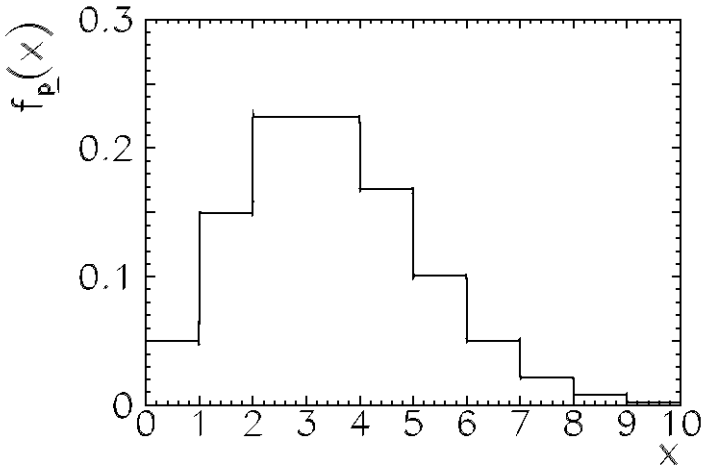


Figura 5.2: La distribución de Poisson para μ=3.

Procesos independientes –señal y ruido– definidos por la suma de medias $\mu_s + \mu_r$ que contribuyen independientemente en una medida con los números de cuentas n_s y n_r, dan como resultado $n_s + n_r$, que se distribuye como $\mu = \mu_s + \mu_r$. O sea, para dos fenómenos independientes s y r que contribuyen a un recuento x:

$$\begin{aligned} f_p(x; \mu) &= \sum_{n_s=0}^{x} f_p(n_s; \mu_s) \cdot f_p(x - n_s; \mu_r) \\ &= \frac{e^{-(\mu_s + \mu_r)}(\mu_s + \mu_r)^x}{x!} \end{aligned}$$

lo que prueba la ley de la suma de procesos independientes.

Ejemplo: La probabilidad de desintegración de un núcleo de ^{137}Cs es $\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} = 8,2 \times 10^{-10}\ s^{-1}$, ya que $t_{1/2}(^{137}Cs) = 27$ años. Si se tiene $\sim 1\ \mu$gr de Cs, o sea unos 10^{15} núcleos, se cumple entonces que $\mu = n\lambda = 10^5$ desintegraciones/seg. Si se cuenta el número de desintegraciones cada milisegundo, se esperan $\mu = 100$ desintegraciones. En realidad se obtendrá una distribución de Poisson con $\mu = 100$.

5.3.4 La distribución normal o de Gauss

Es la más importante y la que suele tener más aplicaciones en física. Reproduce frecuentemente el comportamiento de muchas medidas de magnitudes físicas. La primera referencia que se tiene de ella viene del matemático inglés Moivre (1733). Se define

$$\boxed{f_g(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}} \tag{5.7}$$

La media y la varianza de esta distribución son los propios parámetros utilizados en su definición:

$$E[x] = \mu \qquad Var(x) = \sigma^2$$

Se suele usar la anchura total a media altura[1] FWHM $= 2\sigma\sqrt{2\ln 2} = 2,354\,\sigma$. La función de Gauss definida en (5.7) está normalizada a 1.

Su integral acumulativa no es analítica, por eso se recurre a tablas de la función de la variable reducida $z = (x-\mu)/\sigma$ con $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 1$. La variable z suele llamarse tipificada. La función acumulativa en este caso es,

$$F_g(a;0,1) = 0,5\left[1 + erf\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)\right].$$

donde $erf(x)$ es la llamada *función error*, frecuentemente tabulada, cuyo valor es

$$erf\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^a e^{-t^2/2}dt$$

Sin embargo, puede utilizarse una buena aproximación paramétrica:

$$F_g(z_c) = \int_{-\infty}^{z_c} f_g(z)dz = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z_c^2/2}\left(a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3\right)$$

donde $t = 1/(1 + a_0 z_c)$ y los valores de los parámetros son:

$$a_0 = 0,33267; a_1 = 0,4361836; a_2 = -0,1201676; a_3 = 0,9372980$$

[1] FWHM, iniciales del inglés *Full Width Half Maximum*.

El 50 % del área de f_g está limitada por $\mu \pm 0,67\sigma$. El máximo ($df_g/dz = 0$) de la función reducida tiene lugar para $z = 0$ y vale $f_g(0) = 0,3989$. Los puntos de inflexión de la curva ($d^2 f_g/dz^2 = 0$), corresponden a $z = \pm 1$ y en ellos la función vale $f_g(\pm 1) = 0,24$. Pueden verificarse estos valores en la gráfica de la función de Gauss (figura 5.3).

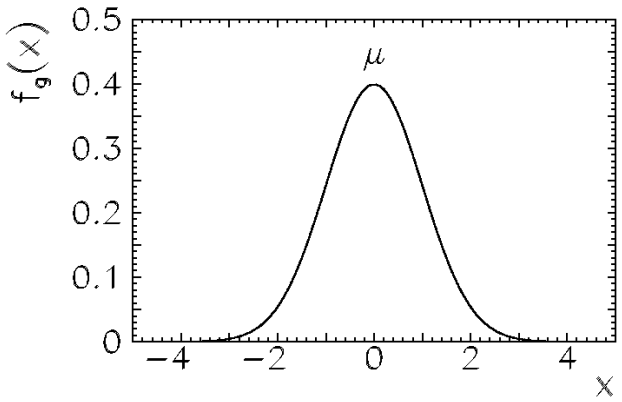


Figura 5.3: La distribución de Gauss ($\mu = 0$ y $\sigma = 1$).

Es muy importante conocer las áreas contenidas en intervalos de $z_c \times \sigma$, calculables con la función acumulativa, $F_g(z_c) - F_g(-z_c)$, dando

$$1\sigma \rightarrow 68{,}3\,\%$$
$$2\sigma \rightarrow 95{,}5\,\%$$
$$3\sigma \rightarrow 99{,}7\,\%$$

Estas áreas, definen los intervalos de probabilidad o intervalos de confianza de la variable aleatoria.

Así por ejemplo, si se conocen la media, μ, y la desviación típica, σ, de una muestra de datos $x_i, i = 1, \ldots, n$, se pueden calcular los intervalos de confianza sobre la media:

$$\overline{x} - z_c \frac{\sigma(x)}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + z_c \frac{\sigma(x)}{\sqrt{n}}$$

en donde $z_c = 1, 2, \ldots$ representaría la anchura del intervalo.

Ahora queda claro el significado del error que se presentó en (5.1); el valor de la desviación típica σ =0,15$\times 10^8$ m/s, implica que el valor verdadero de la velocidad de la luz tiene una probabilidad del 68,3 % de encontrarse en el intervalo 3,09$\pm$0,15$\times 10^8$ m/s lo que equivale a *más menos un sigma*. Otra forma de entenderlo es que si se realiza un gran número de experimentos, el 68,3 % darán como resultado un valor medio de la velocidad de la luz en el interior del intervalo definido por $\pm 1\ \sigma$.

La función multidimensional de Gauss se define,

$$f_g(\vec{x},\vec{\mu}) = \frac{1}{\sqrt{|\vec{V}|}(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{\mu})^T V^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})} \tag{5.8}$$

Integrales útiles:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad \int_{-\infty}^{0} xe^{-ax^2}dx = \frac{1}{2a}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_{0}^{\infty} x^{2n+1}e^{-x^2/2}dx = 2^n n! \qquad \int_{0}^{\infty} x^{2n+1}e^{-ax^2}dx = \frac{n!}{2a^{n+1}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n}e^{-x^2/2}dx = (2n-1)!!\sqrt{2\pi} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n}e^{-ax^2}dx = \frac{(2n-1)!!}{2^n a^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

en este último caso, las integrales se anulan para potencias impares.

La importancia de la distribución normal viene del hecho de que es el límite de muchas funciones cuando $n \to \infty$ y también por el conocido teorema del límite central.

Teorema del límite central

La media $\overline{x}_n = (1/n)\sum x_i$ de n observaciones independientes de una variable x de cualquier distribución de probabilidad, que tenga media μ y varianza σ^2 finitas, es una nueva variable aleatoria cuya distribución se aproxima a una gaussiana, cuando n es muy grande. Se cumple entonces que la variable $\overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum^{n} x_i$ tiende a una distribución gaussiana con media $\mu = \frac{1}{n}\sum \mu_i$ y varianza $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum \sigma_i^2$.

5.3.5 La distribución χ^2

La distribución χ^2 tiene como aplicación, el cálculo de la bondad de los ajustes de datos a curvas teóricas (véase la sección 5.6.3).

Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son variables gaussianas, entonces la variable suma

$$z = \sum^{n} \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)^2$$

sigue una distribución chi-cuadrado, $f_{\chi^2}(z)$, con $\nu = n$ grados de libertad.

Se cumple

$$\boxed{f_{\chi^2}(z;\nu) = \frac{z(h-1)_e - z/2}{2^h \Gamma(h)}} \tag{5.9}$$

con $h = \frac{\nu}{2}$ y z ≥ 0.

La función Γ de Euler:

$$\Gamma(h) = \int_0^\infty e^{-u} u^{z-1} du$$

si h es entero puede escribirse: $\Gamma(h) = (h-1)\Gamma(h-1)$ o sea, $\Gamma(h) = (h-1)!$, cumpliéndose que $\Gamma(1) = 1$. Para valores semienteros, hay que tener en cuenta que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

El parámetro ν representa el número de grados de libertad.

La media y la varianza de esta distribución: $E[z] = \nu \qquad Var(z) = 2\nu$

La función χ^2 caracteriza las fluctuaciones de x_i; si son tipo Gauss entonces $\overline{z} = \nu$, y para cada ajuste, el valor de z fluctuará según f_{χ^2}. Para evaluar la bondad de un ajuste se suele utilizar el nivel de confianza. Si se ha obtenido un valor $\chi_0^2 = z$, se define,

$$CL(\chi_0^2) = 1 - F(\chi_0^2) = \int_{\chi_0^2}^\infty f_{\chi^2}(z;\nu) dz$$

siendo $F(\chi_0^2)$ la función acumulativa. El nivel de confianza da la probabilidad de obtener un valor de $z \geq \chi_0^2$, al repetir el experimento.

5.4 Propagación de errores estadísticos

Sea $u = f(x, y)$. En general se cumple $\overline{u} = f(\overline{x}, \overline{y})$. Se quiere calcular la desviación estándar de la función u, conocidas las de las variables x, y, es decir, $\sigma_u^2 = E[(u - \overline{u})^2]$. Para ello, se desarrolla en torno a $\overline{u}$:

$$(u - \overline{u}) = (x - \overline{x})\frac{\partial f}{\partial x} + (y - \overline{y})\frac{\partial f}{\partial y} + \ldots$$

se halla la expresión $E[(u - \overline{u})^2]$, reteniendo los términos de primer orden, con lo que queda,

$$\sigma_u^2 = \sigma_x^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \sigma_y^2 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 2cov(x, y)\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} \tag{5.10}$$

Aplicado a las funciones más sencillas se obtiene,

$$u = ax \pm by \quad \longrightarrow \quad \sigma_u^2 = a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2 \pm 2ab\ cov(x,y)$$

$$u = \pm axy \quad \longrightarrow \quad \frac{\sigma_u^2}{u^2} = \frac{\sigma_x^2}{x^2} + \frac{\sigma_y^2}{y^2} + 2\frac{cov(x,y)}{xy}$$

$$u = \pm a\frac{x}{y} \quad \longrightarrow \quad \frac{\sigma_u^2}{u^2} = \frac{\sigma_x^2}{x^2} + \frac{\sigma_y^2}{y^2} - 2\frac{cov(x,y)}{xy}$$

$$u = ax^{\pm b} \quad \longrightarrow \quad \frac{\sigma_u}{u} = b\frac{\sigma_x}{x}$$

$$u = a\ln \pm bx \quad \longrightarrow \quad \sigma_u = a\frac{\sigma_x}{x}$$

$$u = ae^{\pm bx} \quad \longrightarrow \quad \frac{\sigma_u}{u} = b\sigma_x$$

Ejemplo: Calcular el error sobre el número de desintegraciones N de una fuente radiactiva con vida media $\tau = 5$ días, de la que inicialmente se conocía su actividad en t=0, $N_0 = 10^3$ s^{-1}, con $\sigma_{N_0} = 0$, medida a t= 20 días $N = 18,3$ s^{-1} con una precisión $\sigma_t = 1$ hora.

Se tiene $N = N_0 e^{-t/\tau}$, luego $\sigma_N/N = \sigma_t/\tau$, con lo que $\sigma_N = 0,154$ s^{-1}.

5.5 Método de máxima verosimilitud

Sea una muestra finita de n medidas $\{x_i, i = 1, ..., n\}$. Se supone que $f(x;\theta)$ es la función distribución de probabilidad teórica que describe los datos. El mejor estimador $\hat{\theta}$ del parámetro θ debe cumplir las siguientes condiciones:

1. Ser consistente, o sea, $\lim_{n \to \infty} \hat{\theta} \longrightarrow \theta$
2. No sesgado, que implica $< \hat{\theta} > \ = \theta$
3. Ser eficiente, lo que requiere σ^2 mínimo.

El método de máxima verosimilitud es el método de obtención de los mejores estimadores estadísticos $\hat{\theta}$ de los parámetros θ de una distribución $f(x;\theta)$ y de sus errores, que se supone describe los datos $\vec{x}$.

Si los datos x_i son independientes, entonces la función verosimilitud

$$\mathcal{L}(\theta/x) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i/\theta)$$

debe ser máxima. Por ello el mejor estimador se obtiene,

$$\boxed{\left.\frac{\partial(\ln \mathcal{L})}{\partial\theta}\right|_{\hat{\theta}} = 0} \tag{5.11}$$

y el error $\sigma^2(\hat{\theta}) = \int (\theta - \hat{\theta})^2 \mathcal{L}(\theta/x) \prod_{i=1}^{n} dx_i$ no es fácilmente calculable, pero en el límite de $n \to \infty$ en el que $\mathcal{L} \to f_g$, se cumple,

$$\boxed{\sigma^2(\hat{\theta}) = -\left(\frac{d^2 \ln \mathcal{L}}{d\theta^2}\right)^{-1}} \tag{5.12}$$

lo que es muy fácil de comprobar realizando la aproximación

$$\mathcal{L}(\theta) \approx e^{-(\theta - \theta^*)^2/2\sigma^2}$$

En caso de tratarse de una función de varios parámetros, se calcula la matriz

$$V_{ij} = -\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial\theta_i \partial\theta_j}$$

Las varianzas son entonces los elementos de la diagonal de la matriz inversa, $\sigma^2(\hat{\theta}_i) = \left(V^{-1}\right)_{ii}$. El estimador $\hat{\theta}$ es no sesgado, consistente y se cumple que si $u = f(\theta)$ entonces $\hat{u} = f(\hat{\theta})$.

5.5.1 Aplicaciones del método de máxima verosimilitud

Una de las aplicaciones del método de máxima verosimilitud es la de la obtención de los mejores estimadores de los parámetros de distribuciones de probabilidad. Se verá a continuación cómo se aplica para obtener la media y la varianza.

Distribución de Poisson

La función verosimilitud de una muestra que se supone que proviene de una función de Poisson es simplemente:

$$\mathcal{L}(\mu/x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\mu^{x_i}}{x_i!} e^{-\mu} = e^{-n\mu} \prod_{i=1}^{n} \frac{\mu^{x_i}}{x_i!}$$

y al calcular el logaritmo:

$$\ln \mathcal{L} = -n\mu + \sum x_i \cdot \ln \mu - \sum \ln x_i!$$

La obtención del estimador de la media, a partir de (5.11) da lugar a:

$$\frac{d\mathcal{L}^*}{d\mu} = \frac{d(\ln \mathcal{L})}{d\mu} = -n + \frac{1}{\mu} \sum x_i \quad \longrightarrow \quad \boxed{\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum x_i = \overline{x}}$$

$$\sigma^2(\hat{\mu}) = \frac{\hat{\mu}}{n} = \frac{\overline{x}}{n} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\sigma(\hat{\mu}) = \sqrt{\frac{\overline{x}}{n}}}$$

Este último resultado es general, ya que se demuestra que $\sigma^2(\overline{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$, relacionando la varianza de la media con la varianza de la función distribución de probabilidad.

En efecto,

$$\sigma^2(\overline{x}) = E[(\overline{x} - \mu)^2] = \frac{1}{n^2}\sum E[(x_i - \mu)^2] = \frac{\sigma^2}{n}$$

Distribución de Gauss

De la misma manera que en el caso anterior, se calcula la función verosimilitud:

$$\mathcal{L}(\mu, \sigma^2/x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

con lo que

$$\ln \mathcal{L} = -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2}\sum\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^2$$

Para obtener el parámetro μ:

$$\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \mu} = \frac{\partial(\ln \mathcal{L})}{\partial \mu} = \sum \frac{x_i - \mu}{\sigma^2} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum x_i = \overline{x}}$$

$$\sigma^2(\hat{\mu}) = \frac{\sigma^2}{n} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\sigma(\hat{\mu}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Estas expresiones son válidas para el caso en el que todos los errores σ_i (las desviaciones típicas) de las medidas x_i que componen la muestra, es decir, $\sigma_i = \sigma$ son iguales. Si fueran diferentes, la aplicación del método de máxima verosimilitud, proporciona el método de ponderación de medidas gaussianas:

$$\boxed{\hat{\mu} = \frac{\sum x_i/\sigma_i^2}{\sum\left(1/\sigma_i^2\right)}} \qquad \boxed{\sigma(\hat{\mu}) = \sqrt{\frac{1}{\sum\left(1/\sigma_i^2\right)}}}$$

o sea, que cada medida se pondera con un peso $w_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$. Se define

$$w = \sum w_i$$

.

Por último, el mejor estimador del parámetro σ se obtiene al hacer

$$\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \sigma^2} = \frac{\partial(\ln \mathcal{L})}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2}\sum\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \frac{1}{\sigma^2}$$

dando

$$\boxed{\hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{1}{n}\sum (x_i - \mu)^2}$$

La expresión para $\hat{\sigma}^2$ es válida siempre que la media μ sea conocida. Pero para valores finitos de n, el valor estimado para $\hat{\sigma}^2$ está sesgado. En efecto,

$$\begin{aligned}\sum (x_i - \overline{x})^2 \quad &= \sum [x_i - \mu - (\overline{x} - \mu)]^2 = \\ &\sum (x_i - \mu)^2 + \sum (\overline{x} - \mu)^2 - 2\sum (\overline{x} - \mu)(x_i - \mu)\end{aligned}$$

y al calcular el valor esperado

$$E\left[\sum (x_i - \overline{x})^2\right] = n\sigma^2(x) + n\sigma^2(\overline{x}) - 2n\sigma^2(\overline{x})$$

es decir,

$$E[s^2] = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

luego, la expresión correcta y no sesgada del estimador de la varianza de una distribución de medidas gaussianas viene dada por

$$\boxed{s^2 = \frac{1}{n-1}\sum (x_i - \overline{x})^2} \tag{5.13}$$

De la misma manera se demuestra que

$$\sigma^2(\hat{\sigma}^2) = \frac{2(n-1)\hat{\sigma}^4}{n^2}$$

o sea, $\sigma^2(\hat{\sigma}^2) = \frac{2\hat{\sigma}^4}{n}$ cuando $n \to \infty$. También se demuestra que $\sigma(\hat{\sigma}) = \hat{\sigma}/\sqrt{2(n-1)}$ y que $\sigma(\hat{\sigma}^2) = \hat{\sigma}^2/\sqrt{2/(n-1)}$.

Resumiendo, la estimación de parámetros, en la hipótesis de que las muestras obedezcan a la ley de Poisson o de Gauss, da lugar a los siguientes estimadores:

	Gauss		Poisson
valor medio	$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum x_i,$	$\frac{1}{w}\sum w_i x_i$	$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum x_i$
varianza muestra	$\hat{\sigma} \approx s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{n-1}}$		$\hat{\sigma} = \sqrt{\overline{x}}$
error del valor medio	$\sigma(\overline{x}) = \frac{s}{\sqrt{n}},$	$\frac{1}{\sqrt{w}}$	$\sigma(\overline{x}) = \sqrt{\frac{\overline{x}}{n}}$

Si $n = 1$, se cumple $\sigma(\hat{\mu}) = \sigma$, es decir, equivale a la varianza de la muestra, o lo que es lo mismo, la precisión del instrumento.

5.5.2 Intervalos de confianza

Conocida la media, μ, y la desviación típica, σ, de una muestra de datos $x_i; i = 1, \ldots, n$, se pueden calcular los intervalos de confianza sobre la media:

$$\overline{x} - z_c \frac{\sigma(x)}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + z_c \frac{\sigma(x)}{\sqrt{n}}$$

en donde $z_c = 1, 2, \ldots$ representaría la anchura del intervalo.

Sin embargo, cuando $\sigma(x)$ no es conocida, generalmente porque hay pocos valores, la varianza, como se acaba de demostrar, se estima con $s(x) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum (x_i - \overline{x})^2}$ y entonces es necesario utilizar la función de Student para definir el nivel de confianza sobre la variable $t = \frac{\overline{x} - \mu}{s(x)/\sqrt{n}}$.

$$\boxed{f_s(t) = \frac{\Gamma(h + 1/2)}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma(h)} \left(1 - t^2/\nu\right)^{-(\nu+1)/2}} \tag{5.14}$$

con $h = \nu/2$ y $\nu = n - 1$.

La función de Student es, pues, otra distribución de probabilidad cuyo interés es el de determinar niveles de confianza sobre los parámetros de una muestra.

5.6 Ajustes de curvas

A partir de un conjunto de N medidas $y_i, i = 1, \ldots, N$ realizadas en los puntos x_i, con sus errores respectivos σ_i, se pretenden obtener los parámetro de una ley física; por ejemplo $N = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$, con N_0 y τ, parámetros a determinar. Si se intenta trazar una curva suave que pase a través de los puntos medidos, se observa que unos puntos quedan de un lado y otros del otro lado de la curva. El problema es encontrar la mejor curva, que se resuelve aplicando una variante del método de máxima verosimilitud, conocido por el nombre de método de mínimos cuadrados.

5.6.1 Método de mínimos cuadrados

El método supone que las N medidas y_i provienen de una distribución teórica con media $f(x_i; \vec{a})$ y varianza σ_i^2. Los mejores estimadores de los k parámetros $\vec{a}$ se obtienen al minimizar la suma de cuadrados,

$$S = \sum_{i=1}^{N} \frac{\left(y_i - f(x_i; \vec{a})\right)^2}{\sigma_i^2}$$

En el caso en que los errores $\epsilon_i = y_i - f(x_i; \vec{a})$ sean gaussianos, además se cumplirá que S se distribuye de acuerdo con una función f_{χ^2} con $\nu = N - k$ grados de libertad, lo que permitirá calcular la bondad del ajuste.

Los k parámetros se obtendrán al minimizar la función S, o sea, resolviendo las k ecuaciones:

$$\boxed{\left.\frac{\partial S}{\partial a_j}\right|_{\hat{a}_j} = 0} \tag{5.15}$$

y los errores se obtendrán a partir de la matriz de covarianza calculada en el mínimo:

$$\boxed{V_{\ell m} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 S}{\partial a_\ell \partial a_m}} \tag{5.16}$$

que al invertirla $\left(V^{-1}\right)$, da lugar a la matriz de errores. Así por ejemplo, las varianzas de los parámetros serán los elementos de la diagonal $\sigma_j^2 = (V^{-1})_{jj}$.

5.6.2 Ajustes lineales

Uno de los ejemplos más característicos del método de mínimos cuadrados es el de los ajustes lineales.

Sea

$$y = a_1 + a_2 x$$

Como resultado de las fórmulas del método, si se construyen las sumas

$$S_{1,x,y,xx,xy} = \sum \frac{1}{\sigma_i^2}\left(1, x_i, y_i, x_i^2, x_i y_i\right)$$

que condensa las cinco igualdades $S_1 = \sum \frac{1}{\sigma_i^2}$; $S_x = \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2}$; etc.

El sistema de ecuaciones para los dos parámetros a_1 y a_2 da lugar, por el método de Cramer, a las soluciones

$$\hat{a}_1 = \frac{1}{D}\left(S_y S_{xx} - S_x S_{xy}\right), \qquad \hat{a}_2 = \frac{1}{D}\left(S_1 S_{xy} - S_x S_y\right)$$

siendo $D = S_1 S_{xx} - S_x^2$ el discriminante de la matriz del sistema.

La matriz de covarianza de los parámetros es

$$\begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{12} & V_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} S_{xx} & -S_x \\ -S_x & S_1 \end{pmatrix}$$

con lo que se obtiene

$$\sigma_{a_1}^2 = \frac{S_{xx}}{D}, \qquad \sigma_{a_2}^2 = \frac{S_1}{D}$$

y por supuesto $cov(a_1, a_2) = -\frac{S_x}{D}$.

5.6.3 Bondad del ajuste

Bajo la hipótesis que los errores son gaussianos, el valor de la suma de cuadrados en el mínimo S_0 define una probabilidad

$$P(\chi^2) = \int_{S_0}^{\infty} f_{\chi^2}(z, \nu)\, dz$$

con ν el número de grados de libertad. En el caso lineal anterior, $\nu = N - 2$, ya que sólo hay 2 parámetros.

La probabilidad de χ^2 calculada, da la probabilidad de obtener un resultado *peor* (o sea un valor de $S > S_0$) en caso de repetir el experimento. Para saber si el ajuste es razonable, basta con ver si el χ^2 *reducido*: χ^2/ν es ~ 1. En términos de probabilidad, se admite que un buen ajuste es aquél que da una probabilidad de $\chi^2 \geq 5\,\%$.

Es curioso comprobar que al cambiar el parámetro $\hat{a}$ en $\hat{a} + \sigma_a$, el χ^2 cambia a $\chi^2 + 1$. Esto se comprueba inmediatamente al desarrollar $S(a)$ cerca de $S(\hat{a})$, quedando

$$S(a) = S(\hat{a}) + \frac{(a - \hat{a})^2}{\sigma_a^2}$$

Nivel de confianza

Es frecuente cuantificar una ley de conservación, para ello se tienen resultados con un número de cuentas nulo. La probabilidad de no observar ningún suceso en un tiempo T,

$$P(0, \lambda) = e^{-\lambda T}$$

luego, la ley de probabilidad para λ si se tienen 0 cuentas es

$$P(\lambda/0) = Te^{-\lambda T}$$

De esta manera, el nivel de confianza o probabilidad de que λ esté en el intervalo $[0, \lambda_0]$ es

$$Prob(\lambda \leq \lambda_0) = \int_0^{\lambda_0} Te^{-\lambda T} = 1 - e^{-\lambda_0 T} = CL$$

Para denominar el nivel de confianza, se suele utilizar en la literatura CL, del inglés *confidence level*.

5.6.4 Ajuste de funciones cualesquiera

En general el problema del ajuste de datos a funciones complicadas es un problema que se resuelve numéricamente, utilizando librerías de programas disponibles para ordenador (ejemplo: *Minuit* de la librería de programas CERNLIB del CERN).

A veces, la función es fácil de linealizar. Por ejemplo

$$N = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \text{puede reescribirse} \qquad \ln N = \ln N_0 - \frac{t}{\tau}$$

y lo único que hay que cuidar es el cálculo de errores de las nuevas variables. En efecto, si σ_i es el error de la medida de N (o sea $\sigma_i^2 = N$), entonces por propagación de errores,

$$\sigma^2(\ln N) = \sigma^2(N) \left(\frac{\partial \ln N}{\partial N} \right)^2 = \frac{1}{N}$$

Normalmente la variable x_i se conoce con gran precisión. En caso contrario, el error de cada medida y_i se modificará según

$$\sigma_i^2 \rightarrow \sigma_y^2 + \left(\frac{df}{dx} \right)^2 \sigma_x^2$$

Interpolación

Es frecuente que se necesite interpolar una curva definida por las N medidas $y(x_i)$ realizadas en N puntos x_i que se encuentran en el intervalo $x_a \leq x_i \leq x_b$. Se puede utilizar la fórmula de Lagrange que permite interpolar utilizando $M \leq N - 1$ puntos de dicho conjunto de puntos. En efecto

$$y(x) = \sum_{i=0}^{M} P_i(x)\, y(x_i) \qquad \text{siendo} \qquad P_i(x) = \frac{\prod_{j=0, i \neq j}^{M} (x - x_j)}{\prod_{j=0, i \neq j}^{M} (x_i - x_j)}$$

y el error asociado al punto interpolado es

$$\sigma\left(y(x)\right) = \prod_{j=0}^{M} (x - x_j) \frac{y^{M+1}(\xi)}{(M+1)!}$$

en donde $y^{M+1}(\xi)$ es la derivada $M+1$ de $y(x)$ en el punto ξ, que es un punto cualquiera del intervalo $x_a \leq \xi \leq x_b$, derivada que debe calcularse numéricamente.

5.7 Ejercicios

5.1. Límite superior a una vida media.
Con el fin de comprobar la ley de conservación del número leptónico se mantuvo

en observación durante 100 días una muestra de 50 g de ^{82}Se, con objeto de observar el proceso de desintegración β-doble sin emisión de neutrinos:

$$^{82}Se \rightarrow ^{82} Kr + 2e^-$$

proceso prohibido por dicha ley de conservación. La eficacia del detector es del 20 % y no se observó ningún suceso de este tipo. Calcular el límite superior para la vida media de este proceso.

5.2. Resolución en posición de un detector de silicio.
Un detector de posición está construido a partir de una lámina delgada de silicio sobre la que se han implantado microbandas de 2 μm de espesor, separadas por una distancia $L = 50$ μm. Las partículas cargadas que atraviesan la lámina depositan energía, que se puede medir en forma de una señal eléctrica en las microbandas cercanas al punto de impacto.
a) Demostrar que la resolución en posición de dicho detector, si únicamente se procesa la señal en la microbanda con mayor carga depositada, es $L/\sqrt{12}$.
b) Calcular la resolución si se procesan las señales en las dos microbandas con mayor carga depositada. Para simplificar el problema, se podrá suponer que la señal es proporcional a la distancia entre el punto de impacto y la microbanda correspondiente, y que la fluctuación de dicha señal es de 10 %.

5.3. Promedio de datos experimentales.
Los cuatro experimentos de LEP han efectuado la medida de la masa y anchura del bosón Z, obteniendo los valores que se indican a continuación.

experimento	M_Z (GeV)	Γ_Z (GeV)
ALEPH	$91,1881 \pm 0,0031$	$2,4951 \pm 0,0043$
DELPHI	$91,1866 \pm 0,0029$	$2,4893 \pm 0,0040$
L3	$91,1883 \pm 0,0029$	$2,4996 \pm 0,0043$
OPAL	$91,1838 \pm 0,0029$	$2,4958 \pm 0,0043$

El error indicado por cada experimento incluye la contribución estadística y sistemática. Para simplificar el problema, se podrá suponer que el único error sistemático, tanto en la medida de M_Z como en la de Γ_Z, es la incertidumbre de 2,0 MeV en la medida de la energía en el centro de masas. Dicho error es por supuesto común a todos los experimentos.
a) Calcular los valores de M_Z y Γ_Z que resultan de promediar las medidas anteriores, con sus errores correspondientes. ¿Pueden mejorase dichas medias tomando más datos?
b) Calcular el χ^2 del promedio efectuado y la probabilidad de obtener dicho valor o bien un valor superior. Discutir si las medidas de los experimentos son compatibles entre sí.

5.4. Error en la media y anchura de una resonancia.
Se pretende medir la masa m y anchura σ_m de una resonancia a partir de la sección eficaz de producción en torno al valor de m. Se dispone de una muestra de N sucesos. El valor de m se calcula como la media de los valores obtenidos y para la anchura σ_m se toma la distribución cuadrática media de la distribución obtenida.
a) Demostrar que el error en m es $\sigma_m/\sqrt{N}$, y que si la distribución de masa es

gausiana el error en σ_m es $\sigma_m/(\sqrt{2N})$.
b) Cada experimento de LEP ha medido la masa y anchura del bosón Z con una muestra de unos 4 millones de sucesos hadrónicos. Estimar el error estadístico que cabe esperar en dichas medidas y compararlo con el valor realmente obtenido (véase el problema anterior).

5.5. Estudio de la anchura de una resonancia.
La anchura de una resonancia medida experimentalmente es la convolución de la anchura natural de dicha resonancia y de la resolución experimental, que se puede describir normalmente por una gausiana.
a) Demostrar que si las distribuciones f_1 y f_2 tienen anchuras respectivas σ_1 y σ_2, la convolución de ambas, definida como

$$f(x) = \int dy\, f_1(y) f_2(x-y)$$

tiene una anchura σ que verifica $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$. En lo anterior se ha identificado anchura con desviación cuadrática media.
b) La distribución de masa M debido a la anchura natural Γ de una resonancia de masa M_0 se puede describir mediante la curva de Breit-Wigner siguiente

$$\frac{df}{dM^2} = \frac{f_0}{(M^2 - M_0^2)^2 + M_0^2\Gamma^2}$$

donde f_0 es una constante de normalización. Discutir cómo se puede definir una anchura para dicha distribución en torno al valor M_0. Concluir sobre el valor de la anchura observado experimentalmente.

5.6. Descubrimiento de una nueva resonancia.
En un espectrómetro se reconstruye la masa invariante de pares de muones con carga opuesta procedentes de la colisión de protones de alta energía contra un blanco de materia densa. Se obtiene el siguiente número de sucesos en función del intervalo de masa considerado:

intervalo de masa (GeV)	sucesos observados
$2,8 - 2,9$	5
$2,9 - 3,0$	8
$3,0 - 3,1$	19
$3,1 - 3,2$	2
$3,2 - 3,3$	6

Los intervalos de masa corresponden aproximadamente con la resolución experimental en masa invariante.
a) Si se interpretan estos sucesos como debidos a la presencia de una resonancia, discutir qué información se puede extraer sobre la masa y anchura de la misma.
b) Calcular la probabilidad de que el exceso de sucesos observados entre 3,0 y 3,1 GeV se deba únicamente a una fluctuación estadística. Concluir sobre la evidencia de una resonancia en los datos anteriores.

6. *Experimentos en física de altas energías*

6.1 Introducción

El objetivo perseguido en los experimentos de física de altas energías es el estudio de las

- propiedades de partículas y de núcleos,
- propiedades de las interacciones.

Salvo en casos muy concretos que hoy en día sólo se dan en física nuclear, siempre son necesarios varios tipos de detectores. No existe un detector universal. Por ello lo más frecuente es la utilización de espectrómetros.

6.2 Tipos de experimentos en altas energías

Existen tres grandes tipos de experimentos, según el tipo de instalación que proporciona la fuente de partículas:

- los que usan aceleradores de partículas,
- los que se instalan en las proximidades de reactores nucleares y
- los que se realizan en instalaciones subterráneas (al abrigo del fondo de rayos cósmicos).

A continuación se describen con más detalle estos tres tipos de experimentos:

6.2.1 Experimentos con aceleradores

A su vez se clasifican en experimentos de:

a) Blanco fijo. El haz de partículas del acelerador se extrae y se dirige contra un blanco material en reposo. La reacción tiene lugar en el sistema laboratorio. Los espectrómetros tienen forma cónica (hacia adelante, es decir, subtienden un pequeño ángulo sólido en una dirección próxima al proyectil) debido al factor de Lorentz. Un ejemplo de este tipo de experimentos puede verse en la figura 6.1. Se trata del espectrómetro OMEGA del CERN; un detector de propósito general que fue utilizado por numerosos usuarios. Fue un excelente detector de trayectorias de partículas cargadas, que proporcionó muchos datos para espectroscopía de hadrones.

Muy importantes son los haces de neutrinos; inicialmente los detectores se instalaron muy próximos al acelerador (por ejemplo el experimento llamado CHARM del CERN) o de muones de alta energía (experimento EMC). Actualmente se están preparando nuevos haces de neutrinos con un detector situado a varios cientos de kilómetros del acelerador; por ello se denominan *long base line* (ejemplos: CNGS en el CERN, que envía los neutrinos al laboratorio del Gran Sasso en Italia o K2K en Japón, que envía los neutrinos del laboratorio KEK hasta el detector KAMIOKANDE) y su utilidad es poder estudiar las oscilaciones de neutrinos.

b) Colisionadores. Los haces de partículas colisionan frontalmente en el interior del tubo de vacío del acelerador. La reacción tiene lugar en el centro de masas, que coincide, generalmente, con el sistema laboratorio. Los colisionadores más frecuentes son:

i) e^+e^-. Producen pocos sucesos (la aniquilación e^+e^- es un proceso electrodébil). Son reacciones muy limpias. El ejemplo del mayor colisionador de este tipo en el mundo, el LEP del CERN, que se desmontó en el año 2000, se verá más adelante.

ii) $p\bar{p}$ o pp. Existe mucho fondo de interacciones hadrónicas difíciles de visualizar que enmascaran los sucesos interesantes. El mayor colisionador del mundo de tipo pp se llama LHC (*Large Hadron Collider*) y se encuentra en fase de construcción en el CERN (fecha prevista del inicio: el año 2007). En principio, se propone la instalación de cuatro espectrómetros, dos de carácter general ATLAS (véase la figura 6.2) y CMS, y dos de carácter más especializado ALICE, para estudiar colisiones de iones relativistas y LHCb, que se ha diseñado para estudiar violación de la simetría CP a través del estudio de los mesones B.

iii) e^-p. El único colisionador de este tipo en el mundo fue construido en DESY, Hamburgo. Inició su operación en 1990 y la colisión tiene lugar entre e^- de 30 GeV y protones de 920 GeV. La asimetría de la naturaleza de los haces, obliga a diseñar detectores asimétricos.

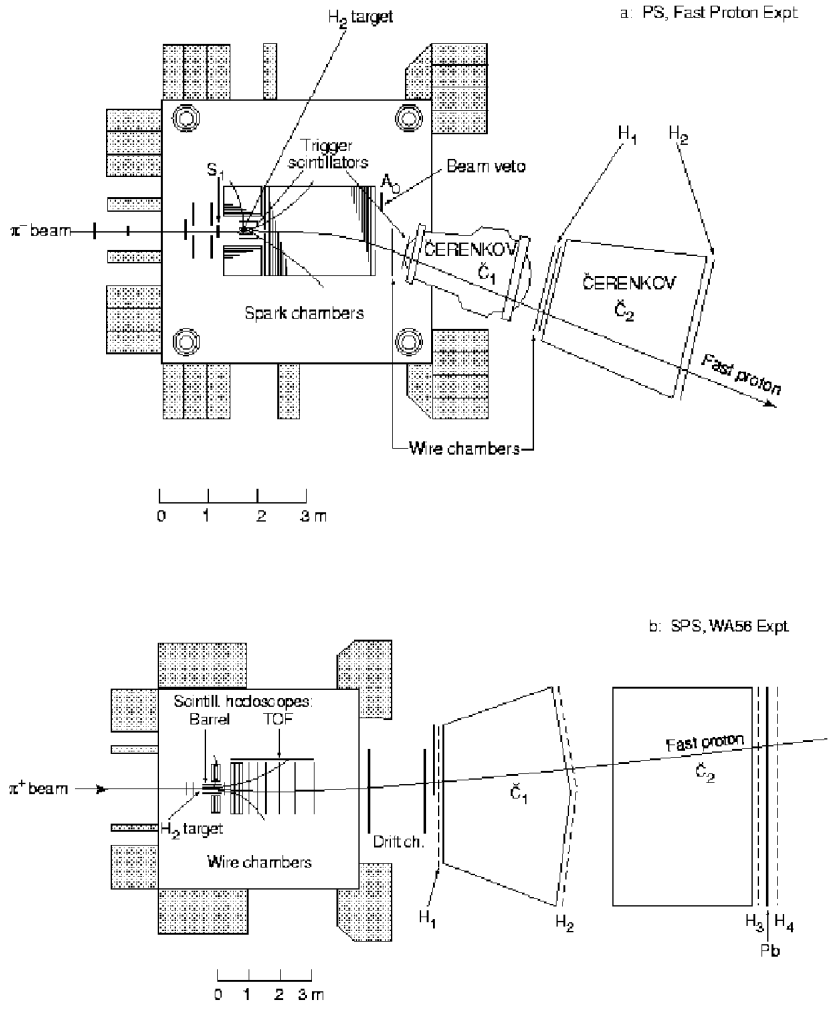


Figura 6.1: Dos esquemas del detector OMEGA del CERN usado en experimentos de blanco fijo (WA56). El imán supraconductor proporciona $1{,}8$ tesla. En el esquema superior, se utilizaron cámaras de chispas y en el inferior, cámaras proporcionales multihilos (MWPC) y de deriva (DC). Hay también dos grandes detectores Cherenkov tipo umbral.

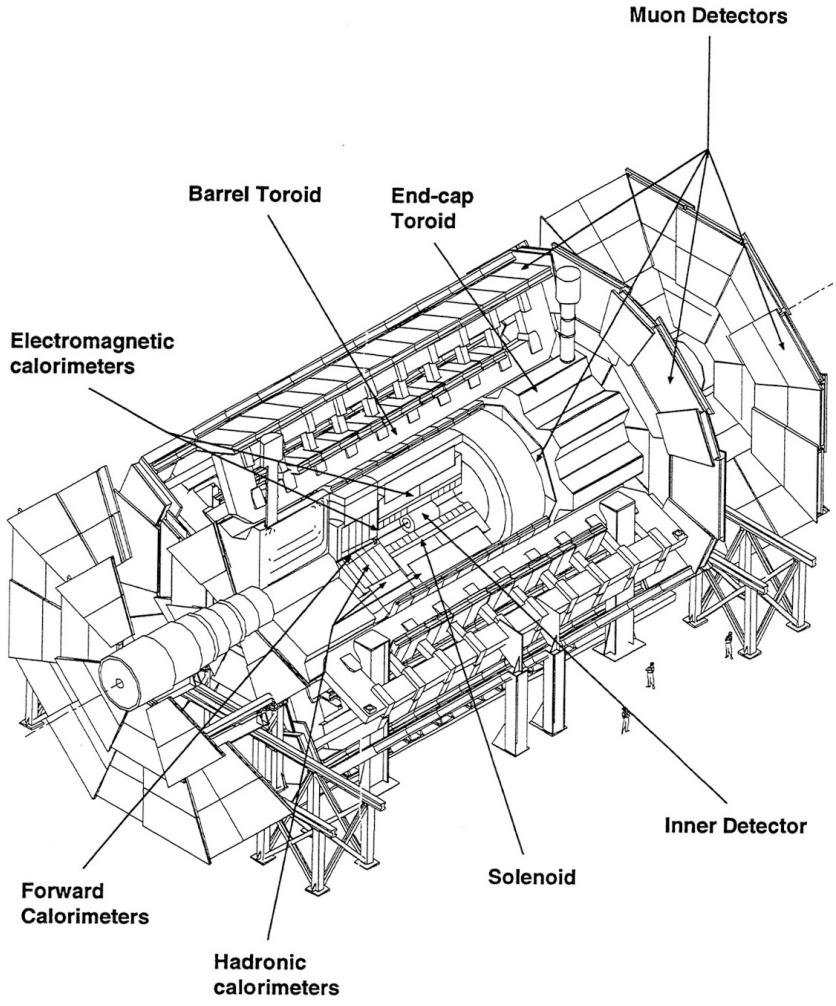


Figura 6.2: Detector ATLAS. Se trata de uno de los gigantescos detectores del colisionador LHC del CERN. Tiene dos imanes superconductores: uno interior solenoidal, y otro exterior que es un toroide.

6.2.2 Experimentos en reactores nucleares

Los reactores nucleares proporcionan flujos intensos de $\overline{\nu}_e$. En el campo de la física nuclear se utilizan para obtener fuentes de neutrones (ILL, Instituto Laue Langevin, Grenoble). Se utilizan, por ejemplo, tanto para espectroscopía como para técnicas de activación neutrónica.

6.2.3 Experimentos en instalaciones subterráneas

Se trata de experimentos dedicados a la medida de la vida media del protón ($p \rightarrow \ e^+ + \pi^0, \mu^+ + K^0$), desintegración doble beta, interacciones de neutrinos, etc. Están instalados a gran profundidad (minas abandonadas, túneles, etc.) para evitar la contaminación de la radiación cósmica. Ejemplos de instalaciones son: el Gran Sasso (Italia), Canfranc (España), KAMIOKANDE (Japón), IMB (EEUU), etc.

En cualquier caso, un experimento típico necesita de tres ingredientes:

- un *trigger* (lógica electrónica) que seleccione las reacciones de interés;
- detectores adecuados (de los que ya se ha visto una descripción detallada) y
- una buena adquisición de datos.

6.2.4 Adquisición de datos

Se entiende por adquisición de datos, el control y flujo de datos producidos por los detectores de un experimento. Para ello se utilizan una serie de módulos electrónicos conectados a cada elemento de los detectores e integrados en chasis de arquitecturas estándar tales como CAMAC, FASTBUS o VME. A su vez, todos estos módulos están conectados a ordenadores, cuya misión es transmitir todo el flujo de datos sobre soportes magnéticos (es la llamada adquisición *on line*). Posteriormente, estos datos son analizados y estudiados por programas que operan esta vez *off-line*.

6.3 Medida de propiedades de las partículas

Se resume aquí el método empleado para medir las propiedades más importantes (carga Q, masa M, espín s, momento magnético μ, vida media τ, secciones eficaces y cocientes de desintegración) de las partículas.

6.3.1 Carga

Se lleva a cabo mediante dos métodos:

- Medida de la curvatura en campos magnéticos ($p = 0{,}3Z_1\mathcal{B} \cdot R$), siendo Z_1 un número entero, que es un múltiplo (o fracción) de la carga eléctrica elemental.
- Medida de la ionización producida. Viene dada por la ecuación de Bethe, que da la pérdida de energía por unidad de recorrido ($\frac{dE}{dx}$).

Un ejemplo interesante es la búsqueda de quarks libres. En efecto, dado que $\frac{dE}{dx} \propto Z_1^2$, esta cantidad es sensible a la carga fraccionaria de los quarks. Como es necesario conocer la energía, se suele combinar con la medida del tiempo de vuelo (TOF), que permite determinar $\beta = v/c$.

6.3.2 Masa

Se utilizan varios métodos según el tipo de partícula; la tabla 6.1 muestra las técnicas de medida y la resolución alcanzada. Más concretamente, la medida de la masa se realiza:

- e, p, n; utilizando *trampas magnéticas*.
- $\pi^{\pm}, K^{\pm}$; a través del espectro γ de desintegración de átomos piónicos o kaónicos.
- μ; inicialmente por el conocido experimento[1] "g-2", de precesión del espín del μ. Más recientemente por el estudio del *muonio*, átomo formado por $(e^- \mu^+)$.
- ν_μ; por cinemática de reacciones entre partículas, como se verá más abajo.
- resonancias hadrónicas; por la medida de la masa efectiva de los productos de desintegración (ejemplo: $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$; $\rho^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$; $\Delta^{++} \rightarrow p\pi^+$).

TABLA 6.1: Método de medida de la masa de partículas y precisión alcanzada.

partícula	$\Delta M/M$	técnica de medida
e	$4{\cdot}10^{-8}$	trampa magnética
μ	$5{\cdot}10^{-8}$	muonio $(e^- \mu^+)$
$\pi^{\pm}$	$3{\cdot}10^{-6}$	átomo piónico
p	$4{\cdot}10^{-8}$	trampa magnética
n	$4{\cdot}10^{-8}$	trampa magnética

El caso de la medida de la masa del ν_μ, es una aplicación sencilla de la cinemática relativista. Se parte de un haz de π^+, que en reposo, se desintegra dando $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$. La conservación de la energía implica que

$$m_\pi = \sqrt{p^2 + m_\mu^2} + \sqrt{p^2 + m_\nu^2} \tag{6.1}$$

ya que el momento $p_\mu = p_\nu = p$. De la anterior expresión se puede obtener

$$m_\nu^2 = m_\pi^2 + m_\mu^2 - 2m_\pi \sqrt{p^2 + m_\mu^2} \tag{6.2}$$

[1] F. Farley and E. Picasso; *Ann. Rev. Nuc. Sci.* **25** (1975) 241.

y el error[2] es simplemente

$$\delta(m_\nu^2) = \frac{2m_\pi p\delta p}{\sqrt{p^2+m_\mu^2}} \sim 76\delta p \tag{6.3}$$

Como $p_\mu = 30$ MeV, que es conocido con un error de 1 keV, se obtiene $\delta(m_\nu^2) \sim 0{,}1$ MeV^2.

En el experimento de R. Abela *et al.*,[3] se midió el momento del μ en un espectrómetro magnético dando $p = 29{,}7914 \pm 0{,}0008$ MeV/c, se obtuvo $m_\nu^2 = -0{,}163 \pm 0{,}080$ MeV^2, lo que se traduce como un límite superior de la masa del neutrino:

$$m_{\nu_\mu} < 0{,}25 \text{ MeV} \tag{6.4}$$

con un nivel de confianza del 90 %.

6.3.3 Espín

La medida del espín de las partículas se suele realizar por diversos métodos, dependiendo de la partícula.

- En general, analizando las distribuciones angulares en los procesos de desintegración o producción de partículas.
- En el caso del e^- y del protón, por la estructura hiperfina (resonancia magnética).
- Para el π, por el principio del balance detallado.

Se desarrolla a continuación el último de estos casos: el principio del balance detallado, y se aplica a la determinación del espín del pión.

La reacción

$$p + p \longleftrightarrow \pi^+ + d \tag{6.5}$$

puede estudiarse en los dos sentidos. Sus secciones eficaces valen:

$$\sigma_{pp} = |M_{if}|^2 \frac{(2s_\pi+1)(2s_d+1)}{\pi\hbar^4 v_i v_f} p_\pi^2 \tag{6.6}$$

$$\sigma_{\pi+d} = \frac{1}{2}|M_{fi}|^2 \frac{(2s_p+1)^2}{\pi\hbar^4 v_f v_i} p_p^2 \tag{6.7}$$

en donde el factor $\frac{1}{2}$ de la última expresión es debido a que en el estado final pp, las dos partículas son idénticas. En estas expresiones s_k es el espín de la

[2] Las masas $105{,}658369 \pm 0{,}000009$ y $139{,}57018 \pm 0{,}00035$ son muy precisas y no afectan al error que viene dominado por la medida de p_μ.

[3] R. Abela *et al.*, *Phys. Lett.*, **146B** (1984) 431.

partícula k y p_k, v_k el momento y su velocidad en el centro de masas. Como los términos $\frac{|M_{fi}|^2}{v_f v_i}$ son iguales, queda

$$\frac{\sigma_{pp}}{\sigma_{\pi d}} = 2\frac{(2s_\pi + 1)(2s_d + 1)}{(2s_p + 1)^2}\frac{p_\pi^2}{p_p^2} \tag{6.8}$$

y el resultado de los experimentos concuerda con el espín del pión, $s_\pi = 0$.

6.3.4 Momentos magnéticos

Si bien el espín $\vec{s}$, está cuantizado, el momento (dipolar) magnético de las partículas $\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{s}$, no lo está. La teoría de Dirac, predice que para partículas sin estructura, es decir, puntuales, como el electrón, el factor $g_e = 2$.

Debido a su momento magnético $\vec{\mu}$, una partícula en un campo magnético siente una fuerza $\vec{F} = \vec{\mu} \cdot \nabla\mathcal{B}$ (si $\mathcal{B}$ es inhomogéneo) y está sometida a un par $\vec{N} = \vec{\mu} \times \vec{\mathcal{B}}$. Este par es responsable de la precesión del espín en un campo $\mathcal{B}$ uniforme cuya frecuencia angular viene dada por la ecuación de Thomas-BMT:[4]

$$\omega_s = \frac{e}{m\gamma}\left[(1 + a)\vec{\mathcal{B}}_{||} + (1 + a\gamma)\vec{\mathcal{B}}_\perp\right] \tag{6.9}$$

en donde $a = \frac{1}{2}(g - 2)$ es una magnitud que se la suele denominar *anomalía*, puesto que si $g \neq 2$ representa la desviación sobre el comportamiento puntual de dicha partícula. Las componentes $\vec{\mathcal{B}}_{||}$ y $\vec{\mathcal{B}}_\perp$ son relativas a la dirección de la partícula. El momento $\vec{p}$ de la partícula en el campo $\mathcal{B}$, gira con la frecuencia ciclotrón

$$\omega_c = \frac{e}{m\gamma}\mathcal{B}_\perp \tag{6.10}$$

El momento magnético $\vec{\mu}$ de una partícula tiene una precesión total

$$\phi_p = \frac{e}{m\beta\gamma}(1 + a\gamma)\int \mathcal{B}_\perp dl \tag{6.11}$$

que se obtiene de (6.9) para $\vec{\mathcal{B}}_{||} = 0$ teniendo en cuenta que $\omega_p = d\phi_p/dt$. Así, el ángulo neto entre el giro del momento $\vec{p}$ y el del espín $\vec{s}$ para una partícula cargada es

$$\phi_{\text{net}} = \frac{e}{m\beta}a\int \mathcal{B}_\perp dl \tag{6.12}$$

(en el caso de una partícula puntual se cumplirá que $\phi_{\text{net}} = 0$, es decir, los ángulos de precesión del momento y del espín son idénticos).

Por ejemplo, en el caso del Λ^0, a partir de su desintegración $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$, se puede medir el ángulo de precesión de su espín ϕ_p a partir de (6.11) y de aquí se deduce g, es decir, su momento magnético. Para ello debe medirse el vector polarización del Λ^0 en un campo inhomogéneo (ϕ_p para distintos valores

[4] Las iniciales BMT corresponden a Bargmann-Michel-Teledgi.

de $\int Bdl$, que se ajusta a una recta). El vector polarización del Λ^0, en reposo, viene dado por

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi}(1 + \alpha \vec{P} \cdot \vec{k}) \tag{6.13}$$

siendo $\vec{k}$ el vector unitario del momento del protón y $\alpha = 0{,}642$ el parámetro de asimetría (que mide la interferencia entre los términos $\ell = 0$ y $\ell = 1$, onda S y onda P respectivamente, del sistema $p\pi^-$) de la desintegración del $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$. La polarización del Λ^0 viene dada por la asimetría de los protones emitidos (salen en dirección contraria a la del espín del Λ^0). Para obtener Λ^0 polarizados es suficiente crearlos a partir de una reacción como

$$p + p \rightarrow \ pK^+\Lambda^0 \tag{6.14}$$

en donde, por conservación de la paridad, el espín del Λ^0 es perpendicular al plano de producción. El valor aceptado para el momento magnético del Λ^0, según el PDG, es $\mu_\Lambda = (-0{,}613 \pm 0{,}004)\ \mu_{\mathrm{N}}$

6.3.5 Vidas medias

Se miden a partir del recorrido libre medio de la partícula, $\ell_{\mathrm{D}} = \gamma\beta c\tau$. De esta manera, el número de desintegraciones en función de la distancia varía según la ley

$$N(x) = N_0\, e^{-x/\ell_{\mathrm{D}}} \tag{6.15}$$

6.3.6 Secciones eficaces

La sección eficaz representa la probabilidad de interacción por partícula incidente y por blanco.

Sea un haz de partículas procedentes de un acelerador, de flujo I_0, que incide sobre un blanco material. El número de átomos/volumen en el blanco es

$$n_a = \frac{\mathcal{N}_{\mathrm{A}}\ (\text{átomos/mol}) \cdot \rho\ (\text{g/cm}^3)}{A\ (\text{g/mol})}$$

Al atravesar un espesor elemental del material, dx, el cambio de flujo incidente viene dado por

$$dI(x) = -\sigma I n_a dx \tag{6.16}$$

siendo σ la sección eficaz total.

La reducción del haz a medida que atraviesa el blanco, es exponencial:

$$I(x) = I_0 e^{-\sigma n_a x} \tag{6.17}$$

La probabilidad de interacción de una partícula al atravesar un espesor L de material será

$$P = 1 - e^{-\sigma n_a L} \tag{6.18}$$

La longitud de interacción (recorrido libre medio entre dos choques) es:

$$\lambda_i = \frac{1}{\sigma n_a} \tag{6.19}$$

La medida de las secciones eficaces se basa en las anteriores definiciones.

6.3.7 Cocientes de desintegración BR

Cuando una partícula se desintegra, suele hacerlo en distintos modos de desintegración (llamados también canales de desintegración). Es importante medir las probabilidades relativas de cada modo parcial de desintegración.

Por ejemplo el K^+(493.7 MeV/c^2) tiene 6 modos de desintegración con los siguientes cocientes de desintegración (*branching ratios BR*):

	desintegración	frecuencia
K^+	$\rightarrow \mu^+\nu_\mu$	0.635
	$\rightarrow \pi^+\pi^0$	0.212
	$\rightarrow \pi^+\pi^+\pi^-$	0.056
	$\rightarrow \pi^+\pi^0\pi^0$	0.017
	$\rightarrow \pi^0\mu^+\nu_\mu$	0.032
	$\rightarrow \pi^0 e^+\nu_e$	0.048

6.4 El experimento ideal: producción y desintegración del Z^0

Un experimento ideal de física de altas energías es el de los colisionadores LEP y SLC, de estudio del bosón intermediario Z^0. Recuérdese que se trata de una partícula con masa $91{,}1876 \pm 0{,}0021$ GeV/c^2 y con anchura $2{,}4952 \pm 0{,}0023$ GeV. Para estudiarlo, hay que producirlo y detectar las partículas resultantes de su desintegración. Se trata pues de un experimento en dos fases:

a) Producción en colisiones e^+e^-. Para ello hay que situarse a una energía tal que esté cerca de la masa del bosón Z^0, o sea $E_\pm = 45{,}6$ GeV.

b) Estudio de los canales de desintegración. El Z^0 se puede desintegrar según los pares de fermiones fundamentales:

- los tres canales con leptones cargados; $Z^0 \rightarrow \ell^+ + \ell^-$ ($\approx 10\,\%$),
- los tres neutrinos; $Z^0 \rightarrow \nu + \overline{\nu}$ ($\approx 20\,\%$),
- los cinco quarks con masa inferior al Z^0; $Z^0 \rightarrow q\overline{q}$, con $q = u, d, c, s, b$ ($\approx 70\,\%$).

El detector debe poseer un campo magnético $\mathcal{B}$ y una zona amplia para medir el momento a partir de la trayectoria de las partículas cargadas:

$$p = 0{,}3\mathcal{B}R \tag{6.20}$$

en donde p viene dado en GeV/c, $\mathcal{B}$ en tesla y R, radio de curvatura de la trayectoria, en metros.

El detector ideal consistirá de cinco partes:

a) Detección de vértices y trazas.
Para medir vértices de interacción (primarios) y de desintegración (secundarios) se utilizarán detectores de microvértice; a base de semiconductores de silicio en microbandas. La resolución sobre la medida de una coordenada espacial (un impacto) será $\sigma \sim 20\ \mu$m.

Para medir trayectorias, se podrá utilizar, preferentemente, cámaras TPC (de proyección temporal) y/o cámaras de deriva.

b) Medida del tiempo de vuelo.
El detector ideal está basado en contadores de centelleo. Miden el instante t de paso de las partículas cargadas, respecto al tiempo t_0 de colisión. Pueden alcanzar resoluciones temporales $\sigma_t \sim 200$ picosegundos.

El tiempo que requiere una partícula para recorrer una distancia L viene dado por $t = L/v$, con lo que

$$t/L = \frac{3333}{p}\sqrt{p^2 + m^2}\ \text{ pseg/m} \tag{6.21}$$

A partir de esta fórmula, puede estimarse la capacidad de identificación de la masa de la partícula, conocido su momento.

c) Identificación por efecto Cherenkov.
Un buen candidato es el RICH (*Ring Image Cherenkov*). Al medir el ángulo de emisión de luz Cherenkov, puede determinarse la velocidad de la partícula, como p es conocido, se deduce E y por lo tanto la masa. Un ejemplo de las posibilidades de identificación utilizando contadores RICH en el detector DELPHI se muestra en la figura 6.3.

d) Calorímetros.
Harán falta tanto uno electromagnético como otro hadrónico. La energía de $e^{\pm}$ y de fotones de alta energía quedará determinada en el primero. Los hadrones (π, K, p) atravesarán el calorímetro electromagnético sin perder mucha energía y la perderán toda en el hadrónico.

e) Detectores de muones.
Los muones son las únicas partículas capaces de atravesar toda la materia del detector, ya que el único fenómeno que les afecta es la pérdida de energía por ionización (Bethe). Si se colocan cámaras fuera del detector, sólo los muones atravesarán toda la materia del detector y serán detectados en las cámaras externas de muones.

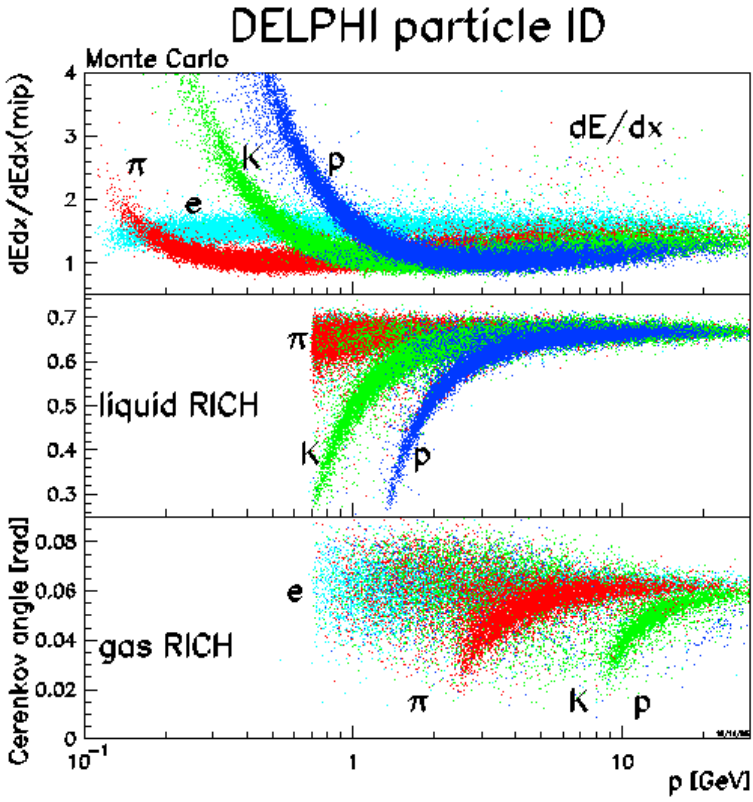


Figura 6.3: Simulación por el método Monte Carlo de la identificación de partículas en el detector DELPHI del LEP (CERN). En la parte superior se muestra la pérdida de energía por Bethe en la cámara TPC. Los dos espectros de la parte inferior muestran la respuesta de los detectores RICH, líquido y gaseoso. La combinación de estas medidas permite identificar partículas en las zonas energéticas indicadas. Tesis Doctoral de J. Zúñiga, Valencia, 1993.

Este diseño experimental corresponde a uno de los grandes espectrómetros que fueron utilizados o se encuentran en funcionamiento en los colisionadores e^+e^-, $p\bar{p}$ (ALEPH, DELPHI, L3 y OPAL en el LEP del CERN; CDF y D0 en el Tevatrón de Fermilab; SLD en el SLC de SLAC, Stanford, etc.).

Otras versiones más especializadas fueron: a) la que se utilizó en SPEAR (colisionador e^+e^- de SLAC) por B. Richter y b) en Brookhaven por S. Ting en el descubrimiento (simultáneo) del mesón J/Ψ (que condujo al descubrimiento del quark *charm*) o c) la que se utilizó por L. Lederman en el descubrimiento del Υ (que permitió identificar el quark *beauty*) en Fermilab.

Hoy en día se sigue el mismo esquema para diseñar los detectores del futuro, por ejemplo los detectores ATLAS y CMS que se instalarán en el próximo colisionador protón-protón LHC del CERN.

6.5 Ejercicios

6.1. Masas, vidas medias y momentos magnéticos.
a) Utilizando los datos del PDG, hacer una tabla con las masas de las siguientes partículas: e, μ, p, n y π^+, indicando la precisión de dichas medidas, así como la técnica de medida utilizada.
b) Ídem para las vidas medias.
c) Ídem para los momentos magnéticos.

6.2. El muonio y la masa del muón.
a) Un muonio es un estado ligado $e^-\mu^+$. Determinar el espectro del muonio a partir del espectro del átomo de hidrógeno.
b) Determinar el desdoblamiento hiperfino del nivel 1S a partir de las fórmulas correspondientes para el hidrógeno.
c) A partir de la medida de este desdoblamiento:

$$\Delta\nu_\mu = 4,463302765(53)\ \text{GHz}$$

y utilizando los valores experimentales de α, m_e y R_∞ (constante de Rydberg), determinar la masa del muón y el error correspondiente.

6.3. Factor giromagnético de los leptones.
Utilizando el límite no relativista de la ecuación de Dirac en un campo electromagnético, demostrar que los leptones cargados tienen un factor giromagnético $g = 2$.

6.4. Momento magnético anómalo del electrón.
Se conoce como 'geonio' el sistema formado por un electrón atrapado en un campo magnético constante. Dicho sistema se puede conseguir en los dispositivos llamados 'trampas magnéticas'.
a) Los niveles cuánticos del geonio, sin incluir el espín, son

$$E_n = (n + 1/2)\hbar\omega_c \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

siendo ω_c la frecuencia del ciclotrón. Calcular el espectro que se obtiene incluyendo el espín.
b) Demostrar que a partir de los niveles del geonio se puede obtener la anomalía del electrón, definida como $a_e = (g_e - 2)/2$, como un simple cociente de frecuencias.

6.5. Medida precisa de α.
a) La anomalía del electrón se puede calcular, a partir de QED, en forma de una serie perturbativa del tipo

$$a_e = a_1(\alpha/\pi) + a_2(\alpha/\pi)^2 + a_3(\alpha/\pi)^3 + \ldots$$

Calcular α a partir de la medida experimental efectuada en una trampa magnética

$$a_e = 1,1596521884(43)\ 10^{-3}$$

y los dos primeros coeficientes de la serie, $a_1 = 0,5$ y $a_2 = -0,328478965$.
b) Estimar el número de términos de la serie de a_e que hay que calcular para que la precisión del cálculo teórico sea comparable con el error experimental.
c) Comparar la precisión de esta medida de α con la que se obtiene mediante cálculo directo a partir de la fórmula $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c)$.

6.6. Momento magnético anómalo del muón.
La ecuación relativista que describe la precesión de espín en un campo magnético $\vec{B}$ es la siguiente (ecuación de Thomas-BMT):

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{e}{m}\vec{S} \wedge \left[\left(a + \frac{1}{\gamma}\right)\vec{B} - \frac{a\gamma}{\gamma+1}(\vec{\beta}\cdot\vec{B})\vec{\beta} \right]$$

donde e, m y a son la carga, la masa y la anomalía de la partícula, respectivamente.
a) Demostrar que si $\vec{B}$ es perpendicular al momento, la frecuencia de precesión del espín respecto al momento es $\omega_a = a(eB/m)$.
b) En el experimento 'g-2' de Brookhaven, se mide ω_a inyectando muones longitudinalmente polarizados con momento $p = 3,094$ GeV en un anillo circular cuyo radio es ρ= 7,112 m. Los muones se mantienen en órbita circular gracias a un campo magnético perpendicular al plano del movimiento de $B = 1,451$ T. Calcular el número medio de revoluciones que realiza un muón antes de desintegrarse, así como el número medio de periodos de precesión del espín respecto al momento.
c) El campo B se mide mediante la frecuencia ω_p de resonancia nuclear magnética para protones en agua. A partir de la medida del cociente

$$R = \omega_a/\omega_p = 3,707220(47)$$

extraer el valor de a_μ, utilizando la medida experimental del cociente de momentos magnéticos $\mu_\mu/\mu_p = 3,18334547(47)$, y compararlo con el valor de la anomalía del electrón.

Parte III

Simetrías y hadrones

7. Simetrías y leyes de conservación

7.1 Introducción

Las simetrías y las leyes de conservación aparecen constantemente en la física. La importancia de las simetrías en física de partículas es que conducen a leyes de conservación. Este es el contenido del teorema de Noether, que dice que cada simetría de la naturaleza está asociada a una ley de conservación y viceversa. Ejemplos de esta conexión pueden verse en la tabla 7.1.

TABLA 7.1: Conexión entre simetría y ley de conservación que cumplen los sistemas físicos, consecuencia del teorema de Noether. Las tres primeras simetrías son espacio-temporales. La última simetría se refiere a la electrodinámica y es del espacio *interno* de las propiedades de las partículas.

invariancia		magnitud conservada
desplazamientos de t	$\rightarrow$	E, energía total del sistema
desplazamientos de x	$\rightarrow$	p, cantidad de movimiento total del sistema
rotaciones de θ	$\rightarrow$	ℓ, momento angular total del sistema
transformaciones *gauge*	$\rightarrow$	Q, la carga eléctrica

Matemáticamente, una simetría está asociada a una transformación que deja invariante la función de ondas del sistema físico, por lo tanto es una propiedad que puede cumplir cualquier tipo de interacción.

Las leyes de conservación están emparejadas con la existencia de números cuánticos que se conservan, es decir, permanecen inalterados antes y después de una interacción.

Algunas leyes son universales; son válidas para todas las interacciones. Por el contrario, hay simetrías que no son aplicables a ciertas interacciones. Un ejemplo es la paridad, que no se conserva en las interacciones débiles.

En ausencia de teorías, conocer bien las simetrías de un sistema y las leyes de conservación permite conocer muchas propiedades sobre una interacción.

7.1.1 Clasificación de las simetrías

Es posible establecer tres características que permiten clasificar las simetrías.

En primer lugar, existen dos tipos de simetrías según la naturaleza del espacio en el que se aplican:

- simetrías espacio-temporales: son consecuencia de propiedades del espacio-tiempo. Las leyes físicas son independientes del sistema de referencia utilizado para describir un fenómeno: debe existir invariancia bajo traslaciones y rotaciones.
- simetrías internas: son consecuencia de la propia estructura de las partículas. Las leyes físicas presentan invariancias bajo transformaciones de propiedades de las partículas, por ejemplo isospín I, conjugación de carga $\mathcal{C}$ o transformaciones del grupo $SU(3)$, etc.

Pueden también clasificarse en:

- simetrías continuas

  La invariancia bajo transformaciones continuas da lugar a números cuánticos aditivos.

- simetrías discretas

  La invariancia bajo transformaciones discretas da lugar a números cuánticos multiplicativos.

Por último, existen teorías que cumplen un tipo de simetría muy particular, conocida como invariancia *gauge*. Es una simetría que se originó en el estudio del electromagnetismo, ligada a la elección del potencial $(\phi, \vec{A})$. Se puede elegir un potencial distinto si se exige la invariancia de las ecuaciones bajo la transformación *gauge*:

$$\Psi(\vec{x},t) \longrightarrow \Psi'(\vec{x},t) = e^{-iqf(\vec{x},t)}\Psi(\vec{x},t) \tag{7.1}$$

Estas simetrías pueden clasificarse como simetrías globales (se cumplen en todo el espacio; entonces la función f en (7.1) es una constante) o simetrías locales (la función escalar $f(\vec{x},t)$, depende de la coordenada espacial).

7.1.2 Invariancia y conmutación con H

Una forma de visualizar la conexión entre simetría y ley de conservación es a través de la propia ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle = H|\Psi(t)\rangle$$

El hamiltoniano da lugar al operador evolución $U(t, t_0)$ que permite obtener la función de ondas para cualquier instante de tiempo:

$$|\Psi(t)\rangle = U(t, t_0)|\Psi(t_0)\rangle$$

siendo

$$\boxed{U(t, t_0) = e^{-iH(t - t_0)/\hbar}}$$

Sea D una magnitud física. Su evolución temporal vendrá dada por $D(t) = UD(t_0)U^+$.

En la llamada representación de Heisenberg se cumple que

$$i\hbar\frac{dD}{dt} = [H, D] \tag{7.2}$$

con lo que si un operador conmuta con el hamiltoniano H, da lugar a una magnitud que se conserva. En efecto, si $|\phi'\rangle = D|\phi\rangle$ y $|\Psi'\rangle = D|\Psi\rangle$ se cumple que $\langle\phi'|H|\Psi'\rangle = \langle\phi|H|\Psi\rangle$ ya que D es un operador unitario, puesto que deja la norma del sistema invariante: $|\langle\phi'|\Psi'\rangle|^2 = |\langle\phi|\Psi\rangle|^2$.

Las operaciones de simetría suelen formar grupo (abeliano o no abeliano); puede ser un grupo finito o infinito y puede tratarse de un grupo continuo o discreto.

Los grupos más interesantes en física de partículas suelen estar representados por matrices (por ejemplo el grupo de Lorentz): a cada elemento del grupo a, le corresponde una matriz $\mathcal{M}_a$.

7.2 Invariancia relativista

De capital importancia es la noción de invariancia relativista que se deriva de la teoría especial de la relatividad. Tiene dos principios básicos: 1) el principio de la relatividad, que dice que la física debe ser la misma en todos los sistemas inerciales y 2) el principio de constancia de la velocidad de la luz, que implica que la velocidad de la luz es isótropa y de igual magnitud en todos los sistemas inerciales. Es por ello que ningún ente puede desplazarse a una velocidad superior a la de la luz en el vacío, c.

La invariancia relativista implica que las ecuaciones físicas deben ser independientes del sistema de referencia utilizado. Por ello, si se conocen las leyes físicas que gobiernan un sistema físico, ha de saberse cómo transformar sus observables dependiendo del sistema de referencia desde el que se observe. Estas transformaciones entre sistemas de coordenadas son las transformaciones de Lorentz (generalización de las conocidas transformaciones de Galileo de la física clásica). La invariancia Lorentz, coloca en el mismo plano al tiempo y al espacio.

Para estudiar las consecuencias de las transformaciones de Lorentz, se presenta a continuación la notación relativista basada en cuadrivectores.

7.2.1 Notación relativista

Las coordenadas relativistas de un punto en el espacio-tiempo $(ct\,,x\,,y,z)$ $= x^\mu$, forman un vector contravariante, que se denomina el cuadrivector posición x^μ, que también suele escribirse $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \vec{x})$, con el bien entendido que la coordenada 0 se refiere al tiempo ($x^0 = ct$). Análogamente se define el cuadrivector energía-momento: $(\frac{E}{c}, \vec{p}) = p^\mu$.

Sea $\hat{x}$ la coordenada de un punto en un sistema estacionario, cuyo origen de coordenadas es $\mathcal{O}$, como puede verse en la figura 7.1. Respecto a un sistema $\mathcal{O}'$, que se mueve a una velocidad v constante respecto al sistema fijo, la coordenada se transforma en $\hat{x}'$, y se aplica la transformación de Lorentz según el eje z:

$$\boxed{\hat{x}'^{\mu} = \Lambda^\mu_\nu \hat{x}^\nu} \tag{7.3}$$

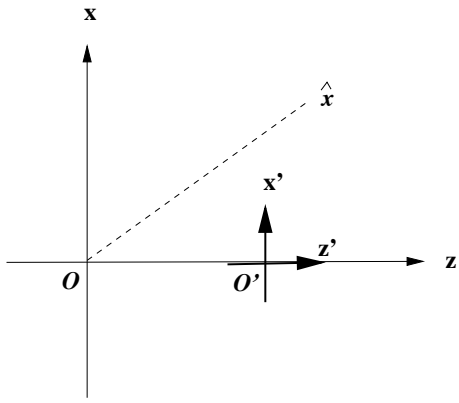


Figura 7.1: Representación gráfica del movimiento de un sistema de coordenadas ($\mathcal{O}'$) respecto al sistema laboratorio ($\mathcal{O}$), que se supone fijo con el observador.

En el caso general en el que el sistema $\mathcal{O}'$ se mueve con velocidad $\vec{\beta}$ respecto de $\mathcal{O}$, la transformación de Lorentz es

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= \vec{x} + \vec{\beta}\gamma \left(\frac{\gamma}{\gamma+1} \vec{\beta} \cdot \vec{x} - ct \right) \\ ct' &= \gamma(ct - \vec{\beta} \cdot \vec{x}) \end{aligned} \tag{7.4}$$

En el caso de elegir la dirección de $\mathcal{O}'$ según el eje z la transformación es más

sencilla, quedando matricialmente,

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{7.5}$$

en donde

$$\beta = v/c \qquad\qquad \gamma = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}} \tag{7.6}$$

Todo cuadrivector que se transforme según la ley (7.3) se dice que es un cuadrivector contravariante x^μ. Los vectores covariantes tienen idéntica componente temporal y las espaciales cambiadas de signo; también se transforman según la misma matriz de Lorentz.

El tensor métrico, $g_{\mu\nu}$, cuya definición es:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{7.7}$$

es el que permite transformar cuadrivectores contravariantes y covariantes entre sí:

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$$

e igualmente,

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu$$

cumpliéndose

$$g_{\mu\nu} g^{\mu\sigma} = \delta^\sigma_\nu$$

o sea, que su producto es igual a la delta de Kronecker y, por lo tanto, los tensores métricos $g^{\mu\nu}$ y $g_{\mu\nu}$ son iguales.

Sucede, pues, que un cuadrivector covariante se diferencia del contravariante en el hecho de que tiene las coordenadas espaciales cambiadas de signo.

Una curiosidad es el cuadrivector derivada. Si se trata del cuadrivector derivada respecto a las coordenadas contravariantes, será un cuadrivector covariante:[1]

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right)$$

mientras que

$$\partial^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right)$$

[1] Se utilizan frecuentemente, en este tema, las unidades naturales, $\hbar = c = 1$, para simplificar la notación.

con lo cual el operador de D'Alembert toma la forma

$$\boxed{\partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \Box^2} \tag{7.8}$$

con el que se simplifica la notación; por ejemplo la ecuación de Klein-Gordon es

$$(\Box^2 + m^2)\phi = 0 \tag{7.9}$$

7.2.2 Invariantes Lorentz

El producto escalar de dos cuadrivectores, por ejemplo $\hat{p} \cdot \hat{q}$, será un escalar y por consiguiente un invariante Lorentz. No cambia bajo una transformación de Lorentz.

El producto escalar se define

$$p^\mu q_\mu = g^{\mu\nu} p_\nu q_\mu = p^0 q^0 - \vec{p} \cdot \vec{q} \tag{7.10}$$

luego las normas de los vectores

$$\hat{x}^2 = t^2 - \vec{r}^2$$

$$\hat{p}^2 = E^2 - \vec{p}^2 = m^2$$

serán invariantes Lorentz.

Un invariante muy utilizado en el estudio de las propiedades de las partículas inestables, con vida media muy corta (las resonancias hadrónicas) es la masa efectiva, M. Sea una partícula que se desintegra en otras dos, que tienen cuadrimomentos $\hat{p}_1$ y $\hat{p}_2$. La masa efectiva se define

$$M^2 = (\hat{p}_1 + \hat{p}_2)^2 = \hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2 + 2\hat{p}_1 \cdot \hat{p}_2 = m_1^2 + m_2^2 + 2(E_1 E_2 - p_1 p_2 cos\theta)$$

en donde θ es el ángulo entre los vectores tridimensionales $\vec{p}_1$ y $\vec{p}_2$.

7.2.3 Transformaciones entre sistemas de coordenadas

Sea una partícula de masa m cuyo cuadrivector es $\hat{p} = (E, \vec{p})$; se cumple $\hat{p}^2 = m^2$.

La energía y el momento relativistas son:

$$E = \gamma m c^2 \qquad \text{y} \qquad \vec{p} = \gamma m \vec{v}$$

luego

$$\boxed{\vec{\beta} = \frac{\vec{p}}{E}} \tag{7.11}$$

Supóngase ahora el caso de una colisión entre dos partículas. Se trata de conocer el cuadrivector energía-momento de las partículas que intervienen, en cualquier sistema de coordenadas. En física de partículas, los sistemas de coordenadas más utilizados son el sistema laboratorio y el sistema centro de masas. Se designará con un asterisco (*) las magnitudes del centro de masas.

El sistema laboratorio está fijo (por ejemplo con el observador), y el centro de masas se mueve con velocidad $\vec{\beta}_{cm}$ respecto a aquél. El cuadrivector energía-momento de la partícula en el sistema centro de masas será $(E^*, \vec{p}^{\,*})$. Si $p_{||}$ es la componente de $\vec{p}$ paralela a $\vec{\beta}_{cm}$, se tendrá:

$$\begin{pmatrix} E^* \\ p^*_{||} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{cm} & -\beta_{cm}\gamma_{cm} \\ -\beta_{cm}\gamma_{cm} & \gamma_{cm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p_{||} \end{pmatrix} \tag{7.12}$$

quedando las componentes perpendiculares invariantes:

$$p^*{}_{\mathrm{T}} = p_{\mathrm{T}}$$

ya que las componentes perpendiculares no son alteradas por una transformación de Lorentz (en el caso de la transformación (7.3), las componentes según los ejes y y z, no cambian).

Ejemplo 1. Sea una colisión $\pi^- + p$, en la que un haz de π^- bombardea un blanco de hidrógeno en reposo tal como puede verse en la figura 7.2. En el sistema laboratorio se tiene $p_{\pi^-} \neq 0$, pero el momento del blanco, $\vec{p}_p = 0$.

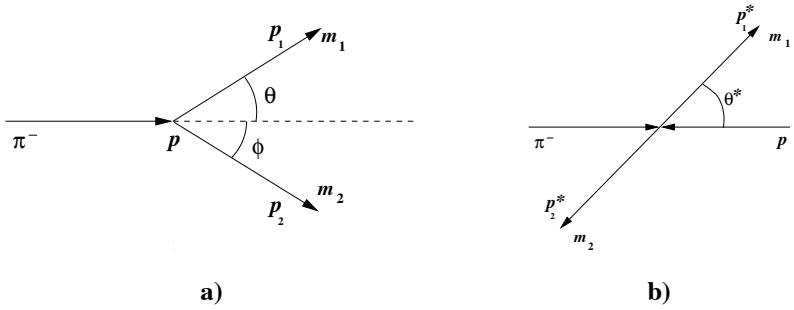


Figura 7.2: La colisión $\pi^- + p \rightarrow\ m_1 + m_2$, vista desde **a)** el sistema laboratorio y **b)** el sistema centro de masas.

El movimiento del centro de masas de la colisión tiene por parámetros:

$$\vec{\beta}_{cm} = \frac{\vec{p}_\pi}{E_\pi + m_p} \tag{7.13}$$

$$\gamma_{cm} = \frac{E_\pi + m_p}{E_{cm}} \tag{7.14}$$

en donde E_π y $\vec{p}_\pi$ se refieren al sistema laboratorio.

La energía total del centro de masas, E_{cm} puede calcularse utilizando los invariantes relativistas. Los cuadrivectores del pión y del protón son $\hat{p}_\pi = (E_\pi, \vec{p}_\pi)$ y $\hat{p}_p = (m_p, 0)$ en el sistema en el que la partícula m_2 está en reposo (sistema laboratorio). El cuadrivector suma de ambos: $\hat{p} = (\hat{p}_\pi + \hat{p}_p)$ tiene por norma

$$\hat{p}^2 = \hat{p}_\pi^2 + \hat{p}_p^2 + 2\hat{p}_\pi \cdot \hat{p}_p = E_{cm}^2$$

es decir, la energía del centro de masas que se buscaba. Este cálculo tiene la ventaja que puede realizarse en cualquier sistema de coordenadas, ya que es un escalar Lorentz. En general se tendrá:

$$\hat{p}^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2(E_1 E_2 - \vec{p}_1 \vec{p}_2) = E_{cm}^2$$

o sea, si se calcula en el sistema laboratorio:

$$E_{cm}^2 = m_\pi^2 + m_p^2 + 2E_\pi m_p \tag{7.15}$$

Si se conoce el ángulo entre las partículas 1 y 2 ($\theta + \phi$ en el sistema laboratorio de la figura 7.2) se obtiene:

$$E_{cm}^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 E_2 (1 - \beta_1 \beta_2 \cos(\theta + \phi))$$

y así queda resuelto el problema, tanto en el caso de una colisión elástica, en la que las masas cumplirían $m_1 = m_\pi$ y $m_2 = m_p$ como en el caso de cualquier otra reacción inelástica, a dos cuerpos en el estado final, por ejemplo: $\pi^- + p \to \pi^0 + n$.

Se podría, a continuación, calcular el momento de las partículas incidente y blanco en el centro de masas, en el que se cumple por definición que $|\vec{p}_\pi^{\,*}| = |\vec{p}_p^{\,*}|$, resultando al aplicar la transformación (7.12):

$$p^* = p_\pi \frac{m_p}{E_{cm}} \tag{7.16}$$

Otra manera de calcular estas cantidades, en función de la energía centro de masas, que se suele escribir $E_{cm} = \sqrt{s}$ es la siguiente; tomando como eje el de la dirección del π incidente, como aparece en la figura 7.2 se cumple para las partículas del estado inicial:

$$\hat{p}_\pi = (E_\pi, \vec{p}_\pi) \qquad \hat{p}_p = (m_p, 0) \tag{7.17}$$

y las del estado final:

$$\hat{p}_1 = (E_1, \vec{p}_1) \qquad \hat{p}_2 = (E_2, \vec{p}_2) \tag{7.18}$$

de forma que el ángulo θ se obtiene a partir de $\cos\theta = \dfrac{\vec{p}_\pi \cdot \vec{p}_1}{|p_\pi||p_1|}$.

Análogamente, los cuadrimomentos en el centro de masas para el estado inicial:

$$\hat{p}_\pi^{\,*} = (E_\pi^*, \vec{p}_\pi^{\,*}) \qquad \hat{p}_p^{\,*} = (E_p^*, \vec{p}_p^{\,*}) \tag{7.19}$$

y las del estado final:

$$\hat{p_1}^* = (E_1^*, \vec{p_1}^*) \qquad\qquad \hat{p_2}^* = (E_2^*, \vec{p_2}^*) \tag{7.20}$$

obteniéndose el ángulo θ^* de la expresión $\cos\theta^* = \frac{\vec{p_\pi}^* \cdot \vec{p_1}^*}{|p_\pi^*||p_1^*|}$.

La conservación del cuadrimomento en el sistema laboratorio se expresa

$$\hat{p}_\pi + \hat{p}_p = \hat{p}_1 + \hat{p}_2 \tag{7.21}$$

mientras que en el centro de masas se cumple

$$\vec{p_\pi}^* + \vec{p_p}^* = \vec{p_1}^* + \vec{p_2}^* = 0 \tag{7.22}$$

para el trimomento y

$$E_\pi^* + E_p^* = E_1^* + E_2^* = E_{cm} = \sqrt{s} \tag{7.23}$$

para la energía. Se observa que:

$$\hat{p}_\pi^* + \hat{p}_p^* = (E_{cm}, 0) \tag{7.24}$$

lo que simplifica enormemente los cálculos. En efecto, se encuentra directamente que

$$E_\pi^* = \frac{\hat{p}_\pi^* \cdot (\hat{p}_\pi^* + \hat{p}_p^*)}{E_{cm}} = \frac{E_{cm}^2 + m_\pi^2 - m_p^2}{E_{cm}} \tag{7.25}$$

y de aquí:

$$p_\pi^* = \sqrt{E_\pi^{*2} - m_\pi^2} = \frac{\omega(s, m_\pi^2, m_p^2)}{2\sqrt{s}} \tag{7.26}$$

donde la función $\omega(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz)^{\frac{1}{2}}$, aparece muy frecuentemente en los cálculos de invariantes relativistas.

Ejemplo 2. Se pretende calcular el momento de una de las partículas resultantes de la desintegración de otra.

La figura 7.3, muestra un esquema de la desintegración de una partícula de masa M en otras dos, con masas m_1 y m_2 y cuyos momentos son $\vec{p}_1$ y $\vec{p}_2$.

En el sistema de centro de masas de la partícula M (piénsese por ejemplo en la desintegración $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$), se puede calcular el momento de las dos partículas resultantes (que son iguales y de signo cambiado), desarrollando $M^2 = (p_1 + p_2)^2$, obteniéndose:

$$|\vec{p_1}^*| = \frac{\left\{[M^2 - (m_1 + m_2)^2][M^2 - (m_1 - m_2)^2]\right\}^{\frac{1}{2}}}{2M} \tag{7.27}$$

que es otra forma de escribir

$$|\vec{p_1}^*| = |\vec{p_2}^*| = \frac{\omega(M, m_1, m_2)}{2M} \tag{7.28}$$

De la misma manera, se puede calcular la energía en el centro de masas de la partícula 1:

$$E_1^* = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M} \tag{7.29}$$

o bien de la partícula 2, simplemente permutando $1 \leftrightarrow 2$.

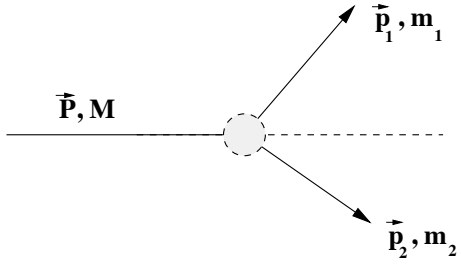


Figura 7.3: Esquema de la desintegración de una partícula de masa M en otras dos de masas m_1 y m_2, proceso que suele escribirse $M \longrightarrow m_1 + m_2$.

7.2.4 La regla dorada de Fermi, relativista

Se pueden distinguir dos casos: desintegración de una partícula y procesos de interacción. En ambos, la finalidad de la regla dorada es calcular las probabilidades de desintegración o de reacción entre partículas. Toda la información teórica está contenida en el llamado elemento de matriz $\mathcal{M}$, invariante Lorentz. Este elemento de matriz es proporcional a la amplitud de probabilidad de transición, es decir a la cantidad

$$\int \phi_f^*(x) V(x) \phi_i(x) d^4x \tag{7.30}$$

donde $\phi_i(x), \phi_f(x)$ son las funciones que representan el estado inicial y final del proceso, respectivamente, y $V(x)$ la interacción. Los cálculos teóricos se suelen realizar a partir de los diagramas de Feynman que explican cada proceso, aplicando a cada uno, las reglas de Feynman (consúltese la bibliografía, por ejemplo Halzen and Martin [2].)

Desintegración a n cuerpos

Sea una partícula de masa M, inestable, que se desintegra en otras n partículas,

$$M \longrightarrow m_1 + m_2 + m_3 \ldots + m_n$$

la expresión del ritmo de transición (probabilidad de transición por unidad de tiempo), toma la forma:

$$\boxed{d\lambda = \frac{(2\pi)^4}{2M}|\mathcal{M}|^2 d\Phi_n(P; p_1, p_2, ..., p_n)} \tag{7.31}$$

donde $\mathcal{M}$ es el elemento de matriz invariante Lorentz, el cuadrivector $P = \sum p_i$ y el elemento de espacio fásico de n cuerpos en el estado final es

$$d\Phi_n = \delta^4\left(P - \sum_i^n p_i\right) \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} \tag{7.32}$$

Se verán varios ejemplos de elementos de matriz $\mathcal{M}$ en el capítulo 9, dedicado al estudio de las interacciones débiles.

Caso de la desintegración a 2 cuerpos

Así por ejemplo, en el caso de una desintegración en la que sólo hay dos partículas en el estado final como puede verse en la figura 7.3, o sea, $M \rightarrow m_1 + m_2$ se tiene:

$$\boxed{d\lambda = \frac{1}{32\pi^2}|\mathcal{M}|^2 \frac{|p_1^*|}{M^2} d\Omega} \tag{7.33}$$

siendo $d\Omega$ el elemento de ángulo sólido de la partícula 1:

$$d\Omega = d\phi_1 d(\cos\theta_1)$$

Caso de la desintegración a 3 cuerpos

Ahora supóngase que hay tres partículas en el estado final, como puede verse en la figura 7.4, o sea, $M \rightarrow m_1 + m_2 + m_3$. Puede utilizarse la definición de masa efectiva entre dos partículas. Se define $\hat{p}_{ij} = \hat{p}_i + \hat{p}_j$. Luego $m_{ij}^2 = \hat{p}_{ij}^2$ con lo que se cumple la relación

$$m_{12}^2 + m_{13}^2 + m_{23}^2 = M^2 + m_3^2 - 2ME_3 \tag{7.34}$$

Con estas definiciones, la amplitud de probabilidad de desintegración viene dada por:

$$d\lambda = \frac{1}{(2\pi)^5}\frac{1}{16M}|\mathcal{M}|^2 dE_1 dE_2 d\alpha d(\cos\beta) d\gamma \tag{7.35}$$

siendo (α, β, γ) tres ángulos de Euler que dan la orientación del estado final respecto a la partícula inestable M.

También se cumple

$$d\lambda = \frac{1}{(2\pi)^5}\frac{1}{16M^2}|\mathcal{M}|^2 p_1^* p_3 dm_{12} d\Omega_1^* d\Omega_3 \tag{7.36}$$

en donde las cantidades con * están en el sistema $1-2$ en reposo y Ω_3 es el ángulo sólido de 3 en el sistema centro de masas de M.

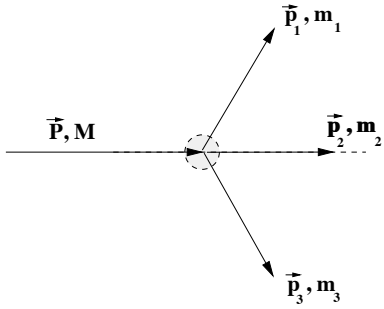


Figura 7.4: Definición de variables en una desintegración a tres cuerpos.

Es evidente que

$$|\vec{p}_1^{\,*}| = \frac{\left\{[m_{12}^2-(m_1+m_2)^2][m_{12}^2-(m_1-m_2)^2]\right\}^{\frac{1}{2}}}{2m_{12}} \tag{7.37}$$

y

$$|\vec{p}_3| = \frac{\left\{[M^2-(m_{12}+m_3)^2][M^2-(m_{12}-m_3)^2]\right\}^{\frac{1}{2}}}{2M} \tag{7.38}$$

que, al integrar sobre los ángulos (en el caso en el que el espín de M sea 0) o promediando sobre los estados de espín se llega a:

$$d\lambda = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{8M}|\mathcal{M}|^2 dE_1 dE_2 \tag{7.39}$$

o de otra forma,

$$\boxed{d\lambda = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{32M^2}|\mathcal{M}|^2 dm_{12}^2 dm_{23}^2} \tag{7.40}$$

y esta última relación permite definir el llamado *Plot de Dalitz*, en el que se representan las variables m_{12}^2 en función de m_{23}^2 y cuya densidad informa sobre la estructura del elemento de matriz. Así, si en el *Plot de Dalitz* la densidad de puntos es uniforme, el elemento de matriz es constante.

Los valores cinemáticos máximo $(+)$ y mínimo $(-)$ de m_{23}^2 se calculan:

$$(m_{23}^2)^{\pm} = (E_2^* + E_3^*)^2 - \left(\sqrt{E_2^{*2}-m_2^2} \mp \sqrt{E_3^{*2}-m_3^2}\right)^2 \tag{7.41}$$

siendo E_2^* y E_3^* las energías de las partículas 2 y 3 en el sistema en el que m_{12} está en reposo, es decir $E_2^* = (m_{12}^2 - m_1^2 + m_2^2)/2m_{12}$ y $E_3^* = (M^2 - m_{12}^2 - m_3^2)/2m_{12}$.

Colisión $1 + 2 \rightarrow$ n cuerpos

La sección eficaz diferencial[2] de la colisión $1 + 2 \rightarrow n$ partículas se calcula,

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4 |\mathcal{M}|^2}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} \times d\Phi_n(p_1 + p_2; p_3, ..., p_{n+2}) \tag{7.42}$$

En el sistema en el que m_2 está en reposo (sistema laboratorio),

$$\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} = m_2 p_{1lab}$$

mientras que en el sistema centro de masas:

$$\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} = {p_1}^* \sqrt{s}$$

siendo la variable $s = E_{cm}^2$.

Caso de la reacción con 2 partículas

Siguiendo la figura 7.5, puede abordarse el caso de la colisión $m_1 + m_2 \rightarrow m_3 + m_4$ entre dos partículas cuyas masas vienen dadas explícitamente. Se suelen utilizar las variables de Mandelstam, s, t, u, que se definen:

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 \\ &= m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2 - 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 \\ t &= (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2 \\ &= m_1^2 + m_3^2 - 2E_1E_3 + 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_3 \\ u &= (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2 \\ &= m_1^2 + m_4^2 - 2E_1E_4 + 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_4 \end{aligned} \tag{7.43}$$

Cumplen la sencilla relación

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 \tag{7.44}$$

Para energías muy altas ($s >> m_1^2, m_2^2, m_3^2, m_4^2$) las variables t y u cumplen

$$\begin{aligned} t &\simeq -\tfrac{s}{2}(1 - \cos\theta^*) \\ u &\simeq -\tfrac{s}{2}(1 + \cos\theta^*) \end{aligned} \tag{7.45}$$

[2] Véase por ejemplo la publicación *Review of Particle Physics* del *Particle Data Group*: *Phys. Rev.*, **D66** (2002) 1-974.

estando los valores de t y u comprendidos en el intervalo $[0,-s]$.

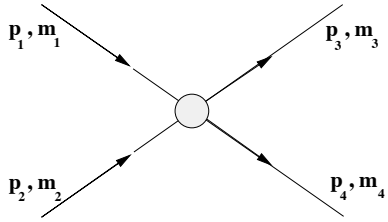


Figura 7.5: Definición de variables en una colisión con dos cuerpos en el estado final.

La sección eficaz de reacción de dos partículas puede escribirse como

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{64\pi s}\frac{1}{|\vec{p_1}^*|^2}|\mathcal{M}|^2 \tag{7.46}$$

También se puede escribir en función del elemento de ángulo sólido, en el centro de masas de la colisión, obteniéndose:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s}\frac{p_3^*}{p_1^*}|\mathcal{M}|^2 \tag{7.47}$$

siendo $d\Omega = d\phi_3^* d(\cos\theta_3^*)$, el elemento de ángulo sólido alrededor de la dirección de la partícula 3 (véase la figura 7.5).

Análogamente al caso de una desintegración pueden calcularse la energía y el momento de las partículas incidentes:

$$|\vec{p}^*| = \frac{\left\{[s-(m_1+m_2)^2][s-(m_1-m_2)^2]\right\}^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{s}} = p_1\frac{m_2}{\sqrt{s}}$$

$$E_1^* = \frac{s+m_1^2-m_2^2}{2\sqrt{s}}$$

Probabilidades de supervivencia

Con la probabilidad calculada por la regla dorada de Fermi, puede calcularse la probabilidad de supervivencia de una partícula.

Si la partícula es inestable, con masa M y momento $\vec{p}$, la probabilidad de vivir durante un tiempo $t \geq t_0$ antes de desintegrarse valdrá:

$$\boxed{P(t_0) = e^{-t_0\frac{\lambda}{\gamma}}} \tag{7.48}$$

cumpliéndose que $\lambda^{-1} = \tau$ es la vida media de la partícula M. La probabilidad que tendrá la partícula de recorrer una distancia $x \geq x_0$ será:

$$\boxed{P(x_0) = e^{-M\lambda x_0/|\vec{p}|}} \tag{7.49}$$

A continuación se presentan las invariancias espacio-temporales.

7.3 Traslaciones y rotaciones en el espacio

La invariancia bajo traslaciones es consecuencia del hecho que todas las posiciones en el espacio (o en el tiempo) son físicamente indistinguibles: el hamiltoniano es invariante,

$$H(x') = H(x + \delta x) = H(x)$$

7.3.1 Traslaciones espacio-temporales

Traslaciones espaciales

Una traslación infinitesimal $\epsilon = \Delta x$, desplaza la función de ondas $|\Psi(x + \epsilon)\rangle = D(\epsilon)|\Psi(x)\rangle$, con lo que el operador $D(\epsilon) = [1 + \epsilon\frac{\partial}{\partial x}]$, que al tener en cuenta el principio de equivalencia y pasando a una traslación tridimensional se puede escribir

$$D(\vec{\epsilon}) = 1 + i\frac{\vec{\epsilon}\cdot\vec{p}}{\hbar}$$

Se dice entonces que el operador $\vec{p}$ (momento lineal) es el generador de las traslaciones.

Una traslación finita, $\vec{r}$, será el resultado de calcular el límite para $\epsilon \to 0$ y $n \to \infty$ de n traslaciones $(1 + i\frac{\vec{\epsilon}\cdot\vec{p}}{\hbar})^n$, es decir:

$$\boxed{D(\vec{r}) = e^{i\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{\hbar}}} \tag{7.50}$$

Queda claro que $D(\vec{r})$ es un operador unitario, y que el operador $\vec{p}$ es el generador de las traslaciones espaciales. Los operadores $D(\vec{r})$ forman una representación del grupo de traslaciones. Como dos traslaciones conmutan, el grupo de traslaciones es abeliano.

Puesto que el espacio es homogéneo, las leyes físicas son idénticas independientemente del origen del sistema de referencia elegido. Una traslación da lugar a un sistema físico invariante, por ello se dice que la traslación espacial es una operación de simetría.

Se cumple $[D(\vec{r}), H] = 0$ y por lo tanto

$$[p, H] = 0$$

o sea, la homogeneidad del espacio implica la conservación del momento lineal.

Traslaciones temporales

Una traslación temporal viene dada por el operador $D(\Delta t)$:

$$\Psi(t + \Delta t) = D\Psi(t)$$

El operador D es:

$$D = e^{-i\frac{\Delta t E}{\hbar}}$$

o sea, el generador de las traslaciones temporales es E, la energía del sistema, con lo que

$$[E, H] = 0$$

y se conserva.

La homogeneidad del tiempo implica la conservación de la energía.

7.3.2 Rotaciones

Una rotación infinitesimal $\epsilon = \Delta\phi$, alrededor del eje z, transforma la función de ondas $|\Psi(\vec{r}')\rangle = D(\epsilon)|\Psi(\vec{r})\rangle$, con lo que el operador $D(\epsilon) = [1 - i\frac{\epsilon L_z}{\hbar}]$, puesto que la rotación transforma:

$$\begin{array}{lcl} x & \rightarrow & x' = x + \epsilon y \\ y & \rightarrow & y' = y - \epsilon y \\ z & \rightarrow & z' = z \end{array}$$

y el operador $L_z = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$.

Al igual que en el caso de las traslaciones se obtiene la expresión para una rotación finita de ángulo ϕ según el eje z:

$$D(\phi) = e^{-i\frac{\phi L_z}{\hbar}}$$

Pero interesa conocer la expresión del operador rotación $D(\theta)$ de un ángulo finito θ según una dirección cualquiera dada por el vector unitario $\hat{n}$.

$$\boxed{D(\theta) = e^{-i\theta\frac{\hat{n}\cdot\vec{L}}{\hbar}}} \qquad (7.51)$$

De nuevo, $D(\theta)$ es un operador unitario, y ahora el operador momento angular $\vec{L}$ es el generador de las rotaciones espaciales. Los operadores $D(\theta)$

forman una representación del grupo de rotaciones. Como dos rotaciones no conmutan, el grupo no es abeliano.

Puesto que el espacio es isótropo, las leyes físicas son idénticas independientemente del sistema de referencia elegido y no dependen de su orientación. Una rotación deja a un sistema físico invariante, por ello se dice que es una operación de simetría.

Se cumple $[D(\theta), H] = 0$ y por lo tanto

$$[\hat{L}, H] = 0$$

válido para partículas con espín $S = 0$. La misma ley se cumple si las partículas tienen espín, pero entonces es el momento angular total $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ quien conmuta con el hamiltoniano. O sea, la isotropía del espacio implica la conservación del momento angular.

Grupo de Lie de las rotaciones

Estos grupos de transformaciones (traslaciones y rotaciones) que pueden originarse a partir de sucesivas transformaciones infinitesimales son los llamados grupos de Lie.

Un grupo de Lie queda determinado por su álgebra. El álgebra del grupo de Lie de las rotaciones es

$$\boxed{[J_j\,,\,J_k] = i\epsilon_{jk\ell}\hbar J_\ell} \tag{7.52}$$

en donde los parámetros $\epsilon_{jk\ell}$ (=± 1, si los subíndices son cíclicos o anticíclicos y el resto son 0) son las llamadas constantes de estructura del grupo de rotaciones.

El grupo permite definir los estados físicos utilizando los índices $|j, m\rangle$, que son los dos valores propios de dos operadores que conmutan; el operador de Casimir[3] $J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ que conmuta con todos los generadores del grupo y la proyección J_z que se elige entre los generadores. Se cumple

$$\left.\begin{array}{rcl} J^2|j,m\rangle & = & j(j+1)\hbar^2|j,m\rangle \\ J_z|j,m\rangle & = & m\hbar|j,m\rangle \\ & & \\ J_\pm|j,m\rangle & = & [j(j+1)-m(m\pm 1)]^{1/2}\hbar|j,m\pm 1\rangle \end{array}\right\} \tag{7.53}$$

con la conocida definición $J_\pm = J_x \pm iJ_y$, cuyas reglas de conmutación con el operador J_z son: $[J_z\,,\,J_\pm] = \pm\hbar J_\pm$.

Para cada valor de j existe un multiplete formado por $2j + 1$ estados con un valor de m diferente ($|m| \leq j$).

[3] El operador de Casimir es una función no lineal de los generadores del grupo, que conmuta con todos ellos.

La suma de dos momentos angulares $\mathbf{J} = \mathbf{J_1} + \mathbf{J_2}$ es también un momento angular, descrito por la base $|j_1, m_1\rangle|j_2, m_2\rangle$ o por $|j, m\rangle$, que están relacionadas. En general, como es bien sabido, el acoplamiento de dos representaciones irreducibles con espín j_1 y j_2 conduce a un estado con espín j que cumple

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$$

y el estado puede escribirse como una suma

$$\boxed{|j, m\rangle = \sum_{m_1, m_2} C^{jm}_{m_1 m_2} |j_1, m_1\rangle|j_2, m_2\rangle} \tag{7.54}$$

siendo las constantes C los coeficientes de Clebsch-Gordan (véanse las tablas de coeficientes de Clebsch-Gordan en el Apéndice F.8).

Representaciones del grupo de rotaciones

Se trata de encontrar la expresión matricial de las representaciones de los elementos $D(\theta)$ del grupo de rotaciones. Para ello basta recordar que toda rotación puede expresarse en función de tres ángulos de Euler α, β, γ; dos de ellos respecto al eje z y el otro respecto al eje y:

$$D(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-i\gamma J_{z'}} e^{-i\beta J_{y'}} e^{-i\alpha J_z} = e^{-i\alpha J_z} e^{-i\beta J_y} e^{-i\gamma J_z}$$

referidos todos los ángulos a los ejes de coordenadas original.

En la base $|j, m\rangle$, la representación matricial de D es,

$$D^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma) = \langle j, m|D(\alpha, \beta, \gamma)|j, m'\rangle = e^{-i\alpha m} d^{(j)}_{mm'}(\beta) e^{-i\gamma m'}$$

siendo $d^{(j)}_{mm'}(\beta) = \langle j, m|e^{-i\beta J_y}|j, m'\rangle$ (véanse las tablas en el Apéndice F.4).

La rotación de un estado da lugar a una combinación lineal:

$$e^{-i\beta J_y}|j, m\rangle = \sum_{m'} d^{(j)}_{m'm}(\beta)|j, m'\rangle$$

La matriz $D^{(j)}$ tiene dimensión $2j + 1$ y es la representación irreducible de dimensión $2j + 1$ del grupo de rotaciones.

La representación $D^{(1/2)}$ es la llamada representación fundamental porque todas las demás pueden construirse a partir de ella.

7.4 El grupo SU(2). Espín e isospín

Los sistemas con espín J e isospín I bien definidos deben cumplir las propiedades que se deriven de las transformaciones del grupo $SU(2)$.

El grupo $SU(2) \subset U(2)$ es el grupo especial de las matrices 2×2 unitarias, unimodulares que conforma la representación fundamental del grupo de rotaciones. El álgebra de Lie del grupo es la de sus generadores, que ya se ha visto en (7.52).

Una representación posible de la fundamental es la que forman las matrices de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{7.55}$$

que cumplen $\vec{\sigma}^2 = 1, Tr(\sigma_i) = 0$ y $det(\sigma_i) = -1$. Por supuesto, también puede verificarse que las matrices $\frac{1}{2}\sigma_i$ cumplen el álgebra vista en (7.52). Las matrices de Pauli son pues una representación matricial de los generadores del grupo.

Se presenta a continuación el caso de un sistema con espín $s = 1/2$.

Los estados vendrán dados por $|s, m_s\rangle$. La representación habitual de estos estados es

Dirac	Vector
$\|1/2, +1/2\rangle \equiv \uparrow \equiv$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\|1/2, -1/2\rangle \equiv \downarrow \equiv$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Dadas las matrices de Pauli $\vec{\sigma}$, el operador espín tendrá una representación matricial

$$\vec{\mathrm{s}} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}\hbar \tag{7.56}$$

Un sistema con espín 1/2, el electrón por ejemplo, podrá encontrarse en un estado cualquiera

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con $\mid a \mid^2 + \mid b \mid^2 = 1$.

Una rotación de un ángulo θ de este estado general se expresará:

$$|\Psi'\rangle = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = U(\theta) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

con $U(\theta) = e^{-i\theta \frac{\vec{\sigma} \cdot \hat{n}}{2}}$, y no cambia los observables del sistema. Si la rotación es según el eje definido por el vector unitario $\hat{n}$, entonces $U(\theta) = \cos(\frac{1}{2}\theta) I - i \sin(\frac{1}{2}\theta) \hat{n} \cdot \vec{\sigma}$, donde I es la matriz 2×2 unidad.

Por otra parte, el espín del sistema formado por dos electrones se obtiene a partir de la operación más importante, la suma de momentos angulares: $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$. En este caso es bien sabido que da lugar a dos funciones de espín con simetría de intercambio bien definida; un triplete de espín $S = 1$, simétrico, y un singlete de espín $S = 0$, antisimétrico. Los estados se escriben:

$$\text{singlete:} \quad \chi_{00}(1,2) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle \Big) \qquad \text{antisimétrica}$$

$$\text{triplete:} \quad \chi_{1,M_S}(1,2) \quad = \begin{cases} |\uparrow\uparrow\rangle \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle \Big) \\ |\downarrow\downarrow\rangle \end{cases} \qquad \text{simétrica}$$

en donde M_S es la tercera componente del espín del sistema (en el caso $S = 1$, se tienen los valores $M_S = +1, 0, -1$).

En el lenguaje de la teoría de grupos de Lie, el resultado de la composición de dos espines $\frac{1}{2}$ obtenido se escribe:

$$2 \otimes 2 = 3 \oplus 1$$

en donde los términos que aparecen hacen referencia a la dimensionalidad de la representación. La representación fundamental correspondiente a $s = 1/2$ es efectivamente 2 (el valor numérico de $2s + 1$). El 3 corresponde al triplete y el 1 al singlete resultantes. Si se añade un tercer electrón, se tendría,

$$(2 \otimes 2) \otimes 2 = (3 \oplus 1) \otimes 2 = (3 \otimes 2) \oplus (1 \otimes 2) = 4 \oplus 2 \oplus 2$$

es decir, un cuarteto y dos dobletes de espín.

Recuérdese, como se acaba de ver más arriba, que el acoplamiento de dos representaciones irreducibles con espín j_1 y j_2 da lugar a un estado con espín j que cumple

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$$

y el estado puede escribirse como una suma

$$|j, m\rangle = \sum_{m_1, m_2} C^{jm}_{m_1 m_2} |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle$$

siendo las constantes C los coeficientes de Clebsch-Gordan.

El tratamiento del isospín es completamente análogo al del espín, solo que ahora las transformaciones tienen lugar en un espacio abstracto, generalmente llamado el espacio interno, para distinguirlo del espacio-tiempo. También hay que notar que el isospín es un número sin unidades.

Para describir un sistema de isospín $I = 1/2$, como el del nucleón, bastará con introducir los estados base, vectores propios de I_3,

	Dirac	Vector
p=	$\|1/2, +1/2\rangle \equiv$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
n=	$\|1/2, -1/2\rangle \equiv$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Los generadores de la representación serán las mismas matrices de Pauli y, por lo tanto, se trata de la misma álgebra. Las leyes de acoplamiento de dos nucleones serán las mismas que en el caso del espín. Ahora, dos estados de isospín I' e I'' se acoplarán dando lugar a un estado

$$|I, I_3\rangle = \sum_{I'_3, I''_3} C^{II_3}_{I'_3, I''_3} |I' I'_3\rangle |I'' I''_3\rangle$$

Los hadrones forman multipletes de isospín. Para ello deben tener la misma masa y espín-paridad y distinguirse sólo por la carga eléctrica, relacionada con I por la fórmula de Gell-Mann-Nishijima:

$$\boxed{Q = I_3 + \frac{Y}{2}} \tag{7.57}$$

en donde $Y = B + S$ es la hipercarga, suma del número bariónico y de la extrañeza.[4]

La conservación del isospín en la desintegración de un hadrón, por ejemplo la resonancia $\Delta(1232)$, que tiene espín $J = \frac{3}{2}$ e isospín $I = \frac{3}{2}$ y que es un proceso que tiene lugar por interacción fuerte, tiene como consecuencia que es posible predecir cocientes de desintegración o cocientes entre secciones eficaces,

$$\frac{\Gamma(\Delta^+ \to\ p\pi^0)}{\Gamma(\Delta^+ \to\ n\pi^+)} = 2 \qquad \text{o} \qquad \left.\frac{\sigma(\pi^+ p)}{\sigma(\pi^- p)}\right|_{total} = 3 \tag{7.58}$$

sólo teniendo en cuenta el valor de los coeficientes de Clebsch-Gordan para cada proceso. En efecto, todos los otros factores que intervienen en el cálculo de la vida media o de la sección eficaz (la regla dorada de Fermi) son idénticos.

De la misma manera se pueden encontrar relaciones entre secciones eficaces, por ejemplo en procesos $\pi^\pm + p \to\ K + \Sigma$, basándose en que el hamiltoniano tiene que ser de la forma $H = H_{1/2} + H_{3/2}$, suma de dos términos, uno para cada valor posible del isospín $I = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$. Hay que desarrollar el estado inicial (πp) y el final $(K\Sigma)$ en amplitudes de isospín I =3/2 y 1/2, calculando para cada una

$$\sigma = k|\langle f|H_{1/2} + H_{3/2}|i\rangle|^2 \tag{7.59}$$

con lo que se obtiene (los subíndices indican el estado de carga del par $K\Sigma$):

$$\sigma_{00} : \sigma_{+-} : \sigma_{++} = \frac{2}{9}|A_{3/2} - A_{1/2}|^2 : \frac{1}{9}|A_{3/2} + 2A_{1/2}|^2 : |A_{3/2}|^2 \tag{7.60}$$

Pero es bien sabido que la simetría de isospín es una simetría aproximada; supone que el protón y el neutrón son dos partículas idénticas (bajo interacción fuerte), y sin embargo la carga eléctrica las distingue y de hecho tienen masas distintas.

[4] Esta definición se generaliza, sumando las otras cargas de los quarks (encanto, belleza y verdad).

7.4.1 Caso de antipartículas: Isospín del sistema $N\overline{N}$

Para que las antipartículas $(\overline{n}, \overline{p})$ se transformen bajo rotaciones igual que las partículas debe definirse el doblete

$$\begin{pmatrix} -\overline{n} \\ \overline{p} \end{pmatrix} \tag{7.61}$$

En efecto, una rotación de ángulo π (véase (7.56)) según el eje 2 transforma el doblete de nucleones

$$\begin{pmatrix} p' \\ n' \end{pmatrix} = e^{-i\pi\frac{\sigma_2}{2}} \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \tag{7.62}$$

de forma que para que el doblete de antinucleones se transforme igual, hay que elegirlo como en (7.61). Así el triplete de isospín es

$$\left\{ \begin{array}{c} -p\overline{n} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(p\overline{p} - n\overline{n}\Big) \\ n\overline{p} \end{array} \right.$$

y el singlete

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(p\overline{p} + n\overline{n}\Big)$$

El sistema $N\overline{N}$ no es un sistema de fermiones idénticos y por lo tanto no cumple ningún principio de simetrización.

7.4.2 Sistemas de partículas idénticas

Si dos partículas son idénticas (cuánticamente indistinguibles), su estado cumple

$$|\xi_2\xi_1\rangle = \pm|\xi_1\xi_2\rangle$$

como puede comprobarse simplemente al intercambiarlas dos veces seguidas (un intercambio multiplica el estado por una fase). Esto implica que hay dos clases de estados:

$$\text{simétricos} \qquad |\xi_1\xi_2\rangle_{\text{S}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\xi_1\xi_2\rangle + |\xi_2\xi_1\rangle\Big)$$

$$\text{antisimétricos} \quad |\xi_1\xi_2\rangle_{\text{A}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\xi_1\xi_2\rangle - |\xi_2\xi_1\rangle\Big)$$

El teorema de conexión espín-estadística asigna los estados simétricos a los bosones (partículas espín entero) y los antisimétricos a los fermiones.

Principio de exclusión de Pauli

Como se acaba de ver, por el teorema de la conexión espín-estadística, dado un sistema formado por dos electrones (indistinguibles), la función de ondas debe ser totalmente antisimétrica bajo el intercambio de los dos electrones. Si se consideran funciones de onda producto espacio-espín, las posibilidades son:

$$\psi^{s=0}(q_1, q_2) = \phi^{+}(r_1, r_2)\chi_{0,0}(1,2) \qquad \text{PARA y singlete de espín}$$

$$\psi^{s=1}(q_1, q_2) = \phi^{-}(r_1, r_2)\chi_{1,M_S}(1,2) \qquad \text{ORTO y triplete de espín}$$

Como se ve, la simetría espacial es llamada función *para* y la antisimetría espacial, *orto*. Este principio introduce un acoplo entre variables espaciales y de espín. De esta manera, el estado fundamental del átomo de helio sólo tiene estado *para* y singlete de espín.

Como consecuencia, se observa que dos fermiones no pueden encontrarse en un mismo estado cuántico ya que se anula su función de ondas. Este es el enunciado tradicional del principio de exclusión de Pauli.

Principio de exclusión de Pauli extendido

Pero si se introduce el isospín, como por ejemplo para un estado compuesto por dos nucleones (idénticos, si se introduce el isospín), entonces la función de ondas del sistema es producto de tres funciones

$$\psi(q_1, q_2) = \phi(r_1, r_2)\chi(1,2)\xi(1,2)$$

y ψ debe ser totalmente antisimétrica bajo intercambio de los dos nucleones 1 y 2. La función de ondas de isospín ξ es simétrica si el isospín del sistema es $I = 1$ (triplete).

7.5 Simetrías $\mathcal{P}, \mathcal{C}$ y $\mathcal{T}$

Al contrario que los desplazamientos y rotaciones vistas más arriba, que son transformaciones continuas del espacio-tiempo, las transformaciones que se presentan aquí son transformaciones discretas. Tienen asociados números cuánticos multiplicativos. Lo más importante será identificar cuales de estas simetrías se conservan ante cada tipo de interacción.

Las simetrías $\mathcal{P}$ y $\mathcal{T}$ están asociadas a propiedades del espacio-tiempo; son propiedades externas a las partículas, mientras que la simetría $\mathcal{C}$ se refiere al espacio interno de las propiedades de las partículas.

Los grupos de transformaciones $\mathcal{P}$ y $\mathcal{C}$ son grupos finitos de dos elementos, la identidad e y un elemento g que cumple $g^2 = e$. La invariancia bajo la transformación g implica que está representada por un operador $U(g)$ unitario, que conmuta con el hamiltoniano

$$[U, H] = 0$$

Los vectores propios $|p\rangle$ cumplen $U^2|p\rangle = p^2|p\rangle = |p\rangle$, es decir, los valores propios son $p = \pm 1$.

La conservación del número cuántico p implica que las transiciones sólo pueden tener lugar entre estados con el mismo valor propio de p.

Por el contrario, el operador $\mathcal{T}$ es antiunitario y no da lugar a valores propios; sin embargo es una simetría que se cumple en las interacciones fuertes y electromagnéticas.

7.5.1 La paridad $\mathcal{P}$

La paridad es una operación que transforma un estado en su imagen espacial, es decir

$$\mathcal{P}|\Psi(\vec{r})\rangle = P_a|\Psi(-\vec{r})\rangle \tag{7.63}$$

siendo P_a una fase constante. En principio se suponía que todas las interacciones de la naturaleza obedecían a esta simetría. Sin embargo, una de ellas, la interacción débil, no es invariante bajo la paridad.

Una nueva aplicación del operador paridad conduce a

$$\mathcal{P}^2|\Psi(\vec{r})\rangle = P_a^2|\Psi(\vec{r})\rangle$$

o sea, los valores posibles de $P_a = \pm 1$. Si se considera una función propia del operador momento:

$$\Psi_p(\vec{r}, t) = e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r} - Et)/\hbar}$$

entonces

$$\mathcal{P}\Psi_p(\vec{r}) = P_a\Psi_p(-\vec{r}) = P_a\Psi_{-p}(\vec{r})$$

luego, una partícula en reposo ($p = 0$) es un estado propio del operador paridad con valor propio P_a. Es lo que se llama paridad intrínseca de la partícula a. Se abrevia diciendo que P_a es la paridad de la partícula, entendiendo que está en reposo.

La paridad es un buen número cuántico para la interacción fuerte y electromagnética. Los estados físicos que intervienen en estos procesos tienen paridad bien definida.

Además de su paridad intrínseca, si una partícula tiene un momento angular orbital tiene también un valor propio asociado a dicho estado. Por ejemplo, si una función de ondas de una partícula viene dada por

$$\Psi(\vec{r}) = R_{n\ell}Y_{\ell m}(\theta, \phi)$$

entonces, la paridad de esta función de ondas viene definida por el valor del momento angular orbital: $\mathcal{P} = (-1)^\ell$. Ello es debido a las propiedades de los armónicos esféricos:

$$\mathcal{P}Y_{\ell,m}(\theta, \phi) = Y_{\ell,m}(\pi - \theta, \pi + \phi) = (-1)^\ell Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$$

ya que $\vec{r} \to -\vec{r}$ equivale a $\theta \to \pi - \theta$ y $\phi \to \pi + \phi$.

En definitiva, se tendrá que

$$\mathcal{P}\Psi_{n,\ell,m}(\vec{r}) = P_a\Psi_{n,\ell,m}(-\vec{r}) = P_a(-1)^{\ell}\Psi_{n,\ell,m}(\vec{r})$$

luego, $\Psi_{n,\ell,m}(\vec{r})$ es una función propia de la paridad con valor propio $P_a(-1)^{\ell}$.

Todos los constituyentes elementales (excepto los neutrinos) tienen una paridad intrínseca bien definida. Ello es necesario para que pueda aplicarse la conservación del número cuántico multiplicativo.

Por convenio, a los quarks u, d, c, s, t, b y a los leptones e^-, μ^-, τ^- se les asigna paridad $P = +1$. Se cumple además que:

$$\begin{aligned} P(\text{antifermión}) &= -P(\text{fermión}) \\ P(\text{antibosón}) &= P(\text{bosón}) \end{aligned} \tag{7.64}$$

Que los antifermiones tengan paridad opuesta a los fermiones es consecuencia de la teoría de Dirac.

De hecho, como se postula que P(quarks) = +1 se tendrá que P(antiquarks) $= -1$; luego, por ejemplo, de acuerdo con el modelo de quarks que nos dice que un mesón es un estado $q\overline{q}$, la paridad de un mesón será

$$P_M = P_aP_b(-1)^L = (-1)^{L+1} \tag{7.65}$$

ya que $P_aP_b = -1$, puesto que se trata de un par quark-antiquark. En general, para un sistema cualquiera compuesto por un fermión f y un antifermión $\overline{f}$, se tiene,

$$P(f\overline{f}) = (-1)^{L+1} \tag{7.66}$$

La paridad de los bariones

$$P_B = P_aP_bP_c(-1)^{L_{12}}(-1)^{L_3} = (-1)^{L_{12}+L_3} \tag{7.67}$$

en donde L_{12} es el momento angular orbital de los quarks 1 y 2 y L_3 es el momento angular orbital del quark 3 respecto al centro de masas del sistema $1-2$ (véase figura 7.6). Por supuesto que la paridad de un antibarión es $P_{\overline{B}} = -P_B$.

Es bien sabido que un pión es un mesón pseudoescalar, o sea $J^{\mathcal{P}} = 0^-$. Ello viene del hecho que su función de ondas se transforma como un escalar bajo las rotaciones (espín = 0) pero bajo las reflexiones espaciales cambia de signo, contrariamente a un escalar. Esto puede deducirse directamente del modelo de quarks, ya que un pión es un sistema $q\overline{q}$ cuyo momento angular orbital es $\ell = 0$. Un mesón escalar tiene espín-paridad $J^{\mathcal{P}} = 0^+$, mientras que un mesón con $J^{\mathcal{P}} = 1^-$ es un mesón vectorial y si tiene $J^{\mathcal{P}} = 1^+$ es un vector axial.

La paridad se conserva en las interacciones fuertes. Un buen ejemplo es el experimento que estudió la reacción de captura de un π^- en reposo (el momento angular en la captura es $\ell = 0$) por el deuterio, es decir, la reacción

$$\pi^- d \rightarrow \; nn$$

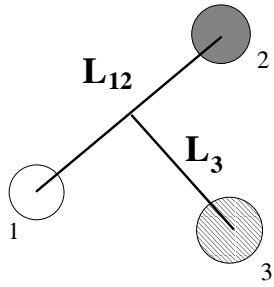


Figura 7.6: Definición de los momentos angulares L_{12} y L_3 utilizados para calcular la paridad de un barión formado por tres quarks.

que por antisimetría del estado nn sólo puede ser un estado ${}^3P_1$ y cumple todas las leyes de conservación ($I, J, \mathcal{P}$). No se ha detectado[5] la reacción $\pi^- d \to nn\pi^0$, que no conserva la paridad. Precisamente, la paridad del pión fue inicialmente determinada, gracias a esta reacción, mucho antes de que se introdujera el modelo de quarks

Se cumple que la paridad del fotón

$$P_\gamma = -1 \tag{7.68}$$

y es la misma que la del campo eléctrico $\mathcal{E}$. Los fotones reales se desplazan a la velocidad de la luz y por lo tanto tienen masa nula. Se llaman fotones *transversales* porque los campos asociados $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ son perpendiculares al vector momento $\vec{p}$.

Es importante recordar ahora que la polarización de espín de las partículas se denomina helicidad:

$$\lambda = \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{|\sigma||p|} \tag{7.69}$$

siendo σ el espín y $\vec{p}$ el momento, ya que la helicidad es un buen número cuántico para todas las interacciones. Está bien definida para las partículas de masa nula, para las que es un invariante Lorentz. Como la interacción electromagnética conserva la paridad, ello implica que la helicidad neta de los fotones es 0, porque λ cambia de signo bajo paridad. A los fotones con $\lambda = +1, -1, 0$ se les llama dextrógiros, levógiros y *escalares*. Los fotones reales son transversales.[6] Por ello, fotón transversal significa dextrógiro y levógiro en igual proporción.

La conservación de la paridad en la interacción electromagnética se observa, por ejemplo, en la aniquilación

$$e^+ + e^- \to \gamma + \gamma \tag{7.70}$$

[5] W. Chinowski, J. Steinberger, *Phys. Rev.*, **95** (1954) 1561.

[6] Un fotón virtual es escalar y además tiene masa $\neq 0$.

que, por tratarse de una aniquilación en onda S, se tiene $P_{e^+}P_{e^-} = (-1)^{\ell_\gamma}$, siendo ℓ_γ el momento angular orbital del estado final. Este resultado se verifica experimentalmente midiendo la polarización de los fotones en el estado final. Esto, además, confirma la predicción vista en (7.64).

La violación de la paridad fue inicialmente descubierta en la desintegración β nuclear (en el experimento de desintegración del ^{60}Co, realizado por Mme. Wu y colaboradores). Aunque se viole la paridad en los procesos débiles, pueden extraerse conclusiones de la conservación de la helicidad. El modelo estándar supone que los neutrinos tienen $m_\nu = 0$ y helicidad $\lambda = -1$. Por ejemplo, se ha comprobado experimentalmente en la desintegración débil del pión,

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \tag{7.71}$$

seguida de

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \overline{\nu}_\mu \tag{7.72}$$

que el μ^+ sólo se produce con helicidad $\lambda = -1$, es decir, es levógiro. Esto implica que el ν_μ es también levógiro. Análogamente sólo existe el $\overline{\nu}_\mu$ dextrógiro (con helicidad $\lambda = +1$). La prueba puede verse en la figura 7.7; en efecto, el espectro de energías del positrón muestra que se emiten principalmente en torno del valor máximo (unos 50 MeV), lo que sólo se puede entender gracias a la figura 9.11 por las consecuencias cinemáticas del alineamiento de la helicidad, que explican que el e^+ es emitido con la máxima energía (en dirección opuesta a los dos neutrinos). Esta propiedad la tienen los otros neutrinos.

Si la paridad fuese una buena simetría para la interacción débil, la imagen especular del neutrino, existiría. La violación de la paridad es, pues, compatible con la no existencia de un neutrino dextrógiro.

7.5.2 La conjugación de carga $\mathcal{C}$

Es también una simetría discreta; la operación de conjugación de carga transforma una partícula en su antipartícula, dejando su momento $\vec{p}$ y su espín $\vec{\sigma}$ inalterados:

$$\mathcal{C} \mid A, \vec{p}, \vec{\sigma}\rangle = C_a \mid \overline{A}, \vec{p}, \vec{\sigma}\rangle \tag{7.73}$$

Los números cuánticos contenidos en A son las cargas y sabores de las partículas, que permiten distinguir entre partículas y antipartículas.

Así pues, el operador $\mathcal{C}$ cambia el signo de las cargas de las partículas $Q, \mathcal{B}, \mathcal{L}$ (números cuánticos aditivos) y de los números cuánticos de sabor I_3, S, C, T, B; pero no cambia el signo del momento ni del momento angular.

De nuevo, al igual que en el caso de la paridad, se cumplirá que $C_a^2 = 1$ y, por lo tanto, los valores propios de este operador serán $C_a = \pm 1$; pero los estados propios sólo pueden ser los de partículas neutras, o sea, con $Q = \mathcal{B} = \mathcal{L} = 0$ y además $I_3 = S = C = T = B = 0$. Ejemplos de estados propios de la conjugación de carga son los bosones neutros: γ, $\pi^0(135)$, $\eta^0(547)$, $\eta'(958)$, $\rho^0(770)$, $\omega^0(782)$, $\phi(1020)$, $J/\psi(3097)$, $\Upsilon(9460)$. Todas estas partículas son idénticas a sus antipartículas.

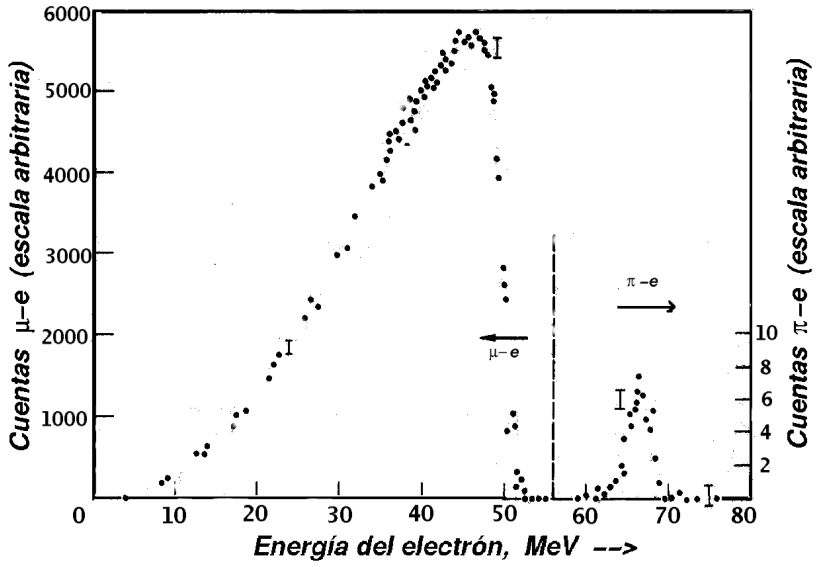


Figura 7.7: Espectro de momentos del positrón en la desintegración $\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \overline{\nu}_\mu$ (izquierda) y en la desintegración $\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu_e$ (derecha), que demuestra que el neutrino es levógiro (helicidad = -1).

No existe ningún barión ni ningún leptón que sea un estado propio de la conjugación de carga. Sólo serán propios de $\mathcal{C}$, los bosones neutros y con todos los números cuánticos de sabor igual a cero.

También es buen número cuántico para sistemas físicos, compuestos por más de una partícula, siempre que la carga total sea nula. Ejemplos del valor de la conjugación de carga para sistemas de dos partículas son:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}|\pi^+\pi^-, L\rangle &= (-1)^L |\pi^+\pi^-, L\rangle \\ \mathcal{C}|f\overline{f}; J, L, S\rangle &= (-1)^{L+S} |f\overline{f}; J, L, S\rangle \end{aligned} \tag{7.74}$$

siendo L y S el momento angular orbital y el espín total del sistema. Ello se entiende al permutar las dos partículas, teniendo en cuenta la simetría del estado. Para el caso del sistema fermión-antifermión, el factor $(-1)^{L+S}$ es en realidad el resultado de tres factores $-(-1)^L(-1)^{S+1}$, debidos respectivamente al intercambio de fermiones (entre el doblete de fermiones y antifermiones hay un cambio de signo), al factor del armónico esférico y a la simetría de la función de ondas de espín.

El sistema barión-antibarión cumplirá pues,

$$C(B\overline{B}) = (-1)^{L+S} \tag{7.75}$$

La conjugación de carga es una buena simetría para las interacciones fuertes y electromagnéticas.

Un ejemplo de conservación de $\mathcal{C}$ se da en el fotón, cuanto del campo electromagnético, cuyo espín es $S_\gamma = 1$ y cuyo valor propio de la conjugación de carga es $C(\gamma) = -1$, ya que el campo eléctrico $\mathcal{E}$, cambia de signo bajo $\mathcal{C}$, por lo tanto la desintegración $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$ está permitida (y es la que tiene lugar de manera dominante), puesto que la conjugación de carga del π^0 es $\mathcal{C}(\pi^0) = +1$. Por el contrario la desintegración $\pi^0 \rightarrow 3\gamma$ está prohibida por la conservación de $\mathcal{C}$. Experimentalmente,

$$\frac{\pi^0 \rightarrow 3\gamma}{\pi^0 \rightarrow 2\gamma} < 3 \times 10^{-8} \tag{7.76}$$

La conjugación de carga no es una buena simetría para la interacción débil. El transformado por $\mathcal{C}$ del neutrino no existe (el neutrino es levógiro y el antineutrino, dextrógiro).

La paridad *G*

Es útil definir una generalización de la conjugación de carga que pueda aplicarse a los piones cargados. Por ello se introduce el operador paridad G, que se aplica también a estados compuestos por n piones. Se define como el producto de la conjugación de carga por el operador rotación de 180 grados de isospín:

$$G = \mathcal{C} e^{-i\tau_2 \pi} \tag{7.77}$$

siendo τ_2 la matriz de rotación según el eje y en el espacio de isospín.

Así, para un estado definido por $|I, I_3\rangle$, el resultado de la rotación de 180 grados es:

$$e^{-i\tau_2 \pi} \mid I, I_3\rangle = (-1)^{I-I_3} \mid I, -I_3\rangle \tag{7.78}$$

Si se aplica sobre el estado neutro del pión, que tiene conjugación de carga $C(\pi^0) = +1$, conduce unívocamente a:

$$G|\pi^0\rangle = -|\pi^0\rangle \tag{7.79}$$

y se elige este valor también para los piones cargados. Estos no son propios del operador $\mathcal{C}$, pero se elige la fase unívocamente:

$$\mathcal{C}|\pi^\pm\rangle = (-1)|\pi^\mp\rangle$$

de forma que la paridad G resulte la misma para el triplete, o sea, además de (7.79) se cumple:

$$G|\pi^\pm\rangle = -|\pi^\pm\rangle \tag{7.80}$$

Para un sistema de n piones, $G = (-1)^n$.

Con esta definición se puede verificar que la paridad G está bien definida para un sistema $N - \overline{N}$ neutro:

$$G(N\overline{N}) = (-1)^{I+L+S} \tag{7.81}$$

en donde I, L, S son los números cuánticos del sistema.

Todos estos valores permiten obtener reglas de selección en los procesos en los que interviene la fuerza fuerte (reacciones o desintegraciones de partículas).

7.5.3 La inversión temporal $\mathcal{T}$

El operador inversión temporal $\mathcal{T}$, transforma un estado $\mid \Psi(t)\rangle$ en otro $\mid \Psi'(t)\rangle = \mathcal{T} \mid \Psi(t)\rangle = \eta_{\mathrm{T}} \mid \Psi(-t)\rangle$; es decir, invierte el signo de t. No existen estados propios del operador inversión temporal y, por consiguiente, tampoco existen números cuánticos asociados a esta simetría, ya que $\mathcal{T}$ es un operador antiunitario. En efecto, la ecuación de Schrödinger $H\Psi(\vec{r},t) = i\hbar\dfrac{\partial\Psi(\vec{r},t)}{\partial t}$ se transforma bajo $\mathcal{T}$ de la siguiente manera

$$\mathcal{T}(H\Psi(\vec{r},t)) = i\hbar\frac{\partial\Psi(\vec{r},t)}{\partial(-t)}$$

que conduce a que la función que cumple la transformada por $\mathcal{T}$ es la conjugada compleja:

$$H\Psi^*(\vec{r},t) = i\hbar\frac{\partial\Psi^*(\vec{r},t)}{\partial t}$$

La conservación de $\mathcal{T}$ se manifiesta por la igualdad $|\Psi(\vec{r},t)|^2 = |\Psi(\vec{r},-t)|^2$.

Su consecuencia es el principio de microrreversibilidad de las colisiones.

La verificación experimental de la conservación de la simetría $\mathcal{T}$ en las interacciones fuertes se ha llevado a cabo a través del principio de balance detallado aplicado a los procesos

$$p + {}^{27}Al \longleftrightarrow \alpha + {}^{24}Mg \tag{7.82}$$

cuya sección eficaz tiene una forma idéntica (véase la figura 7.8).

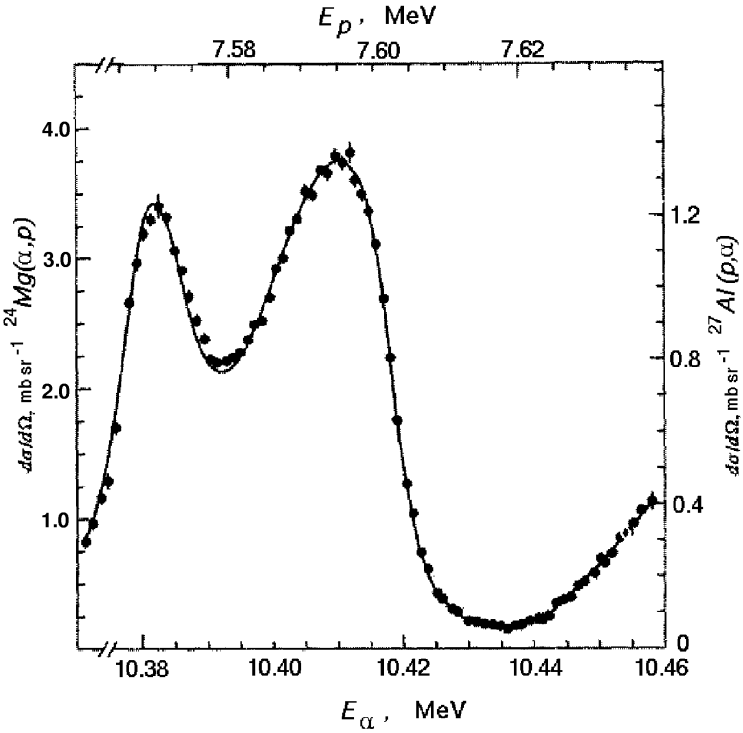


Figura 7.8: Medidas de las secciones eficaces diferenciales, para $\theta_{cms} = 177,77°$, de los procesos $p + {}^{27}Al \rightarrow \alpha + {}^{24}Mg$ y $\alpha + {}^{24}Mg \rightarrow p + {}^{27}Al$ demostrando que la simetría $\mathcal{T}$ se verifica en las interacciones fuertes.

Todas las interacciones son invariantes bajo la transformación $\mathcal{T}$, excepto un caso muy concreto de la desintegración del mesón K^0, que es consecuencia de que $\mathcal{T}$ y $\mathcal{CP}$ están conectadas a través del teorema $\mathcal{CPT}$.

Una de las consecuencias más notables de la invariancia bajo $\mathcal{T}$ es que las partículas tienen momento dipolar eléctrico nulo. En efecto, la existencia de un momento dipolar eléctrico no nulo implicaría la violación de $\mathcal{T}$ y de $\mathcal{P}$ en la interacción electromagnética (véase por ejemplo la tabla 7.2). Para comprobarlo recuérdese que la interacción de un dipolo (magnético y eléctrico) en un campo electromagnético tiene una interacción descrita por

$$H' = \mu_m \vec{\sigma} \cdot \vec{\mathcal{B}} + \mu_e \vec{\sigma} \cdot \vec{\mathcal{E}}$$

y el producto $\vec{\sigma} \cdot \vec{\mathcal{B}}$ no cambia de signo bajo $\mathcal{P}$ ni $\mathcal{T}$, mientras que el producto $\vec{\sigma} \cdot \vec{\mathcal{E}}$ sí que cambia, luego se violarían $\mathcal{P}$ y $\mathcal{T}$.

Un buen ejemplo es el neutrón, para el que se ha medido el momento

dipolar eléctrico, cuyo resultado es

$$d_e < 1{,}2 \times 10^{-25} \text{ e·cm} \tag{7.83}$$

TABLA 7.2: Tabla de transformaciones de magnitudes físicas clásicas bajo los operadores paridad $\mathcal{P}$ e inversión temporal $\mathcal{T}$. Recuérdese, por ejemplo, que $\mathcal{E} = -\partial V/\partial r$.

cantidad	$\mathcal{T}$	$\mathcal{P}$	
$\vec{r}$	$\vec{r}$	$-\vec{r}$	
$\vec{p}$	$-\vec{p}$	$-\vec{p}$	vector polar
$\vec{\sigma}$	$-\vec{\sigma}$	$\vec{\sigma}$	vector axial
$\mathcal{E}$	$\mathcal{E}$	$-\mathcal{E}$	campo eléctrico
$\mathcal{B}$	$-\mathcal{B}$	$\mathcal{B}$	campo magnético
$\vec{\sigma}\cdot\mathcal{E}$	$-\vec{\sigma}\cdot\mathcal{E}$	$-\vec{\sigma}\cdot\mathcal{E}$	momento dipolar eléctrico
$\vec{\sigma}\cdot\mathcal{B}$	$\vec{\sigma}\cdot\mathcal{B}$	$\vec{\sigma}\cdot\mathcal{B}$	id. dipolar magnético
$\vec{\sigma}\cdot\vec{p}$	$\vec{\sigma}\cdot\vec{p}$	$-\vec{\sigma}\cdot\vec{p}$	polarización longitudinal
$\vec{\sigma}\cdot(\vec{p}_1\times\vec{p}_2)$	$-\vec{\sigma}\cdot(\vec{p}_1\times\vec{p}_2)$	$\vec{\sigma}\cdot(\vec{p}_1\times\vec{p}_2)$	polarización transversal

7.5.4 Conservación de $\mathcal{CP}$. El sistema $K^0\bar{K}^0$

El sistema $K^0\bar{K}^0$ tiene unas propiedades cuánticas muy singulares. Existen dos dobletes[7] de kaones, $(K^+(494), K^0(498))$ y $(\bar{K}^0(498), K^-(494))$, estados propios del hamiltoniano de la interacción fuerte. Es decir, se producen gracias a la interacción fuerte, que conserva la extrañeza, por ejemplo a través de las reacciones:

$$\pi^+ + p \rightarrow\ K^+(494) + \bar{K}^0(498) + p \tag{7.84}$$

y

$$\pi^- + p \rightarrow\ K^0(498) + \Lambda^0(1116) \tag{7.85}$$

con extrañeza bien definida: $S(K^0) = +1$ y $S(\bar{K}^0) = -1$.

Los kaones son los mesones extraños más ligeros. Al desintegrarse (vía desintegración débil) no conservan la extrañeza. Las interacciones débiles conservan, en principio, la simetría $\mathcal{CP}$, por lo tanto los estados que se desintegran serán propios de $\mathcal{CP}$.

Se tiene,

$$\mathcal{CP}(K^0) = -\bar{K}^0$$

$$\mathcal{CP}(\bar{K}^0) = -K^0$$

ninguno de los dos es propio de $\mathcal{CP}$, luego hay que buscar otros estados.

[7] Son estados $\overline{q}s$ y $\overline{s}q$, con $q = u, d$ que forman un doblete de isospín.

Pueden sin embargo construirse dos estados cuánticos propios de $\mathcal{CP}$,

$$\begin{aligned} K_1^0 &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(K^0 - \bar{K}^0) \implies \mathcal{CP} = +1 \\ K_2^0 &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(K^0 + \bar{K}^0) \implies \mathcal{CP} = -1 \end{aligned} \tag{7.86}$$

Los kaones pueden desintegrarse a un estado final de dos o tres piones;

$$\begin{aligned} \mathcal{CP}(\pi^+\pi^-) = \mathcal{CP}(\pi^0\pi^0) \quad &= +1 \implies K_1^0 \to 2\pi \\ \mathcal{CP}(\pi^+\pi^-\pi^0) = \mathcal{CP}(\pi^0\pi^0\pi^0) \quad &= -1 \implies K_2^0 \to 3\pi \end{aligned} \tag{7.87}$$

En efecto,

$$\mathcal{CP}(\pi^+\pi^-) = (-1)^L(-1)^{S+L} = +1$$

y

$$\mathcal{CP}(\pi^+\pi^-\pi^0) = \mathcal{CP}(\pi^+\pi^-)\mathcal{CP}(\pi^0) = -1$$

Si bien K_1^0 y K_2^0 no conservan la extrañeza S, puesto que no son los estados que se producen, sí que son los estados que se desintegran. En el laboratorio, se detectan las partículas cuando se desintegran, es decir, K_1^0 y K_2^0, combinaciones lineales de las que se producen. Se desintegrarán según $K_1^0 \to 2\pi$ y $K_2^0 \to 3\pi$, respectivamente. El espacio fásico y el valor Q de la reacción para las desintegraciones a 2π y 3π (218 y 70 MeV respectivamente) dan lugar a dos probabilidades de desintegración diferentes; o sea, dos vidas medias distintas.

Experimentalmente se han detectado dos desintegraciones, una de vida media muy corta y otra de vida media larga

$$\begin{aligned} \tau(K_1^0) &= 0{,}892 \times 10^{-10} \text{ seg.} \\ \tau(K_2^0) &= 5{,}18 \times 10^{-8} \text{ seg.} \end{aligned} \tag{7.88}$$

Las dos partículas K_1^0 y K_2^0 son sus propias antipartículas. La de vida media corta se suele denominar K_{S}^0, es decir, el K^0 corto, y la de vida media larga K_{L}^0, K^0 largo. Es razonable que K_1^0 sea más rápido en desintegrarse pues tiene un espacio fásico mucho mayor.

La conclusión de este sutil sistema es que a veces la noción de partícula se debe aplicar al par $K^0 - \bar{K}^0$ y a veces al $K_1^0 - K_2^0$.

Oscilaciones de extrañeza

La violación de la paridad es una consecuencia de que el mundo no es simétrico derecha-izquierda. Como se ha visto, en la desintegración débil $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$, la paridad no se conserva; el ν_μ es sólo levógiro y $\mathcal{P}|\nu_\mu\rangle$ no existe. Lo mismo sucede con la conjugación de carga. Aplicada en la desintegración anterior, daría lugar a un $\overline{\nu}_\mu$ levógiro que tampoco existe. Sin embargo, la operación $\mathcal{CP}$ restablece la simetría.

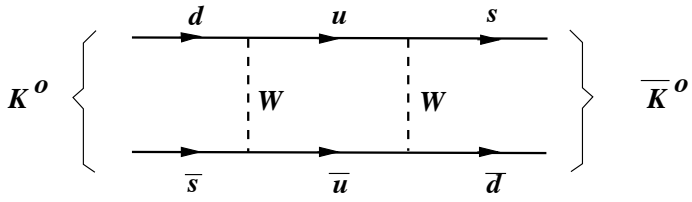


Figura 7.9: Oscilaciones de en el sistema $K^0\bar{K}^0$. El diagrama de Feynman es de segundo orden. Habría que añadir los diagramas con intercambio de quark c y t, además del mostrado con intercambio de u.

En principio, existe un diagrama de segundo orden (véase figura 7.9) que predice la posibilidad del fenómeno de la transición $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$, que se denomina oscilación de extrañeza.

El fenómeno de oscilación entre K^0 y $\bar{K}^0$ es función del tiempo, debido precisamente a la naturaleza de los estados que se desintegran. En efecto, se cumple,

$$\begin{aligned} K^0 &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(K_1^0 + K_2^0) \\ \bar{K}^0 &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(K_1^0 - K_2^0) \end{aligned} \tag{7.89}$$

y en principio, los estados K_1^0 y K_2^0 tienen masas m_i y vidas medias τ_i bien definidas.

Al ser estados inestables, su evolución temporal seguirá la ley general de desintegración

$$\Psi(t) = \Psi(0)\ \mathrm{e}^{-imt}\ \mathrm{e}^{-\Gamma t/2} \tag{7.90}$$

en donde el estado tiene una vida media $\tau = 1/\Gamma$.

Suponiendo que los estados vistos en (7.89), evolucionan con el tiempo según esta última ley (7.90), el estado K^0 será

$$\Psi_{K^0}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(K_1^0(0)\ \mathrm{e}^{-im_1 t}\ \mathrm{e}^{-\Gamma_1 t/2} + K_2^0(0)\ \mathrm{e}^{-im_2 t}\ \mathrm{e}^{-\Gamma_2 t/2}\right) \tag{7.91}$$

siendo $K_1^0(0) = K_2^0(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. La intensidad de K^0 en función del tiempo (que vale $|\langle K^0|\Psi(t)\rangle|^2$) será

$$I(K^0) = \frac{1}{4}\left[\ \mathrm{e}^{-\Gamma_1 t} + \mathrm{e}^{-\Gamma_2 t} + 2\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\Gamma_1+\Gamma_2)t}\ \cos(\Delta m t)\right] \tag{7.92}$$

en donde $\Delta m = m_2 - m_1$. La misma expresión se obtiene para $I(\bar{K}^0)$, pero con el signo del término del $\cos$ cambiado.

Se encuentra pues que las intensidades de K^0 y $\bar{K}^0$ oscilan con el tiempo con una frecuencia $\Delta m/2\pi$ (véase la figura 7.10).

Se ha medido experimentalmente $|\Delta m|\tau_1 = 0{,}477 \pm 0{,}002$, con $m_2 > m_1$, es decir, una diferencia de masas excepcionalmente pequeña:

$$\Delta m = (3{,}52 \pm 0{,}01) \times 10^{-6} \text{ eV} \tag{7.93}$$

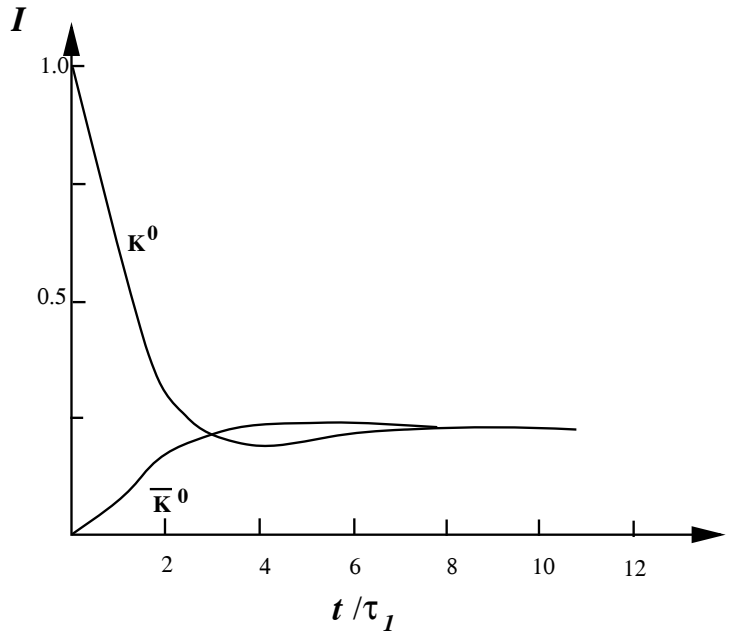


Figura 7.10: Oscilaciones de extrañeza en el sistema $K^0\bar{K}^0$. Se observa la evolución de la intensidad de partículas presentes en un haz, cuando se parte a $t = 0$ de un haz puro de K^0.

En conclusión, las oscilaciones $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$ u oscilaciones de extrañeza son debidas a que este sistema está acoplado a través de sus modos de desintegración a 2π y 3π. Es un proceso que también puede darse en los sistemas $D^0\bar{D}^0$ (encanto) y $B^0\bar{B}^0$ (belleza).

Otros dos fenómenos ligados a este sistema son:

- La simetría $\mathcal{CP}$ no es perfecta. Cronin y Fitch (1964) midieron el cociente de amplitudes $|A|$ de desintegración (la anchura es $\Gamma = |A|^2$):

$$|\eta_{+-}| = \frac{A(K_{\mathrm{L}}^0 \to \pi^+\pi^-)}{A(K_{\mathrm{S}}^0 \to \pi^+\pi^-)} = (2{,}288 \pm 0{,}014) \times 10^{-3}$$

  con lo que el sistema $K^0\bar{K}^0$ viola la simetría $\mathcal{CP}$ en un $2{,}3$ ‰, lo que implica a su vez que la partícula que se desintegra no es pura sino una

mezcla, y si ϵ representa el grado de mezcla se tendrá:

$$|K_{\rm L}^0\rangle = \frac{K_2^0 + \epsilon K_1^0}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}}, \qquad |K_{\rm S}^0\rangle = \frac{K_1^0 + \epsilon K_2^0}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}} \tag{7.94}$$

Esta violación de la simetría $\mathcal{CP}$, puesta de manifiesto a través de la desintegración $K_{\rm L}^0 \to 2\pi$, también se ha observado en las desintegraciones semileptónicas del $K_{\rm L}^0$ y permite distinguir la materia de la antimateria a través de la distinción entre carga positiva y carga negativa en las desintegraciones

$$\frac{\Gamma(\pi^- e^+ \nu_e) - \Gamma(\pi^+ e^- \overline{\nu}_e)}{\Gamma(\pi^- e^+ \nu_e) + \Gamma(\pi^+ e^- \overline{\nu}_e)} \tag{7.95}$$

o la misma expresión, pero con muones, dando experimentalmente un valor medio igual a $(0{,}327 \pm 0{,}012)\,\%$. Si $\mathcal{CP}$ fuese una buena simetría para el $K_{\rm L}^0$, el numerador anterior se anularía ya que los dos procesos del numerador están relacionados por la operación $\mathcal{CP}$.

La violación de $\mathcal{CP}$ podría ser la explicación de la asimetría materia-antimateria observada en el universo.

- El fenómeno de la regeneración, o sea, que después de largos recorridos vuelven a aparecer $K_{\rm S}^0$ al interaccionar un haz de K^0 con la materia. En efecto, la partícula que interacciona con la materia es el K^0 o el $\bar{K}^0$, y cada uno de ellos con una probabilidad f o $\overline{f}$, respectivamente. Si un haz de K^0 se deja viajando un recorrido equivalente a unas 100 vidas medias del $K_{\rm S}^0$, acabará siendo un haz puro de K_2^0. Sea $f|K^0\rangle(\overline{f}|\bar{K}^0\rangle)$ la fracción de $K^0(\bar{K}^0)$ que permanecen después de atravesar un bloque de materia, entonces el contenido de extrañeza cambia de $|K_2^0\rangle$ a

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(f|K^0\rangle + \overline{f}|\bar{K}^0\rangle\right) = \frac{1}{2}\left(f+\overline{f}\right)|K_2^0\rangle + \frac{1}{2}\left(f-\overline{f}\right)|K_1^0\rangle \tag{7.96}$$

es decir, aparece en el estado final el K_1^0, luego se regeneran los K *cortos*, o K_1^0, ya que $f \neq \overline{f}$. Es una consecuencia del principio de superposición y de la cuantización.

7.5.5 El teorema $\mathcal{CPT}$

El teorema $\mathcal{CPT}$ es un teorema fundamental que se demuestra por primeros principios en la teoría cuántica de campos.

Si el hamiltoniano de un sistema, H, es invariante Lorentz (invariante bajo las transformaciones relativistas de Lorentz) entonces se cumple que el producto $\mathcal{CPT}$ conmuta con el hamiltoniano:

$$[H, \mathcal{CPT}] = 0 \tag{7.97}$$

con lo que el producto de las tres simetrías debe conservarse. Este teorema es válido para todas las interacciones.

Una de las consecuencias más importantes del teorema $\mathcal{CPT}$ es la igualdad de masas y de vidas medias entre partículas y sus antipartículas. Así por ejemplo para el protón y el antiprotón se debe cumplir:

$$m_p = m_{\overline{p}}$$
$$\tau_p = \tau_{\overline{p}}$$

Ha sido verificado experimentalmente con suma precisión; las masas del K^0 y $\bar{K}^0$ medidas en los estados de vida media corta y larga, K^0_{S} y K^0_{L}, se ha encontrado que su diferencia es menor que 6 partes en 10^{15}.

También se ha verificado midiendo $m_{\pi^+} - m_{\pi^-}$, $m_{K^+} - m_{K^-}$, $m_p - m_{\overline{p}}$ y también

$$\frac{\tau_{\pi^+}}{\tau_{\pi^-}} = 1{,}00055 \pm 0{,}00071$$

lo que, además, se convirtió en un test muy preciso de la relatividad especial (dilatación temporal).

7.6 La invariancia *gauge*

Este es uno de los conceptos más profundos que han permitido comprender el origen de la conservación de las cargas, así como propiedades fundamentales de las fuerzas de la naturaleza.

Se denominan teorías *gauge* a las que cumplen la simetría llamada invariancia *gauge*; entre ellas se encuentran las conocidas teorías QED y QCD.

La transformación de *gauge* es una transformación de fase:

$$\Psi(\vec{x},t) \longrightarrow \Psi'(\vec{x},t) = e^{-iqf(\vec{x},t)}\Psi(\vec{x},t) \tag{7.98}$$

En este caso, se llama transformación de *gauge* local porque la transformación depende del punto del espacio tiempo $(\vec{x},t)$. Si la fase $(f(\vec{x},t) = \phi = \text{constante})$ es la misma para todo el espacio, entonces se llama transformación de *gauge* global. En electromagnetismo clásico, el valor absoluto del potencial es arbitrario; con ello la carga eléctrica debe conservarse. La invariancia *gauge* global, que cumple la teoría de la electrodinámica cuántica QED, conduce a la conservación de la carga eléctrica.

Si se exige, además, que el sistema sea invariante bajo la transformación de *gauge* local aparecen nuevos términos en el lagrangiano del sistema que se interpretan como nuevas interacciones. Por ejemplo, partiendo de la ecuación de Dirac para un electrón libre, la invariancia *gauge* genera los términos que explican la interacción de una carga con un campo electromagnético. Matemáticamente, la invariancia del lagrangiano de Dirac $\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$ bajo la transformación (7.98) exige la introducción de un campo vectorial A_μ (campo

gauge), que se acopla a la partícula de Dirac (con carga eléctrica $-e$) igual que los fotones, dando lugar a $\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu \psi A_\mu$.

Es pues posible introducir funciones de onda con fases arbitrariamente elegidas en diferentes puntos del espacio y del tiempo para las partículas y ello no cambiará los resultados físicos, siempre que las cargas se acoplen a un campo de largo alcance (como el electromagnético) y se conserve la carga. Las teorías que presentan invariancia *gauge* local, tienen marcadas propiedades de simetría. Además son renormalizables, lo que quiere decir que las magnitudes físicas son todas calculables y finitas.

Como q, en (7.98) es una fase escalar, se dice que la teoría es invariante *gauge* local bajo el grupo $U(1)$. Si el escalar q, se reemplaza por un operador matricial 3x3, T_a, la invariancia que se exige tiene una forma

$$\Psi(x) \longrightarrow U\Psi(x) \equiv e^{iT_a f(x)}\Psi(x)$$

siendo U una matriz arbitraria 3x3, unitaria, con lo que se podría imponer invariancia local bajo $SU(3)$. Partiendo del lagrangiano de QCD (los estados $\Psi(x)$ representarían entonces a los quarks), aparecería el acoplamiento de los quarks coloreados con los gluones. Como las matrices T_a, generadores del grupo, no conmutan, se dice que la teoría invariante *gauge* es no abeliana (que es lo mismo que decir que es una teoría Yang-Mills).

Lo mismo sucede con la teoría electrodébil de Glashow, Weinberg y Salam, pero que es invariante bajo el grupo $SU(2)$. De aquí proviene la definición del modelo estándar que dice que es una teoría invariante *gauge* basada en el grupo

$$\boxed{SU(3)_{\mathrm{C}} \times SU(2)_{\mathrm{L}} \times U(1)_{\mathrm{Y}}} \tag{7.99}$$

7.7 Leyes de conservación en las interacciones fundamentales

Con todo lo visto, puede construirse la tabla 7.3 en la que se resumen las propiedades de simetría de cada una de las interacciones y las leyes de conservación que cumplen.

Es de destacar que todas las simetrías son buenas para la interacción fuerte y todas, excepto el isospín, son también buenas simetrías para la interacción electromagnética. La interacción débil no cumple la conservación de los números cuánticos internos. De hecho, la interacción débil es la responsable del cambio de sabor de los quarks. Más sorprendente es que tampoco cumpla la conservación de la paridad ni la de la conjugación de carga. En un principio se suponía que la interacción débil conservaría el producto $\mathcal{CP}$, pero también se ha puesto de manifiesto (en la desintegración del K^0_{L}) que se trata de una simetría violada en un $2‰$.

TABLA 7.3: Leyes de conservación en las interacciones entre partículas elementales.
(*) pero se cumplen reglas como $\Delta I = 1, \frac{1}{2}$;
(**) 2 por mil violado en la desintegración del $K^0_{\rm L}$.

magnitud		interacción		
		fuerte	e.m.	débil
Energía	E	sí	sí	sí
Momento	p	sí	sí	sí
Momento angular	J	sí	sí	sí
Carga eléctrica	Q	sí	sí	sí
N^o bariónico	$\mathcal{B}$	sí	sí	sí
N^o leptónico	$\mathcal{L}$	sí	sí	sí
Isospín	I	sí	no	no*
Extrañeza	S	sí	sí	no
Encanto	C	sí	sí	no
Belleza	B	sí	sí	no
Verdad	T	sí	sí	no
Paridad	$\mathcal{P}$	sí	sí	no
Conjugación de carga	$\mathcal{C}$	sí	sí	no
Inversión temporal	$\mathcal{T}$	sí	sí	no**
Simetría $\mathcal{CP}$	$\mathcal{CP}$	sí	sí	sí**
Simetría $\mathcal{CPT}$	$\mathcal{CPT}$	sí	sí	sí

7.8 Ejercicios

7.1. Producción de antiprotones.
Se consideran las siguientes colisiones protón-protón con producción de un antiprotón:

$$pp \to \bar{p}\pi^+\pi^+\pi^+$$
$$pp \to p\bar{p}\pi^+\pi^+$$
$$pp \to pp\bar{p}\pi^+$$
$$pp \to ppp\bar{p}$$
$$pp \to pppp\bar{p}\pi^0$$
$$pp \to pppp\bar{p}\pi^+\pi^-$$

a) Indicar cuáles están permitidas y cuáles no.
b) Para aquellas que estén permitidas, calcular la energía umbral del protón incidente en los sistemas del laboratorio y del centro de masas.

7.2. Reacciones de neutrinos.
Se consideran las siguientes colisiones de neutrinos contra la materia:

$$\nu e \to \nu e$$
$$\nu e \to \nu \mu$$
$$\nu N \to e N$$
$$\nu N \to \mu N$$

siendo ν un neutrino o bien un antineutrino y N un protón o bien un neutrón.

a) Indicar cuáles están permitidas y cuáles no en función del sabor del neutrino incidente y de la naturaleza del nucleón N.
b) Para aquellas que estén permitidas, calcular la energía umbral del neutrino incidente en el sistema del laboratorio.

7.3. Desintegración a dos cuerpos.
Se considera la desintegración de una partícula de masa M en dos partículas de masas m_1 y m_2.
a) Calcular la energía y el momento de las partículas resultantes de la desintegración.
b) Efectuar la aplicación numérica para las desintegraciones $\Lambda \to p\pi^-$ y $K^0 \to \pi^+\pi^-$.

7.4. Desintegración a tres cuerpos y diagrama de Dalitz.
Se considera la desintegración de una partícula de masa M en tres partículas de masas m_1, m_2 y m_3.
a) Demostrar que las energías E_1, E_2 y E_3 se pueden expresar en función de las masas invariantes de los pares de partículas m_{23}^2, m_{13}^2 y m_{12}^2, respectivamente, y que, por tanto, es equivalente utilizar las energías o las masas invariantes.
b) Demostrar que $m_1 < E_1 < [M^2 + m_1^2 - (m_2+m_3)^2]/2M$ y que existen límites similares para E_2 y E_3. Demostrar que para un valor de E_1 dado, dentro los límites anteriores, los valores máximo y mínimo de E_2 satisfacen las ecuaciones

$$\sqrt{E_2^2 - m_2^2} = \left| \sqrt{E_1^2 - m_1^2} \pm \sqrt{(M - E_1 - E_2)^2 - m_3^2} \right|$$

donde el signo + corresponde al valor máximo de E_2 y el signo − al valor mínimo.
c) Dibujar el diagrama de Dalitz para la desintegración $K \to \pi\pi\pi$.
d) Dibujar la zona cinemáticamente accesible en el plano $E_1 - E_2$ (diagrama de Dalitz) para el caso en que todas las masas sean nulas.

7.5. Desintegración del π^0.
a) Deducir la expresión de la energía de los fotones producidos en la desintegración $\pi^0 \to \gamma\gamma$, en función de la energía E_π en el sistema del laboratorio y del ángulo θ^* entre la dirección del π^0 y la del fotón emitido, en el sistema propio del π^0.
b) Al ser nulo el espín del π^0, la distribución angular es isótropa en el sistema propio del π^0. Deducir que la distribución de energía de los fotones emitidos es constante en el sistema del laboratorio y calcular las energías máxima y mínima de los fotones emitidos.

7.6. Desintegración del τ.
Se consideran los leptones τ producidos en el anillo de colisiones LEP según la reacción $e^+e^- \to \tau^+\tau^-$ a una energía en centro de masas de $\sqrt{s} = 91$ GeV.
a) Calcular la longitud media recorrida por los leptones τ antes de desintegrarse.
b) Se considera la desintegración $\tau \to \pi\nu$. calcular la energía en el laboratorio de los piones producidos, en función del ángulo θ^* entre la dirección del τ y la del pión, en el sistema propio del τ.
c) Calcular el parámetro de impacto de los piones y su valor asintótico para $\beta_\tau \to 1$. Calcular el valor medio de este valor asintótico suponiendo que los leptones τ no están polarizados.

7.7. Cinemática de las colisiones de neutrinos.
Se considera una colisión de tipo corriente cargada entre un neutrino y un núcleo

con emisión de un muón. La dirección del haz de neutrinos es conocida, pero no su energía.

a) Demostrar que la energía del neutrino incidente puede deducirse a partir del momento y del ángulo del muón emitido.

b) Demostrar que a partir de las dos variables anteriores puede igualmente deducirse la energía y la dirección del sistema hadrónico producido por el retroceso del núcleo.

c) Aplicación numérica: calcular E_ν, E_h y $cos\theta_h$ suponiendo E_μ=1,96 GeV y $\theta_\mu = 45°$.

7.8. Leyes de conservación en diversas reacciones.

Indicar cuáles de los siguientes procesos están permitidos y cuáles están prohibidas, indicando en cada caso las leyes de conservación que sean aplicables.

a) $\pi^0 \to e^+ e^-$

b) $p \to n e^+ \nu_e$

c) $n \to p\gamma$

d) $p \to \pi^+ \gamma$

e) $p \to e^+ \gamma$

f) $\bar{p}n \to \pi^- \pi^0$

g) $\mu^+ \to e^+ e^- e^+$

h) $K^+ n \to \Sigma^+ \pi^0$

i) $\rho^0 \to \pi^0 \pi^0$

7.9. Estudio de la desintegración de Ξ^{*-}.

La desintegración completa de la resonancia Ξ^{*-} se produce mediante la siguiente secuencia:

a) $\Xi^{*-} \to K^- \Sigma^0$

b) $K^- \to \pi^- \pi^0, \Sigma^0 \to \Lambda^0 \gamma$

c) $\pi^- \to \mu^- \bar{\nu}_\mu, \pi^0 \to \gamma\gamma, \Lambda^0 \to p e^- \bar{\nu}_e$

d) $\mu^- \to e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$

Sabiendo que el contenido en quarks de los distintos hadrones es $\Xi^{*-}[ssd], \Sigma^0[sud]$, $\Lambda^0[sud], p[uud], K^-[s\bar{u}], \pi^-[d\bar{u}]$ y $\pi^0[u\bar{u} + d\bar{d}]$, clasificar los diversos procesos según el tipo de interacción (fuerte, electromagnética o débil).

7.10. Estudio de la desintegración de η^0.

El mesón $\eta^0(549)$ tiene los siguientes modos de desintegración, con sus correspondientes cocientes:

$$\eta^0 \to \gamma\gamma(39\,\%), \quad \pi\pi\pi(56\,\%), \quad \pi\pi\gamma(5\,\%)$$

a) Demostrar que la desintegración en 3π es electromagnética.

b) Demostrar que la desintegración en 2π está prohibida.

7.11. Leyes de conservación en la interacción débil.

Indicar cúales de los siguientes procesos están permitidos según las leyes de conservación aplicables a la interacción débil:

a) $\nu_\mu p \to \mu^+ n$

b) $\nu_e p \to e^- \pi^+ p$

c) $\Lambda^0 \to \pi^+ e^- \bar{\nu}_e$

d) $K^+ \to \pi^0 \mu^+ \nu_\mu$

7.12. Paridad intrínseca del π^-.

Determinar la paridad intrínseca del π^- a partir de la reacción de captura por

deuterio $\pi^- d \to nn$, sabiendo que los números cuánticos del deuterio son $J^P = 1^+$ y que la captura se efectúa en onda S.

7.13. Estudio de la aniquilación $p\bar{p}$.
Se considera el proceso de aniquilación $p\bar{p} \to \pi^+ \pi^-$.
a) Determinar los valores posibles de paridad P y conjuagación de carga C para los sistemas inicial y final.
b) Determinar los valores posibles del momento angular utilizando la conservación de paridad.
c) Razonar si la conservación de C permite limitar los valores obtenidos en el apartado anterior.
d) Estudiar qué ocurre en el proceso $p\bar{p} \to \pi^0 \pi^0$.

7.14. Estudio de las colisiones πp.
a) Utilizando la conservación del isospín en la interacción fuerte, determinar el valor de las secciones eficaces de los tres procesos $\pi^+ p \to \pi^+ p$, $\pi^- p \to \pi^- p$ y $\pi^- p \to \pi^0 n$, en función de únicamente las dos amplitudes de isospín total.
b) Deducir el cociente de las secciones eficaces para $\sqrt{s} \approx 1{,}2$ GeV, en cuyo caso la colisión está dominada por la presencia de las resonancias Δ.
c) Determinar el cociente relativo de los modos de desintegración $\Delta^0 \to \pi^- p$ y $\Delta^0 \to \pi^0 n$. ¿Qué ocurriría si Δ^0 tuviera un isospín igual a 1/2?

7.15. Estudio de las colisiones Kp.
Expresar las secciones eficaces de los procesos $K^- p \to \pi^- \Sigma^+$ y $K^- p \to \pi^+ \Sigma^-$ en términos de dos amplitudes con isospín total definido.

8. *Espectroscopía de hadrones*

En la década de los años 1960 se detectaron y estudiaron un gran número de hadrones (por entonces conocidos por el nombre de partículas *elementales*) que se fueron descubriendo gracias a la puesta en marcha de los grandes aceleradores de partículas y los correspondientes detectores.

La espectroscopía de partículas consiste en determinar todos los números cuánticos de las mismas. Ésta es una tarea muy lenta y compleja, que ocupó numerosos equipos de investigadores de todo el mundo.

Pero la aparente complejidad en cuanto al elevado número y propiedades de los hadrones quedó rápidamente superada al ser propuesto el primer modelo de quarks constituyentes de Gell-Mann, Neeman y Zweig, objeto de estudio en este tema. La consistencia general que existe entre los números cuánticos de los hadrones descubiertos y las predicciones de los modelos basados en quarks constituyentes, aportaron razones muy sólidas para creer en los quarks.

8.1 El modelo de quarks de los hadrones

Fruto de los trabajos teóricos de M. Gell-Mann,[1] Y. Neeman[2] y G. Zweig[3] se elabora un primer modelo de los hadrones basado en la simetría unitaria $SU(3)$, y que postula la existencia de tres constituyentes básicos, que el propio Gell-Mann bautiza con el nombre de *quarks*. Estos tres quarks se distinguen por su *sabor* y se denominan u, d, s.

Esta simetría es consecuencia de la conservación del isospín y la extrañeza en las interacciones fuertes entre hadrones. La simetría debe ser de la forma $SU(2)_{\mathrm{I}} \otimes U(1)_{\mathrm{Y}}$. El doblete fundamental de $SU(2)_{\mathrm{I}}$ lo forman los quarks u, d y el singlete de la extrañeza, que representa $U(1)_{\mathrm{Y}}$ es el quark s. La simetría que se supone es $SU(3)$ porque es la más sencilla que contiene a esas dos simetrías subyacentes.

[1] M. Gell-Mann, *Phys. Rev.*, **125** (1962) 125 y *Phys. Lett.*, **8** (1964) 214.
[2] Y. Neeman, *Nucl. Phys.*, **26** (1961) 222.
[3] G. Zweig, CERN preprint TH401 y CERN preprint TH412 (1964).

Según el modelo de quarks constituyentes, los hadrones son estados ligados de quarks, cuyas estructuras más elementales son:

- los bariones, estados de tres quarks qqq,
- los mesones, estados quark-antiquark $q\overline{q}$.

Además, se suelen denominar mesones o bariones exóticos, a todos aquellos hadrones que no cumplen la anterior prescripción mínima. Una manera de descubrir mesones exóticos es buscar partículas cuyos números cuánticos no puedan explicarse por estados $q\overline{q}$. Otra categoría de exóticos está representada por hadrones compuestos por 4 ó 5 quarks (bariones del tipo $qqqq\overline{q}$ o mesones $q\overline{q}q\overline{q}$). Todas estas búsquedas han resultado, hoy por hoy, infructuosas.

A los tres primeros quarks se les asignan los números cuánticos de la tabla 8.1; todos ellos son fermiones (espín $\frac{1}{2}$) y tienen número bariónico $\mathcal{B} = \frac{1}{3}$, de forma que los bariones tienen número bariónico $\mathcal{B} = 1$ y los mesones tienen número bariónico $\mathcal{B} = 0$. Existen también los tres antiquarks de cada uno de los quarks dados en la tabla 8.1. Los antiquarks tienen número bariónico $\mathcal{B} = -\frac{1}{3}$, así como todas las otras *cargas*, cambiadas de signo. De esta manera, el modelo se generaliza a todas las antipartículas y supone que los antibariones están compuestos por tres antiquarks $\overline{q}_1\overline{q}_2\overline{q}_3$ y los mesones $q_1\overline{q}_2$ tendrán antimesones $\overline{q}_1 q_2$, con lo que podrán existir mesones que son su propia antipartícula (por ejemplo el π^0 ó el ρ^0).

TABLA 8.1: Los tres primeros quarks introducidos por Gell-Mann, que componen la representación fundamental del modelo $SU(3)$ de sabor. A todos ellos, por convenio, se les asigna paridad = +.

QUARKS **S=**$\frac{1}{2}$, $\mathcal{B} = \frac{1}{3}$	**M** (MeV/c^2)	Q	I	I_3	C	S	T	B
u	0,39	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0
d	0,39	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0
s	0,51	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	-1	0	0

Así pues, los quarks tienen carga eléctrica fraccionaria. Pero hay que insistir en el hecho experimental de que todavía no se ha descubierto ninguna partícula en estado libre (es decir, cuya trayectoria sea medible en un campo electromagnético) que tenga carga eléctrica igual a una fracción de la del electrón. Los quarks existen únicamente confinados en el interior de los hadrones y todavía no ha sido posible detectarlos en estado libre. Esta es la idea de confinamiento. Por comodidad se introduce la llamada hipercarga,[4] $Y = \mathcal{B} + S$,

[4]Esta definición de hipercarga se generaliza cuando se tienen en cuenta todos los quarks, y se define $Y = \mathcal{B} + S + C + B + T$; es decir, incluyendo las cargas internas extrañeza, encanto, belleza y verdad.

suma del número bariónico y de la extrañeza. Con ello la relación entre la hipercarga y la carga eléctrica viene dada por

$$\boxed{Q = I_3 + \frac{Y}{2}} \tag{8.1}$$

que es la fórmula de Gell-Mann-Nishijima. En esta expresión Q es un número entero, sin dimensiones. Si se desea calcular la carga, habrá que multiplicar por la unidad de carga eléctrica e, que es, en valor absoluto, igual a la carga del electrón.

8.2 Números cuánticos de los hadrones

El objetivo de la espectroscopía de hadrones es determinar los números cuánticos de todos los hadrones encontrados en los experimentos de física de altas energías. Los más representativos son:

Masa (M), espín-paridad y conjugación de carga (notación: $J^{\mathcal{PC}}$) y las cargas Q, $\mathcal{B}$, S, C, B, T. Así, por ejemplo, la prescripción mínima del modelo de quarks conduce a las cargas posibles para los hadrones que pueden contemplarse en la tabla 8.2.

TABLA 8.2: Valores de la carga y del isospín posibles, según el valor de la extrañeza para bariones y mesones en el modelo de quarks.

Barión			Mesón		
S	Q	I	S	Q	I
0	$2, 1, 0, -1$	$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$	1	1,0	$\frac{1}{2}$
-1	$1, 0, -1$	$1, 0$	0	$1, 0, -1$	$1, 0$
-2	$0, -1$	$\frac{1}{2}$	-1	$0, -1$	$\frac{1}{2}$
-3	-1	0			

La interacción fuerte, conserva todos los números cuánticos de los hadrones; es decir, los que aparecen en la tabla 8.1 que muestra las propiedades de los quarks constituyentes. Así, fijados los números cuánticos de los bariones $p(938)$ y $n(940)$ y de los mesones $K^-(494)$, $D^-(1869)$, $B^-(5278)$ con $S = -1, C = -1$ y $B = -1$, respectivamente, se pueden deducir los números cuánticos S, C, B, de los mesones ($\mathcal{B} = 0$) π^0, π^+, K^+ y del hiperón ($\mathcal{B} = 1$) Λ^0 a partir de las reacciones

$$\begin{array}{lll} p + p & \rightarrow & p + n + \pi^+ \\ p + p & \rightarrow & p + p + \pi^0 \\ \pi^- + p & \rightarrow & \pi^0 + n \\ \pi^- + p & \rightarrow & K^+ + \pi^- + \Lambda^0 \\ K^- + p & \rightarrow & \pi^0 + \Lambda^0 \end{array} \tag{8.2}$$

8.2.1 Isospín en el modelo de quarks

De particular importancia es la simetría de isospín, consecuencia de la igualdad de la fuerza fuerte para los quarks u y d. En efecto, Heisenberg (1932) introdujo el isospín para caracterizar al nucleón, que tiene dos estados de carga: p, n, que se comportan de manera idéntica en las interacciones fuertes (simetría de carga e independencia de carga de las interacciones fuertes; propiedades de los núcleos espejo, etc.). La conservación del módulo de I es consecuencia de la invariancia del hamiltoniano fuerte bajo las rotaciones en el espacio de isospín.

Los quarks (u, d) forman un doblete de isospín ($I = \frac{1}{2}$). Los demás son singletes de isospín ($I = 0$). Habrá una serie de valores posibles del isospín para cada extrañeza (véase la tabla 8.2).

8.2.2 Diferencias de masa en multipletes de isospín

Si la simetría $SU(2)_{\mathrm{I}}$ de isospín fuese exacta, las partículas de un multiplete de isospín (por ejemplo el doblete (p, n), el triplete $(\pi^- \pi^0 \pi^+)$, etc.) deberían tener la misma masa. Sin embargo, puede suponerse que la diferencia entre las masas de hadrones de un mismo multiplete es debida a la interacción eléctrica entre los quarks constituyentes.

Tómese el caso de los hiperones Σ. Su producción es posible en interacciones del tipo

$$\begin{aligned} K^- + p \quad &\rightarrow \ \pi^- + \Sigma^+ \\ &\rightarrow \ \pi^0 + \Sigma^0 \\ &\rightarrow \ \pi^+ + \Sigma^- \end{aligned} \tag{8.3}$$

El Σ^+ se desintegra por medio de la interacción débil: $\Sigma^+ \rightarrow \ \pi^+ + n$ o $\Sigma^+ \rightarrow \pi^0 + p$, con una vida media $\tau_\Sigma = 0{,}8 \times 10^{-10}$ seg, característica de la interacción débil. El Σ^0 se desintegra vía interacción electromagnética $\Sigma^0 \rightarrow \ \Lambda^0 + \gamma$, ya que el $\Lambda^0(1116)$, con los mismos números cuánticos, es más ligero. Por último, el $\Sigma^- \rightarrow \ \pi^- + n$.

La estructura de quarks que se deduce de los principios de conservación es la siguiente:

$$\Sigma^+(1189) = uus \qquad \Sigma^0(1193) = uds \qquad \Sigma^-(1197) = dds$$

en donde entre paréntesis se da la masa de cada hiperón.

Si las diferencias entre sus masas se supone que vienen de la interacción eléctrica entre pares de quarks se puede escribir

$$\begin{aligned} M(\Sigma^+) \quad &= M_0 + m_s + 2m_u + \delta \cdot (z_u^2 + z_u z_s + z_u z_s) \\ &= M_0 + m_s + 2m_u \\ \\ M(\Sigma^0) \quad &= M_0 + m_s + m_d + m_u + \delta \cdot (z_u z_d + z_u z_s + z_d z_s) \\ &= M_0 + m_s + m_d + m_u - \delta/3 \\ \\ M(\Sigma^-) \quad &= M_0 + m_s + 2m_d + \delta \cdot (z_d^2 + z_d z_s + z_d z_s) \\ &= M_0 + m_s + 2m_d + \delta/3 \end{aligned} \tag{8.4}$$

siendo M_0 la masa del triplete, idéntica, ya que la interacción fuerte es la misma para los tres quarks; z_i son las cargas de los quarks y δ una constante

$$\delta = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right]\frac{e^2}{r}$$

que representa la interacción eléctrica.

De la anterior relación de masas se puede inferir

$$m_d - m_u = \frac{1}{3}\Big[M(\Sigma^-) + M(\Sigma^0) - 2M(\Sigma^+)\Big] = 3{,}7 \text{ MeV/c}^2 \qquad (8.5)$$

lo que confirma la similitud entre las masas de los quarks del doblete de isospín (u, d).

8.3 La simetría $SU(3)$

Los hadrones se agruparán en multipletes; todos los hadrones de un multiplete tendrán el mismo valor de los números cuánticos espín-paridad $J^{\mathcal{P}}$. Esto es consecuencia de la invariancia Lorentz (el hamiltoniano de $SU(3)$ es invariante relativista). Los números cuánticos, aditivos, que se conservan y que caracterizan cada multiplete son el isospín I y la hipercarga Y.

La simetría $SU(3)$ de sabor de quarks introducida por Gell-Mann es una generalización de la invariancia de las interacciones fuertes bajo $SU(2)$, el grupo que describe el isospín.

Después del descubrimiento de los hadrones extraños, se comprueba inmediatamente que las interacciones fuertes conservan el número cuántico S, extrañeza, o lo que es lo mismo la hipercarga Y, que es como una carga y cuyo grupo de simetría es $U(1)_{\mathrm{Y}}$. De aquí, fue fácil extender la simetría inmediatamente superior que engloba el isospín y la extrañeza. En efecto $SU(3)$ contiene al producto $SU(2)_{\mathrm{I}} \otimes U(1)_{\mathrm{Y}}$.

La figura 8.1 muestra la representación gráfica de los tres quarks de la representación fundamental del grupo $SU(3)$ de sabor de quarks. En ella se pueden observar los números cuánticos de interés para este modelo.

También existe un multiplete fundamental de anti-quarks, en el que los tres antiquarks $\overline{u}, \overline{d}, \overline{s}$ tienen los signos cambiados de S y de I_3 así como el de las otras cargas $\mathcal{B}$ y Q.

Hay que tener presente que el éxito del concepto de quark constituyente es consecuencia del descubrimiento de los hadrones y de la determinación de sus números cuánticos. Para ello, la interacción fuerte, que conserva todos los números cuánticos estudiados, ha sido la que ha proporcionado el método más eficaz, como ya ha podido comprobarse más arriba.

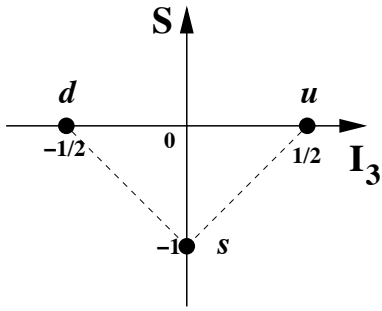


Figura 8.1: Los tres quarks que forman la representación fundamental del modelo $SU(3)$ de sabor. Se observa el doblete de isospín $\frac{1}{2}$ formado por los quarks u y d y el singlete de isospín, el quark s que tiene extrañeza $S = -1$.

8.3.1 Representación matricial del grupo $SU(3)$

Procediendo de la misma manera que en el caso del grupo del $SU(2)$ de espín o de isospín, se pueden encontrar las representaciones matriciales del grupo.

Ahora, la representación fundamental de $SU(3)$ es la $\underline{3}$ (o sea la dimensionalidad es 3). La representación de los antiquarks $\overline{3}$ es la llamada representación conjugada. El triplete fundamental que representa a cada uno de los quarks u, d, s vendrá caracterizado por uno de los vectores columna:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{8.6}$$

todos ellos vectores propios del par de números cuánticos (I_3, Y), con los valores propios $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}), (0, -\frac{2}{3})$ respectivamente. Más abajo se verá la representación matricial de los operadores I_3, Y.

Si en $SU(2)$ hay 3 generadores (las 3 matrices 2×2 de Pauli), en $SU(3)$ habrá 8 generadores (las 8 matrices 3×3 de Gell-Mann). En efecto, en un grupo de dimensionalidad n, hay $(n^2 - 1)$ generadores.

Una transformación bajo el grupo $SU(3)$ de uno de los estados ϕ de $SU(3)$, combinación lineal de los vectores base vistos en (8.6), viene dada por $\phi' = U\phi$, siendo U el operador unitario

$$\boxed{U(\theta) = e^{-\frac{i}{2}\theta\hat{n}\,\cdot\,\hat{\lambda}}} \tag{8.7}$$

La representación matricial de los 8 generadores $F_j = \frac{1}{2}\lambda_j$ del grupo $SU(3)$ es:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{8.8}$$

Estos generadores cumplen las relaciones (llamadas álgebra del grupo):

$$[F_i, F_j] = i f_{ijk} F_k \tag{8.9}$$

siendo f_{ijk}, los elementos de un tensor totalmente antisimétrico que son las constantes de estructura del grupo y que valen, $f_{123} = 1, f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y los restantes no nulos toman el valor $f_{147} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{516} = f_{637} = \frac{1}{2}$.

Los operadores que conmutan son F_3 y F_8 y están relacionados con los números cuánticos de $SU(3)$:

$$\begin{array}{rcl} I_3 & = & F_3 \\ Y & = & \frac{2}{\sqrt{3}} F_8 \end{array} \tag{8.10}$$

con lo que los estados quedan caracterizados por $|I, I_3, Y\rangle$.

La simetría $SU(3)$ incluye tres posibles subgrupos con simetría $SU(2)$ como la de isospín, que quedan definidos a partir de los operadores subida/bajada:

$$\begin{array}{rl} I\text{-espín} & I_\pm = F_1 \pm i F_2 \\ V\text{-espín} & V_\pm = F_4 \pm i F_5 \\ U\text{-espín} & U_\pm = F_6 \pm i F_7 \end{array}$$

8.4 Multipletes de bariones y mesones

La forma de generar los multipletes de los hadrones está basada en los productos de la representación fundamental siguiendo la prescripción mínima (qqq o $q\overline{q}$) vista más arriba. Un método gráfico de suma de pesos[5] (véase la figura 8.2) de la representación, permite obtener fácilmente las representaciones irreducibles.

[5] Se llama *peso* a las coordenadas en el plano (I_3, Y).

8.4.1 Representaciones irreducibles de $SU(3)$

Para obtener una representación irreducible de $SU(3)$ deben tenerse en cuenta los siguientes criterios. Hay que construir el diagrama de pesos en el plano I_3, Y, simplemente sumando los pesos de las representaciones que se componen; ejemplo $3 \otimes 3$. A continuación, se tienen en cuenta las siguientes reglas:

1. Las representaciones obtenidas tienen simetría hexagonal; a veces triangular.
2. Hay al menos un estado para cada representación.
3. La multiplicidad de los estados de la capa externa es 1 y va aumentando de uno en uno a medida que la capa es más interna. Cuando se llega a una capa triangular, la multiplicidad ya no aumenta más. El centro debe tener multiplicidad 2 como máximo, para ser una representación irreducible.

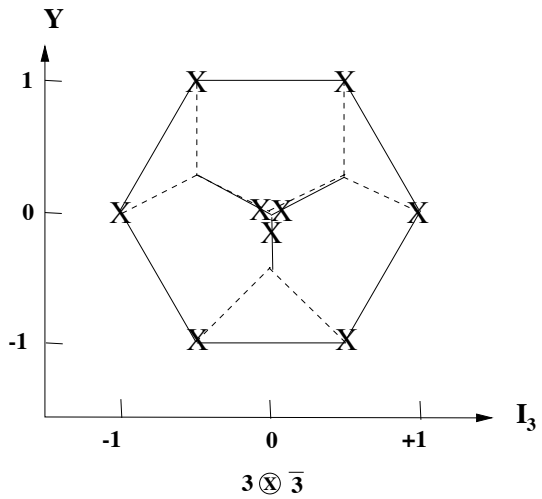


Figura 8.2: Técnica gráfica que ilustra la reducción del producto $3 \otimes \overline{3}$.

La importancia del grupo $SU(3)$ de sabor para la física de partículas radica en que se postula que los hadrones son los estados de las representaciones irreducibles del grupo $SU(3)$, que poseen el mismo $J^{\mathcal{P}}$. Evidentemente todos los hadrones que pertenezcan a un mismo multiplete deben tener las mismas propiedades espacio-temporales, o sea el mismo espín y paridad, ya que $SU(3)$ conmuta con el grupo de las transformaciones de Lorentz. Por otra parte, como el hamiltoniano es invariante bajo las transformaciones $SU(3)$ todos los hadrones de un mismo multiplete tendrán la misma interacción fuerte.

Para los casos más interesantes se tiene:

- los bariones son estados de tres quarks qqq; por lo tanto, su representación se obtendrá calculando en primer lugar el producto directo

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{6} \oplus \overline{\mathbf{3}}$$

con lo que

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{10}_{\mathrm{S}} \oplus \mathbf{8}_{\mathrm{M_S}} \oplus \mathbf{8}_{\mathrm{M_A}} \oplus \mathbf{1}_{\mathrm{A}} \tag{8.11}$$

Los subíndices S y A significan que los multipletes son totalmente simétricos y antisimétricos bajo intercambio. Los dos octetes que aparecen no son idénticos; se distinguen por la simetría de intercambio de los dos primeros quarks; los subíndices M_{S} y M_{A} indican simetría y antisimetría bajo intercambio de los dos primeros quarks.

- los mesones son estados quark-antiquark $q\overline{q}$ y su representación se obtendrá como resultado del producto directo

$$\mathbf{3} \otimes \overline{\mathbf{3}} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \tag{8.12}$$

En conclusión, para los estados de menor energía de los bariones se tendrá un decuplete, dos octetes (cada uno con distinta simetría bajo intercambio) y un singlete. Para los mesones, se predice un octete y un singlete, que globalmente se les suele denominar nonete.

8.4.2 Multipletes de bariones

Es lógico pensar que los estados de menor energía de los bariones se formarán con tres quarks con momento angular orbital relativo $\ell = \ell' = 0$, siendo ℓ el momento angular orbital entre el quark q_1 y el q_2, mientras que ℓ' es el momento angular orbital del quark q_3 con la linea de vuelo entre q_1 y q_2. La paridad será $\mathcal{P} = (-1)^{\ell+\ell'} = +1$. Existen dos multipletes de bariones que cumplen esta condición; el octete con $J^{\mathcal{P}} = \frac{1}{2}^+$, entre los que se encuentran el protón y el neutrón como puede verse en la figura 8.3 **(a)**, y el decuplete de bariones con $J^{\mathcal{P}} = \frac{3}{2}^+$, mostrado en la figura 8.3 **(b)** entre los que se encuentra el multiplete de isospín $I = \frac{3}{2}$ de la resonancia $\Delta(1232)$ descubierta por Fermi.

La asociación $J^{\mathcal{P}} = \frac{3}{2}^+ \Longrightarrow$ decuplete y $J^{\mathcal{P}} = \frac{1}{2}^+ \Longrightarrow$ octete está contenida en el grupo $SU(6)$ de quarks con espín, ya que la única representación totalmente simétrica es la representación 56, resultado de la composición:[6]

$$56 = (10, 4) \oplus (8, 2)$$

puesto que para los multipletes de espín se tiene

$$\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{4}_{\mathrm{S}} \oplus \mathbf{2}_{\mathrm{M_S}} \oplus \mathbf{2}_{\mathrm{M_A}}$$

Esto implica que los estados del decuplete son totalmente simétricos bajo $SU(3)$ e incluso bajo $SU(6)$.

El hecho más atractivo del modelo es la clasificación de los bariones $J^{\mathcal{P}} = \frac{3}{2}^+$, que se ajustan a los estados del decuplete de la figura 8.3 **(b)**. En el momento

[6] La notación aquí empleada utiliza la dimensionalidad de las representaciones (n_3, n_2), primero la del multiplete de $SU(3)$ de sabor y luego la de $SU(2)$ de espín.

en el que el modelo fue propuesto, no se conocía todavía el hiperón $\Omega^-(1672)$. Este fue un gran éxito del modelo ya que se propuso la búsqueda de esta partícula en un experimento de producción,[7]

$$K^- + p \rightarrow \Omega^- + K^+ + K^0 \tag{8.13}$$

y efectivamente fue encontrada[8] poco después en el laboratorio de Brookhaven (BNL, EEUU) en un experimento que utilizó un haz de K^- de 5 GeV/c y como detector, la cámara de burbujas (cuyo tamaño era de 80 pulgadas) llena de hidrógeno líquido en la que se pudo detectar los fotones de la desintegración de los mesones π^0 gracias a la materialización en pares: $\gamma \rightarrow e^+e^-$, fenómenos bien conocidos y estudiados ya por entonces. En efecto, $\Omega^- \rightarrow \Xi^0\pi^-$ y $\Xi^0 \rightarrow \Lambda^0\pi^0$, y por otra parte, $K^+ \rightarrow \pi^+\pi^0$, con lo que hay que tener buena eficiencia para detectar las desintegraciones del $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$.

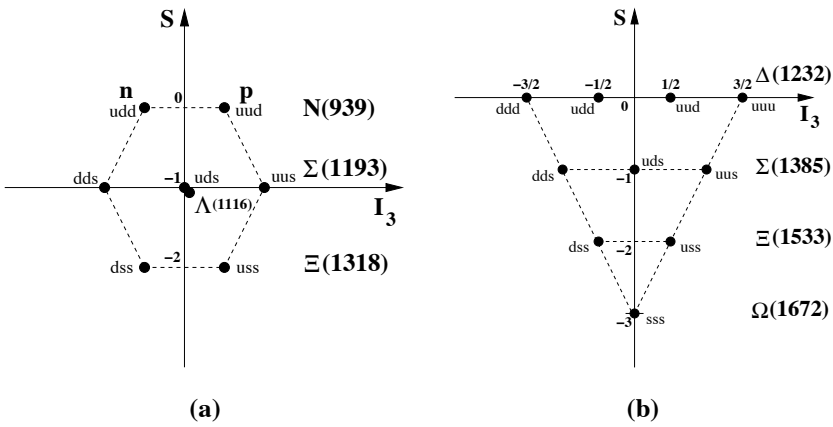


Figura 8.3: **(a)** Octete de $SU(3)$ con los bariones $J^{\mathcal{P}} = \frac{1}{2}^+$. **(b)** Decuplete de $SU(3)$ con los bariones $J^{\mathcal{P}} = \frac{3}{2}^+$.

Simetría de las funciones de onda bariónicas: el color

Otra de las consecuencias importantes del decuplete fue la controversia sobre la antisimetría de la función de ondas del Δ^{++}. Como este barión es un estado de tres quarks idénticos (fermiones), su función de ondas debe ser totalmente antisimétrica; es decir, cambia de signo bajo el intercambio de cualquier

[7] En los experimentos de producción, el estado buscado se produce como resonancia entre un subgrupo de las partículas del estado final. Los experimentos de formación son sensibles a la forma de la sección eficaz en función de la energía.

[8] V. E. Barnes *et al., Phys. Rev. Lett.,* **12** (1964) 204.

par de quarks. En el marco de $SU(3)$ las propiedades de simetría bajo el intercambio son:

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{10}_{\mathrm{S}} \oplus \mathbf{8}_{\mathrm{M_S}} \oplus \mathbf{8}_{\mathrm{M_A}} \oplus \mathbf{1}_{\mathrm{A}} \tag{8.14}$$

en donde los subíndices $\mathbf{M_S}$ y $\mathbf{M_A}$ indican simetría o antisimetría bajo intercambio de los dos primeros quarks.

En el marco del modelo de quarks con espín ($SU(6)$), debe incluirse también el espín, de forma que las representaciones posibles que predice el grupo $SU(2)$ de espín son:

$$\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{4}_{\mathrm{S}} \oplus \mathbf{2}_{\mathrm{M_S}} \oplus \mathbf{2}_{\mathrm{M_A}} \tag{8.15}$$

Los dobletes $\mathbf{M_S}$ y $\mathbf{M_A}$ de espín tienen la siguiente estructura:

$$\chi_{M_{\mathrm{A}}}(\uparrow) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\right)\uparrow\right] \qquad \chi_{M_{\mathrm{A}}}(\downarrow) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\right)\downarrow\right]$$

$$\chi_{M_{\mathrm{S}}}(\uparrow) = \tfrac{1}{\sqrt{6}}\left[\left(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\right)\uparrow - 2\uparrow\uparrow\downarrow\right] \qquad \chi_{M_{\mathrm{S}}}(\downarrow) = \tfrac{1}{\sqrt{6}}\left[\left(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\right)\downarrow - 2\downarrow\downarrow\uparrow\right]$$

mientras que los estados del cuadruplete simétrico son de la forma:

$$\chi_{\mathrm{S}}(\uparrow) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\uparrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\uparrow\right) \tag{8.16}$$

en donde como siempre $\uparrow$ representa el estado $|\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle$ y $\downarrow$ el estado $|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$.

Las funciones de onda de espín se pueden representar mediante $|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle$, y las de sabor $|q_1 q_2 q_3\rangle$ con lo que los estados decuplete quedarán identificados con la notación:

$$\psi^{10}_{q_1 q_2 q_3} = |q_1{}^{\uparrow} q_2{}^{\uparrow} q_3{}^{\uparrow}\rangle$$

Esquemáticamente, las funciones de onda de los bariones del decuplete, se escribirán:

$$|\Delta^{++}\rangle = |u^{\uparrow}u^{\uparrow}u^{\uparrow}\rangle \quad |\Delta^{+}\rangle = |u^{\uparrow}u^{\uparrow}d^{\uparrow}\rangle \quad |\Delta^{0}\rangle = |u^{\uparrow}d^{\uparrow}d^{\uparrow}\rangle \quad |\Delta^{-}\rangle = |d^{\uparrow}d^{\uparrow}d^{\uparrow}\rangle$$

$$|\Sigma^{*+}\rangle = |u^{\uparrow}u^{\uparrow}s^{\uparrow}\rangle \quad |\Sigma^{*0}\rangle = |u^{\uparrow}d^{\uparrow}s^{\uparrow}\rangle \quad |\Sigma^{*-}\rangle = |d^{\uparrow}d^{\uparrow}s^{\uparrow}\rangle$$

$$|\Xi^{*0}\rangle = |u^{\uparrow}s^{\uparrow}s^{\uparrow}\rangle \quad |\Xi^{*-}\rangle = |d^{\uparrow}s^{\uparrow}s^{\uparrow}\rangle$$

$$|\Omega^{-}\rangle = |s^{\uparrow}s^{\uparrow}s^{\uparrow}\rangle$$

teniendo en cuenta que si el barión no tiene los tres quarks idénticos, entonces hay que simetrizar, por ejemplo:

$$|\Delta^{+}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left\{|u^{\uparrow}u^{\uparrow}d^{\uparrow}\rangle + |u^{\uparrow}d^{\uparrow}u^{\uparrow}\rangle + |d^{\uparrow}u^{\uparrow}u^{\uparrow}\rangle\right\}$$

De la misma manera, para escribir la estructura en quarks de uno de los bariones del octete habrá que superponer los estados simétricos $(\mathbf{8}_{\mathrm{M_S}}, \mathbf{2}_{\mathrm{M_S}}) + (\mathbf{8}_{\mathrm{M_A}}, \mathbf{2}_{\mathrm{M_A}})$. Ahora las funciones de onda se escribirán simbólicamente como una suma

$$\psi^{\mathbf{8}}_{\mathbf{q_1}\,\mathbf{q_2}\,\mathbf{q_3}} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\left\{ [\mathbf{8}_{\mathrm{M_S}}, \mathbf{2}_{\mathrm{M_S}}] + [\mathbf{8}_{\mathrm{M_A}}, \mathbf{2}_{\mathrm{M_A}}] \right\}$$

De nuevo, esquemáticamente, las funciones de onda de los nucleones pueden escribirse:

$$|p^{\uparrow}\rangle = |u^{\uparrow}u^{\uparrow}d^{\downarrow}\rangle \qquad\qquad |n^{\uparrow}\rangle = |u^{\downarrow}d^{\uparrow}d^{\uparrow}\rangle$$

Sea el caso del estado del protón con componente de espín $m_{\mathrm{J}} = +\frac{1}{2}$. Para que la función de ondas sea totalmente simétrica bajo el intercambio de cualquier par de quarks, se forma

$$\chi_p(J = \tfrac{1}{2}, m_{\mathrm{J}} = \tfrac{1}{2}) = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\left[p_{M_{\mathrm{S}}}\chi_{M_{\mathrm{S}}} + p_{M_{\mathrm{A}}}\chi_{M_{\mathrm{A}}} \right]$$

donde $p_{M_{\mathrm{S}}}, p_{M_{\mathrm{A}}}$ son funciones de onda de sabor, que tienen la misma forma que la de las funciones de espín $\chi_{M_{\mathrm{S}}}, \chi_{M_{\mathrm{A}}}$ vistas más arriba, simplemente haciendo el cambio $u \rightarrow \uparrow$ y $d \rightarrow \downarrow$, quedando:

$$\begin{aligned} |p^{\uparrow}\rangle = \quad & \sqrt{\tfrac{1}{2}}\Big\{ \sqrt{\tfrac{1}{2}}\left[(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)\uparrow\right] \sqrt{\tfrac{1}{2}}\left[(ud - du)u\right] \\ & + \sqrt{\tfrac{1}{6}}\left[(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow)\downarrow - 2\downarrow\downarrow\uparrow)\right] \sqrt{\tfrac{1}{6}}\left[(ud + du)d - 2ddu)\right] \Big\} \end{aligned}$$

Tras esto, se llega finalmente a la función de ondas del protón con tercera componente de espín $m_{\mathrm{J}} = +\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} |p^{\uparrow}\rangle = \frac{1}{\sqrt{18}}\Big\{ \quad & 2\Big(|u^{\uparrow}u^{\uparrow}d^{\downarrow}\rangle + |d^{\uparrow}u^{\uparrow}u^{\downarrow}\rangle + |u^{\uparrow}d^{\uparrow}u^{\downarrow}\rangle \Big) \\ & - \Big(|u^{\uparrow}u^{\downarrow}d^{\uparrow}\rangle + |d^{\uparrow}u^{\downarrow}u^{\uparrow}\rangle + |u^{\uparrow}d^{\downarrow}u^{\uparrow}\rangle \Big) \\ & - \Big(|u^{\downarrow}u^{\uparrow}d^{\uparrow}\rangle + |d^{\downarrow}u^{\uparrow}u^{\uparrow}\rangle + |u^{\downarrow}d^{\uparrow}u^{\uparrow}\rangle \Big) \Big\} \end{aligned} \tag{8.17}$$

Los otros miembros del octete tendrán las siguientes combinaciones de quarks:

$$\begin{aligned} & |\Sigma^{+\uparrow}\rangle = |u^{\uparrow}u^{\uparrow}s^{\downarrow}\rangle \\ & |\Sigma^{0\uparrow}\rangle = |u^{\uparrow}d^{\uparrow}s^{\downarrow}\rangle \qquad\qquad |\Lambda^{0\uparrow}\rangle = |u^{\uparrow}d^{\downarrow}s^{\uparrow}\rangle \\ & |\Sigma^{-\uparrow}\rangle = |d^{\uparrow}d^{\uparrow}s^{\downarrow}\rangle \end{aligned} \tag{8.18}$$

y por último, queda el doblete de bariones con dos quarks extraños:

$$|\Xi^{0\uparrow}\rangle = |u^{\downarrow}s^{\uparrow}s^{\uparrow}\rangle \qquad |\Xi^{-\uparrow}\rangle = |d^{\downarrow}s^{\uparrow}s^{\uparrow}\rangle \tag{8.19}$$

Obsérvese que el Σ^0 y el Λ^0 tienen los mismos quarks, pero el par $u-d$ se acopla de manera distinta; en el primero, forma un triplete de espín e isospín y, en el segundo, un singlete.

No se entendía que la función de ondas del Δ^{++} fuese totalmente simétrica. En efecto, según (8.14), el decuplete es simétrico en sabor y el Δ^{++} es simétrico en coordenadas espaciales, en espín y en isospín, separadamente, puesto que son tres quarks idénticos. De aquí surgió la idea de que los quarks poseen otra propiedad: el color. Existen tres colores posibles para un quark: r, v, a (estos no tienen nada que ver con los colores del espectro visible). Con ello, se pudo restablecer la conexión espín-estadística: los bariones, compuestos de fermiones idénticos, tienen que tener una función de ondas totalmente antisimétrica bajo el intercambio de cualquier par de quarks constituyentes.

Sea Ψ la función de ondas de un barión:

$$\Psi(q_1, q_2, q_3) = \phi_{\text{espacio}}(\vec{r_1}, \vec{r_2}, \vec{r_3})\chi_{\text{J}}(1,2,3)\xi_{\text{I}}(1,2,3)\psi_{\text{color}}(1,2,3) \qquad (8.20)$$

En la expresión anterior, χ_{J} es la función de ondas de espín y ξ_{I} la de isospín. Afortunadamente, la función de ondas $\psi_{\text{color}}(1,2,3)$ es un singlete (función antisimétrica), de la forma

$$\psi_{\text{color}}(1,2,3) = \frac{1}{\sqrt{6}}\Big\{|\mathbf{rva}\rangle + |\mathbf{var}\rangle + |\mathbf{arv}\rangle - |\mathbf{vra}\rangle - |\mathbf{avr}\rangle - |\mathbf{rav}\rangle\Big\} \qquad (8.21)$$

puesto que los hadrones son singletes de color. Así pues, la introducción del color como número cuántico de los quarks, restablece la antisimetría de las funciones de onda de los bariones.

De todas formas, el color es un número cuántico oculto, en el sentido que todas las partículas reales (hadrones) son singletes de color; es decir, no aparecen con ninguno de los números cuánticos de color de los quarks. Ello es debido a que los constituyentes cancelan el color: en los bariones porque los tres colores se compensan dando lugar al singlete de color visto en (8.21) y en los mesones, porque se trata de estados $q\overline{q}$, o sea:

$$\psi_{\text{color}}(1,\overline{2}) = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big\{|\mathbf{r\bar{r}}\rangle + |\mathbf{v\bar{v}}\rangle + |\mathbf{a\bar{a}}\rangle\Big\} \qquad (8.22)$$

Existen pruebas experimentales de que efectivamente los quarks tienen tres colores posibles (tres grados de libertad de color). Sea N_c el número de colores. Se demuestra que la probabilidad de desintegración del π^0 es

$$\Gamma(\pi^0 \to 2\gamma) = \left(\frac{N_c}{3}\right)^2 \frac{\alpha^2 m_\pi^3}{32\pi^3 f_\pi^2} = 7{,}73\left(\frac{N_c}{3}\right)^2 \text{eV}$$

con la constante de desintegración del pión $f_\pi = 130{,}7$ MeV conocida por las desintegraciones de $\pi^\pm$. La medida experimental $\Gamma_{exp} = 7{,}7 \pm 0{,}6$ MeV y de aquí se obtiene que $N_c = 2{,}99 \pm 0{,}12$, lo que es una gran evidencia independiente en favor del concepto de color. También aparece N_c en el valor de la sección eficaz de aniquilación $\sigma(e^+ + e^- \to q + \overline{q})$, verificada experimentalmente.

8.4.3 Multipletes de mesones

Los mesones están formados por un par $q\,\overline{q}$. Si se toman los de menor masa, corresponderán a estados ligados con momento angular orbital $\ell = 0$. Como la paridad $\mathcal{P} = (-1)^{\ell+1}$, tendrán $\mathcal{P} = -1$. Pero como se trata de dos fermiones podrán acoplarse con espín total S igual a 0 ó 1, luego se tendrán dos nonetes (véase la expresión (8.12)) con $J^{\mathcal{P}} = 0^-, 1^-$, respectivamente. Existe un octete que contiene todos los mesones pseudoescalares, o sea con $J^{\mathcal{P}} = 0^-$. Escalar porque así se transforman bajo las rotaciones y *pseudo* porque cambian de signo bajo la reflexión espacial.

Los mesones asociados al nonete de pseudoescalares son los siguientes:

- en el octete se encuentra un triplete de isospín (el pión), dos dobletes de isospín (los kaones) y el singlete $\eta(547)$, que tiene una anchura $\Gamma_\eta = 1{,}18$ keV.
- en el singlete de $SU(3)$ sólo existe un singlete de isospín, el $\eta'(958)$, con una anchura $\Gamma_{\eta'} = 8{,}43$ MeV.

Los modos dominantes de desintegración de los dos singletes de isospín citados son:

$\eta(547) \longrightarrow$	2γ	$(39\,\%)$	$\eta'(958) \longrightarrow$	$\pi^+\pi^-\eta$	$(44\,\%)$
	$3\pi^0$	$(32\,\%)$		$\rho^0\gamma$	$(30\,\%)$
	$\pi^+\pi^-\pi^0$	$(23\,\%)$		$\pi^0\pi^0\eta$	$(21\,\%)$
	$\pi^+\pi^-\gamma$	$(\,5\,\%)$		$\omega\gamma$	$(\,3\,\%)$
				$\gamma\gamma$	$(\,2\,\%)$

La simetría de la función de ondas de un mesón no viene determinada por el principio de Pauli ya que ahora se trata de un par $q\overline{q}$. Puede haber estados simétricos y antisimétricos. Por ejemplo, con sólo los quarks u, d y sus antiquarks, cuyos dobletes fundamentales son respectivamente[9]

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} -\overline{d} \\ \overline{u} \end{pmatrix} \tag{8.23}$$

se puede formar:

- un singlete de isospín

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|u\,\overline{u}> + |d\,\overline{d}>\Big) \tag{8.24}$$

- y un triplete de isospín (llamado también isotriplete), que se identifica con el pión, que es un mesón sin extrañeza

$$\left\{ \begin{array}{c} -|u\overline{d}> \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|u\,\overline{u}> - |d\,\overline{d}>\Big) \\ |\overline{u}d> \end{array} \right. \tag{8.25}$$

[9] Véase el estudio del isospín del sistema $N\overline{N}$, en el tema de simetrías.

Puede verificarse, por ejemplo, que el triplete es correcto, utilizando repetidamente el operador bajada de isospín $I_-|-u\overline{d}\rangle$.

Al añadir el quark s aparecen los dos dobletes de isospín de los kaones. Pero, además, aparecen dos estados mesónicos de carga 0, que son singletes. Utilizando la notación $\{n_3, |I, I_3\rangle\}$, en donde n_3 representa la dimensión del multiplete de $SU(3)$ e I el isospín, los nuevos singletes de isospín son:

- el singlete de $SU(3)$, que se denomina η_1 y que contiene todos los quarks con el mismo peso,

$$\eta_1 = \{\mathbf{1}, |0,0\rangle\} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|u\overline{u}> + |d\overline{d}> + |s\overline{s}\rangle\right) \tag{8.26}$$

- el isosinglete del octete de $SU(3)$, que se denomina η_8,

$$\eta_8 = \{\mathbf{8}, |0,0\rangle\} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(|u\overline{u}> + |d\overline{d}> - 2|s\overline{s}\rangle\right) \tag{8.27}$$

  y que es ortogonal a los otros dos estados con $I_3 = Y = 0$ (véase la figura 8.4).

Lo curioso es que los dos mesones, el del octete y el del singlete, tienen los mismos números cuánticos y, por lo tanto, cuánticamente, como pueden mezclarse, se mezclan. En efecto, la simetría $SU(3)$ de sabor no es exacta. La rotura de la simetría es la que produce la mezcla que se observa en los mesones. De hecho, existen dos mesones pseudoescalares con carga eléctrica $Q = 0$, que ya se han visto anteriormente, el $\eta(547)$ y el $\eta'(958)$, y aunque pareciese lógico asignar uno al estado η_8 y otro al η_1, se verá más adelante que los estados físicos (reales) η y η' son mezcla de los estados teóricos de $SU(3)$, η_1 y η_8 y se puede determinar experimentalmente el valor del ángulo de mezcla.

Los mesones conocidos se pueden asociar perfectamente a espectros de octetes. La tabla 8.3 resume los mesones más conocidos de menor masa. Los mesones pseudoescalares ($J^{\mathcal{P}} = 0^-$) (véase también la figura 8.4) y los mesones vectoriales ($J^{\mathcal{P}} = 1^-$) son estados singlete y triplete de espín del sistema $q\overline{q}$ con momento angular orbital relativo $L = 0$, mientras que el octete de los mesones tensoriales ($J^{\mathcal{P}} = 2^+$) corresponde a un estado ligado triplete de espín ($S = 1$) con $L = 1$.

La conjugación de carga es un buen número cuántico para los mesones neutros y vale $\mathcal{C} = (-1)^{L+S}$, o sea, $\mathcal{C} = +1$ para los mesones pseudoescalares y $\mathcal{C} = -1$, para los vectoriales, neutros.

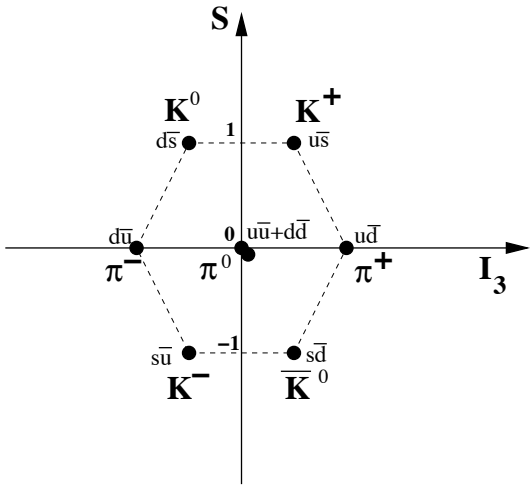


Figura 8.4: Octete de $SU(3)$ con los mesones pseudoescalares $J^{\mathcal{P}} = 0^-$. Hay dos estados A, B con $I_3 = S = 0$, cuyas configuraciones son: $A \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(u\,\overline{u} - d\,\overline{d})$ y $B \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{6}}(u\,\overline{u} + d\,\overline{d} - 2\,s\,\overline{s})$. Además existe el singlete $SU(3)$, C, cuya configuración es: $\frac{1}{\sqrt{3}}(u\,\overline{u} + d\,\overline{d} + s\,\overline{s})$.

TABLA 8.3: Los cuatro octetes de mesones de menor masa. Las masas de los mesones pseudoescalares son: $M_{\pi^\pm} = 139{,}6$, $M_{\pi^0} = 135{,}0$, $M_{K^\pm} = 493{,}7$, $M_{K^0} = 497{,}7$ y $M_\eta = 547{,}5$ MeV. Los ángulos de mezcla se refieren a la fórmula cuadrática de masas, por eso aparece el subíndice *cuad*. El primer singlete de isospín es el que es más octete. Se han encontrado hadrones pertenecientes a 15 octetes, aunque no todos están completamente llenos.

$^{2S+1}L_{\mathrm{J}}$	$J^{\mathcal{PC}}$	$I=0$	$I=1$	$I=\frac{1}{2}$	θ_{cuad}
$^1S_0$	0^{-+}	$\eta, \eta'(958)$	π	K	-10^o
$^3S_1$	1^{--}	$\phi(1020), \omega(782)$	$\rho(770)$	$K^*(892)$	39^o
$^3P_2$	2^{++}	$f_2'(1525), f_2(1270)$	$a_2(1320)$	$K_2^*(1430)$	28^o
$^3D_3$	3^{--}	$\phi_3(1850), \omega_3(1670)$	$\rho_3(1690)$	$K_3^*(1780)$	29^o

8.5 Masas y momentos magnéticos de los hadrones

8.5.1 Masas de bariones

La primera hipótesis realizada por Gell-Mann en relación con las masas de los hadrones es que el operador M tiene un comportamiento de la forma

$$M = M_0 + M_1 Y + M_2 \left[I(I+1) - \frac{Y^2}{4} \right] \tag{8.28}$$

proporcional al operador hipercarga. Es la conocida fórmula de Gell-Mann-Okubo.

A la vista de las masas de los hadrones de un mismo multiplete de $SU(3)$, queda claro que ésta no es una simetría exacta. Gell-Mann supuso que el hamiltoniano de la interacción fuerte se podría escribir como

$$H = H_0 + H'$$

siendo H_0 una interacción muy fuerte y simétrica bajo $SU(3)$, que conmuta con todos los generadores del grupo y H' es el responsable de la rotura de simetría. H' debería conmutar con Y e I_3, con lo que debería transformarse como el operador F_8, la hipercarga, definido en (8.10). Esta es la idea contenida en la fórmula de Gell-Mann-Okubo.

Para el decuplete de bariones, como cumplen $Y = 2(I-1)$, esta fórmula implica que $M = A + BY$; es decir, establece una relación lineal entre la masa y la hipercarga del barión. La observación experimental es que la relación se cumple para el decuplete y, además, permite concluir que las masas de los constituyentes cumplen:

$$m_u \sim m_d$$

y la diferencia entre el quark s y cualquiera de los otros dos vale,

$$m_s - m_{u,d} \sim 150 \text{ MeV/c}^2$$

El éxito del modelo se consolidó al predecir la existencia del barión con $S = -3$, llamado $\Omega^-(1672)$, que fue encontrado posteriormente.

Para el octete de bariones $J^{\mathcal{P}} = \frac{1}{2}^+$ la fórmula de Gell-Mann-Okubo conduce a la relación

$$3M_{\Lambda^0} + M_{\Sigma^0} = 2M_n + 2M_{\Xi^0} \tag{8.29}$$

que funciona razonablemente bien. Sin embargo, el origen de la fórmula de Gell-Mann-Okubo es toda una incógnita y la cuestión sigue aún abierta.

8.5.2 Masas de mesones

Puede observarse que en el caso de los mesones pseudoescalares, la diferencia de masas entre los dobletes de kaones y el triplete del pión es mucho

mayor que la que existe entre los distintos multipletes de isospín del octete de los bariones. La solución empírica al problema la dieron Gell-Mann y Okubo, proponiendo que esta vez la relación tenía lugar entre masas al cuadrado en vez de ser lineal con la masa (intuitivamente, la ecuación de Dirac para fermiones es lineal y la de Klein-Gordon para espín 0 es cuadrática).

Así, partiendo de

$$3M_{\eta^0} + M_{\pi^0} = 2M_{K^0} + 2M_{\bar{K}^0}$$

y como $M_{K^0} = M_{\bar{K}^0}$, la relación cuadrática es

$$3M^2_{\eta^0} + M^2_{\pi^0} = 4M^2_{\bar{K}^0} \tag{8.30}$$

que se cumple con una precisión del 7 %.

Mezcla de estados octete-singlete de $SU(3)$

Un hecho curioso es que, en principio, los estados octete y singlete de $SU(3)$ con $I = 0$ no tienen por qué ser estados propios del hamiltoniano. De hecho, la matriz de masas de los mesones pseudoescalares puede escribirse:

$$H \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1^2 & m_{18}^2 \\ m_{18}^2 & m_8^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_8 \end{pmatrix} \tag{8.31}$$

mientras que H es diagonal en los estados físicos η, η'.

Existe por lo tanto una mezcla, que se define como una rotación entre estados físicos y estados $SU(3)$:

$$\begin{pmatrix} \eta' \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_8 \end{pmatrix} \tag{8.32}$$

y lo mismo sucede con los estados equivalentes de los otros octetes: el vectorial, (ϕ, ω) y el tensorial, (f_2', f_2). Se tiene, en particular, para el octete 0^-:

$$m^2_{\eta'} = m_1^2 \cos^2\theta + m_8^2 \sin^2\theta + 2m_{18}^2 \sin\theta\cos\theta$$
$$m^2_{\eta} = m_8^2 \cos^2\theta + m_1^2 \sin^2\theta - 2m_{18}^2 \sin\theta\cos\theta$$

lo que junto con la condición de ortogonalidad

$$m^2_{\eta\eta'} = (m_8^2 - m_1^2)\sin\theta\cos\theta + m_{18}^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0$$

da lugar a:

$$tg^2\theta = \frac{m_8^2 - m_\eta^2}{m^2_{\eta'} - m_8^2} \tag{8.33}$$

Los resultados obtenidos, utilizando las masas experimentales del mesón η y del η' y sustituyendo para m_8 el valor obtenido mediante la fórmula de Gell-Mann-Okubo vista en (8.30)

$$m_8^2 = \frac{1}{3}(4M_K^2 - M_\pi^2)$$

dan para los ángulos de mezcla:

$$\theta_P = -10^o \qquad \theta_V = 39^o \qquad \theta_T = 28^o \tag{8.34}$$

que están en la tabla 8.3 en donde el signo menos implica que $m_8 < m_1$.

Una mezcla ideal se produce para $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, o sea $\theta \sim 35^o$, lo que implica que la estructura de los hadrones es muy limpia desde el punto de vista de los quarks constituyentes ya que entonces,[10]

$$m_1 \approx u\overline{u} + d\overline{d}$$
$$m_8 \approx s\overline{s}$$

lo que se cumple, aproximadamente, para los mesones 1^- y 2^+.

Este resultado tiene consecuencias dinámicas ya que la mezcla permite entender por qué $B(\phi \to K\bar{K}) \approx 84\,\%$ a pesar de que $B(\phi \to \pi^+\pi^-\pi^0) \approx 15\,\%$ tiene muchísimo más espacio fásico y debería ser más probable. La explicación de este resultado la da la regla de OZI, que se presenta más adelante.

8.5.3 Masas de hadrones de distintos multipletes

Otro de los éxitos del modelo de quarks está relacionado con la predicción de masas de hadrones de distintos multipletes. El mesón $K(494)$ tiene menor masa que el $K^*(892)$, a pesar de tener la misma estructura de quarks $u\overline{s}$. Lo mismo sucede si se compara la masa de los bariones $p(uud)$ y $\Delta^+(uud)$. La diferencia en ambos casos es el espín.

La idea es suponer que el origen de las masas es una interacción tipo hiperfina (interacción espín- espín). Recuérdese que en física atómica, la interacción hiperfina resulta de la interacción del espín del electrón con el espín del núcleo (de naturaleza electromagnética) y el hamiltoniano de interacción es de la forma $H'_{hf} = \frac{2}{3}\vec{\mu}_1 \cdot \vec{\mu}_2 |\psi(0)|^2$, o sea,

$$H'_{hf} = \frac{8\pi\alpha}{3}|\psi(0)|^2 \frac{\vec{s}_e \cdot \vec{s}_p}{m_e m_p} \tag{8.35}$$

siendo $\alpha = \frac{1}{137}$ la constante de estructura fina (constante de acoplamiento de la interacción electromagnética). Los cálculos de las correcciones de energía se realizan aplicando la teoría de perturbaciones independiente del tiempo, es decir

$$\Delta E_{hf} = \langle\psi|H'_{hf}|\psi\rangle$$

en donde ψ representa la función de ondas del átomo.

Ahora, los quarks tienen interacción fuerte. En QCD, la constante de acoplamiento fuerte es α_s y se demuestra que para mesones y bariones las constantes de acoplamiento vienen modificadas por los factores:

$$\begin{aligned} \text{mesón} \quad &\to \tfrac{4}{3}\alpha_s \quad (q\overline{q}) \\ \text{barión} \quad &\to \tfrac{2}{3}\alpha_s \quad (qq) \end{aligned} \tag{8.36}$$

[10] En efecto, véase la forma de η_1 y η_8 dadas en (8.26) y (8.27) y sustitúyanse en (8.32).

con lo que una interacción de tipo hiperfina tomaría las formas

$$H'_{hf}\big|_{meson} = \frac{32\pi\alpha_s}{9}|\psi(0)|^2\frac{\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2}{m_1m_2} \tag{8.37}$$

y

$$H'_{hf}\big|_{barion} = \frac{16\pi\alpha_s}{9}|\psi(0)|^2\sum_{i<j}\frac{\vec{s}_i\cdot\vec{s}_j}{m_im_j} \tag{8.38}$$

Con esto, si se escribe el hamiltoniano de los estados de los hadrones $H = H_0 + H'_{hf}$, el valor esperado de H en el estado fundamental dará las masas, pudiendo parametrizarse:

$$m(q_1\overline{q}_2) = m_1 + m_2 + a\frac{\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2}{m_1m_2} \tag{8.39}$$

para los mesones y

$$m(q_1q_2q_3) = m_1 + m_2 + m_3 + a'\sum_{i<j}\frac{\vec{s}_i\cdot\vec{s}_j}{m_im_j} \tag{8.40}$$

para los bariones. Se entiende que el último término de estas dos últimas expresiones debe calcularse utilizando estados de espín bien definido.

En el caso de los mesones se cumple que $\vec{J} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$, con lo que el producto $\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2 = -\frac{3}{4}, \frac{1}{4}$ para $J = 0, 1$ respectivamente. Las masas de los dos octetes de mesones se reproducen con extraordinaria corrección, utilizando las masas de los quarks que siguen,

$$\left.\begin{aligned} m_u = m_d = &\quad 310 \text{ MeV/c}^2 \\ m_s = &\quad 483 \text{ MeV/c}^2 \end{aligned}\right\} \tag{8.41}$$

y obteniéndose para la constante a:

$$a = \frac{(2m_u)^2}{\hbar^2}160 \text{ MeV/c}^2$$

En el caso de los bariones se cumple que $\vec{J} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$ con lo que $J^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + 2(\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2 + \vec{s}_1\cdot\vec{s}_3 + \vec{s}_2\cdot\vec{s}_3)$, por lo tanto

$$\sum_{i<j}\vec{s}_i\cdot\vec{s}_j = \frac{1}{2}\left[J(J+1) - \frac{9}{4}\right]$$

lo que es igual a $+\frac{3}{4}(-\frac{3}{4})$ en el caso del decuplete J=$\frac{3}{2}$ (en el del octete, J=$\frac{1}{2}$). Suponiendo $m_u = m_d$ se obtiene

$$m_N = 3m_u - \frac{3}{4}\frac{a'}{m_u^2}$$

El caso de los bariones compuestos por uds requiere una especial atención. En el octete, existe el $\Lambda^0(1116)$ que es un singlete de isospín y el $\Sigma^0(1193)$ que pertenece al triplete de isospín. En el caso del $\Lambda(uds)$, la simetría de los dos primeros quarks exige que tanto $I(ud) = 0$ como $S(ud) = 0$ (antisimétrica), mientras que en el $\Sigma(uds)$ se cumple que $I(ud) = 1$ y $S(ud) = 1$, por lo que como $J^2_{ud} = (s_u + s_d)^2 = s_u^2 + s_d^2 + 2s_u s_d$ permite encontrar que $\vec{s}_u \cdot \vec{s}_d = -\frac{3}{4}$ para el $\Lambda(uds)$ y $s_u s_d = \frac{1}{4}$ para el $\Sigma(uds)$.

Con todo lo anterior se obtiene

$$m_\Lambda = m_u + m_d + m_s + a' \left[\frac{\vec{s}_u \cdot \vec{s}_d}{m_u m_d} + \frac{\vec{s}_u \cdot \vec{s}_s}{m_u m_s} + \frac{\vec{s}_d \cdot \vec{s}_s}{m_d m_s} \right]$$

que da lugar a

$$m_\Lambda = 2m_u + m_s - \frac{3}{4} \frac{a'}{m_u^2}$$

puesto que

$$\vec{s}_u \cdot \vec{s}_s + \vec{s}_d \cdot \vec{s}_s = \sum_{i<j} \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j - \vec{s}_u \cdot \vec{s}_d$$

y de la misma manera

$$m_\Sigma = 2m_u + m_s + \frac{a'}{4} \left(\frac{1}{m_u^2} - \frac{4}{m_u m_s} \right)$$

$$m_\Xi = 2m_s + m_u + \frac{a'}{4} \left(\frac{1}{m_s^2} - \frac{4}{m_u m_s} \right)$$

En el decuplete, todos los quarks están alineados dos a dos, con lo que $\vec{s}_i \cdot \vec{s}_j = 1/4$ y se llega a los siguientes valores de los parámetros:

$$\left.\begin{array}{rl} m_u = m_d = & 363 \text{ MeV/c}^2 \\ m_s = & 538 \text{ MeV/c}^2 \end{array}\right\} \quad \frac{a'}{m_u^2} = 50 \text{ MeV/c}^2 \tag{8.42}$$

Con estos valores se obtiene un impresionante acuerdo con los datos de las masas de los bariones. La pequeña diferencia de unos 50 MeV/c^2 con respecto a las masas de quarks obtenidas para los mesones (véase (8.41)), tiene su origen en las diferentes energías de ligadura que entran en juego en sistemas a dos o tres quarks.

Hasta ahora se han estado estimando masas de quarks *constituyentes*. Se trata de masas efectivas. No deben confundirse con las masas de quarks que aparecen en el lagrangiano de QCD y que son masas de *corrientes* de quarks. Estos quarks están exentos de los efectos dinámicos que sufren los quarks constituyentes en los hadrones.

En el lagrangiano de la teoría QCD, aparecen las masas de los quarks, como masas de corrientes de quarks. Se obtiene en MeV:

$$\begin{array}{rcl} m_u & = & 5{,}6 \pm 1{,}1 \\ m_d & = & 9{,}9 \pm 1{,}1 \\ m_s & = & 199 \pm 33 \end{array}$$

Precisamente la simetría $SU(3)$ tiene su origen en el hecho de que $m_q << m_{hadrones}$; o sea si m_q es despreciable, la interacción fuerte es independiente de sabor. El origen de la rotura de la simetría $SU(3)_{sabor}$ está precisamente en el hecho de que la masa del quark extraño s es casi igual al parámetro del modelo estándar $\Lambda_{\text{QCD}} = 200$ MeV/c^2, que da la escala de masas características que intervienen en la interacción fuerte. Este parámetro es mucho mayor que las masas de los quarks ligeros u, d cuya similitud justifica la simetría de isospín.

8.5.4 Momentos magnéticos de hadrones

Los hadrones con espín $\vec{S} > 0$ (al igual que el electrón, los núcleos, etc.) tienen un momento dipolar magnético

$$\vec{\mu} = g_s \frac{\mu_{\text{N}}}{\hbar} \vec{S} \tag{8.43}$$

en donde g_s es el factor giromagnético y $\mu_{\text{N}} = \frac{e\hbar}{2m_p}$ es el magnetón nuclear.

El momento magnético que predice la teoría de Dirac, para partículas puntuales de espín 1/2, sin estructura, es

$$\mu_{\text{D}} = \frac{e\hbar}{2M} \tag{8.44}$$

o sea, que el factor giromagnético vale $g_s = +2$, y así se ha confirmado en el caso del e^- y del μ^-. De hecho, la gran precisión alcanzada en los experimentos de medida del momento magnético del e^- y del μ^- han permitido encontrar

$$\mu_e = 1{,}001159652187 \pm 0{,}000000000004\, \mu_B$$

y

$$\mu_\mu = 1{,}0011659160 \pm 0{,}0000000006\, \mu_D$$

En el caso del e^- la unidad es el magnetón de Bohr y en el caso del μ^-, siguiendo la fórmula (8.44), pero con $M = m_\mu$. El factor giromagnético de estos leptones fundamentales difiere del valor esperado por la teoría de Dirac ($g_s = 2$) en algo más del uno por mil. Pero esto está bien entendido y se debe a fenómenos previstos en la teoría QED. Por ello se denomina el momento magnético *anómalo* del electrón y del muón.

Si el protón no tuviese estructura y fuese una partícula elemental, se tendría el mismo valor que antes pero con $M = m_p$, o sea $\mu_p = \mu_N$, el magnetón nuclear; sin embargo, el resultado experimental es $\mu_p = +2{,}79\ \mu_N$. De igual manera, se encuentra que el momento magnético del neutrón vale $\mu_n = -1{,}91\ \mu_N$.

Momentos magnéticos en el modelo de quarks

Al igual que en el caso de las masas, la comparación de los momentos dipolares magnéticos de los bariones con los resultados experimentales dan resultados muy satisfactorios.

Considérese el estado fundamental del protón. El momento dipolar se calculará como suma de los momentos dipolares magnéticos de los tres constituyentes del protón,

$$\vec{\mu}_p = \vec{\mu}_u + \vec{\mu}_u + \vec{\mu}_d$$

entendiéndose que hay que calcular el valor esperado del momento magnético:

$$\mu_p = \langle \vec{\mu}_p \rangle = \langle \psi_p | \vec{\mu}_p | \psi_p \rangle$$

y donde la función $\psi_p = |p^{\uparrow}\rangle$ es la obtenida en el octete totalmente simétrico de $SU(3)$, con el protón en el estado de proyección de espín máxima $m_J = +\frac{1}{2}$. La función de ondas ya se ha visto en la ecuación (8.17); aquí se simplificará teniendo en cuenta que sólo interesa la función de espín:

$$\chi_p = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\, \chi_{uu}(1,1)\, \chi_d(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}) - \sqrt{\tfrac{1}{3}}\, \chi_{uu}(1,0)\, \chi_d(\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2})$$

Como los momentos magnéticos de los quarks son $\mu_i = z_i \frac{e\hbar}{2m_i}$, con z_i el número de carga $(1/3, -2/3)$ del quark i, es fácil llegar al valor

$$\mu_p = \tfrac{2}{3}(\mu_u + \mu_u - \mu_d) + \tfrac{1}{3}\mu_d$$

De la misma manera se pueden obtener los de los otros bariones del octete $\frac{1}{2}^+$.

$$\begin{aligned} \mu_p &= \tfrac{1}{3}(4\mu_u - \mu_d) \\ \mu_n &= \tfrac{1}{3}(4\mu_d - \mu_u) \\ \mu_{\Sigma^+} &= \tfrac{1}{3}(4\mu_u - \mu_s) \end{aligned} \tag{8.45}$$

Para el Λ^0 es distinto puesto que el par u, d se acopla con espín $S_{ud} = 0$ y por lo tanto no contribuye al momento magnético, obteniéndose

$$\mu_{\Lambda^0} = \mu_s \tag{8.46}$$

Si se supone que $m_u = m_d$, entonces, de los valores dados en (8.45) se obtiene la relación

$$\frac{\mu_n}{\mu_p} = -\frac{2}{3}$$

que está de acuerdo con el valor experimental, $-0{,}685$.

Para calcular valores absolutos de momentos magnéticos, deben conocerse las masas de los quarks. Puede hacerse al revés, a partir de las medidas de los momentos de los bariones n, p y Λ^0 obtener las masas de los quarks. Utilizando este procedimiento, se obtiene m_u= 336 MeV, valor intermedio entre las masas constituyentes obtenidas a partir de las masas de bariones y mesones.

Los éxitos del modelo son grandes (véase la tabla 8.4) habida cuenta de su sencillez, puesto que únicamente se ha tenido en cuenta la suma de los momentos magnéticos de los quarks de valencia.

TABLA 8.4: Comparación entre los momentos magnéticos experimentales de los bariones estables (bajo la interacción fuerte) y las predicciones del modelo de quarks constituyentes.

	μ/μ_N (experimento)		Modelo quarks	μ/μ_N
p	$+2,792847351$	$\pm$0,000 000 028	$(4\mu_u - \mu_d)/3$	–
n	$-1,9130427$	$\pm$0,000 000 5	$(4\mu_d - \mu_u)/3$	–
Λ^0	$-0,613$	$\pm$0,004	μ_s	–
Σ^+	+2,458	$\pm$0,010	$(4\mu_u - \mu_s)/3$	$+2,67$
Σ^0	–	–	$(2\mu_u + 2\mu_d - \mu_s)/3$	$+0,79$
Σ^-	$-1,160$	$\pm 0,025$	$(4\mu_d - \mu_s)/3$	$-1,09$
Ξ^0	$-1,250$	$\pm 0,014$	$(4\mu_s - \mu_u)/3$	$-1,43$
Ξ^-	$-0,6507$	$\pm 0,0025$	$(4\mu_s - \mu_d)/3$	$-0,49$
Ω^-	$-2,02$	$\pm 0,05$	$3\mu_s$	$-1,84$

8.6 Espectroscopía de mesones pesados

En noviembre de 1974, simultáneamente en SLAC[11] y en Brookhaven[12] (EEUU), se descubre el mesón $J/\psi(3097)$ que poco después se identifica como un estado ligado $c\overline{c}$ de un nuevo quark, el quark *charm* (encanto).[13] Se trata de un mesón con una anchura $\Gamma_{\text{tot}} = 87$ keV pequeñísima para el elevado valor de su masa. También se pone en evidencia el mesón $\psi'(3685)$, que es un mesón vectorial con vida media larga para su elevada masa; su anchura total es $\Gamma_{\text{tot}} = 277 \pm 31$ keV.

Estos mesones, $J/\psi(3097)$ y $\psi'(3685)$ son bosones vectoriales $J^{\mathcal{PC}} = 1^{--}$ con $G = -1$ e $I = 0$. El método más apropiado para producirlos es en experimentos de aniquilación en colisionadores e^+e^-, ya que tienen los mismos números cuánticos que el fotón. El mecanismo de producción es esquemáticamente el de la figura 8.5.

[11] J. E. Augustin *et al., Phys. Rev. Lett.,* **33** (1974) 1406.

[12] J. J. Aubert *et al., Phys. Rev. Lett.,* **33** (1974) 1404.

[13] Las consecuencias físicas del descubrimiento del quark c fueron de un alcance tal que este descubrimiento fue calificado de *revolución de noviembre*.

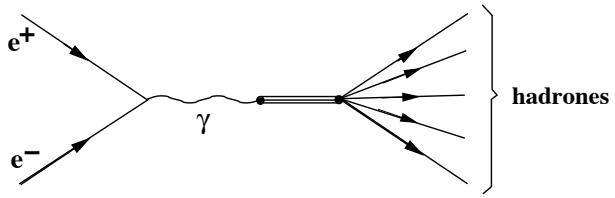


Figura 8.5: Esquema del mecanismo de producción de los mesones vectoriales y su posterior desintegración en hadrones.

La medida del cociente

$$\mathcal{R} = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{ hadrones})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} \tag{8.47}$$

puede verse en la figura 8.6. En la expresión anterior, la sección eficaz

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi}{3}\frac{\alpha^2}{s}(\hbar c)^2 \tag{8.48}$$

es la que se obtiene al tener en cuenta la interacción electromagnética. Los picos en la curva de $\mathcal{R}$, informan claramente de la existencia de los bosones vectoriales. Aparecen dos picos muy estrechos en las energías del $J/\psi(3097)$ y $\psi'(3685)$ seguidos de otros picos anchos y más bajos que corresponden al umbral (> 3730 MeV) de producción de mesones con encanto.

La producción del mesón $J/\psi(3097)$, igual que otras resonancias sigue la conocida ley de Breit-Wigner:

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow J/\psi \rightarrow e^+e^-) = \frac{(2J+1)}{(2s_1+1)(2s_2+1)}\frac{4\pi\lambda\!\!\!^{-2}\Gamma^2_{e^+e^-}/4}{\left[(E-M_{\rm R})^2+\Gamma^2/4\right]}$$

donde $\lambda\!\!\!^{-} = \hbar/p$, y p el momento del e^- en el centro de masas de la colisión, $\Gamma_{e^+e^-}$ la anchura parcial de desintegración en el canal e^+e^-, Γ la anchura total, M_R el valor central de la masa del J/ψ y $(2J+1) = 3$ es la multiplicidad de espín del J/ψ, como corresponde a un mesón vectorial. Los valores $s_1 = s_2 = \frac{1}{2}$ representan el espín del e^+ y e^-. Si se calcula la integral de la sección eficaz (con el cambio $\tan\theta = 2(E-M_R)/\Gamma$) se obtiene

$$\int_0^\infty \sigma(E)dE = \frac{3\pi^2}{2}\lambda\!\!\!^{-2}\left(\frac{\Gamma_{e^+e^-}}{\Gamma}\right)^2\Gamma \tag{8.49}$$

su medida permite determinar la anchura total $\Gamma = 87$ keV, extraordinariamente pequeña, a pesar de realizar medidas con una resolución mucho peor (la resolución energética de los haces $\sigma_{\rm E} << \Gamma$). Puede comprobarse lo dicho en la figura

8.7, donde se aprecian claramente las anchuras de la resonancia en distintos canales. El J/ψ no puede desintegrarse en $\tau^+ + \tau^-$ por falta de energía, ya que $2m_\tau > m_{J/\psi}$.

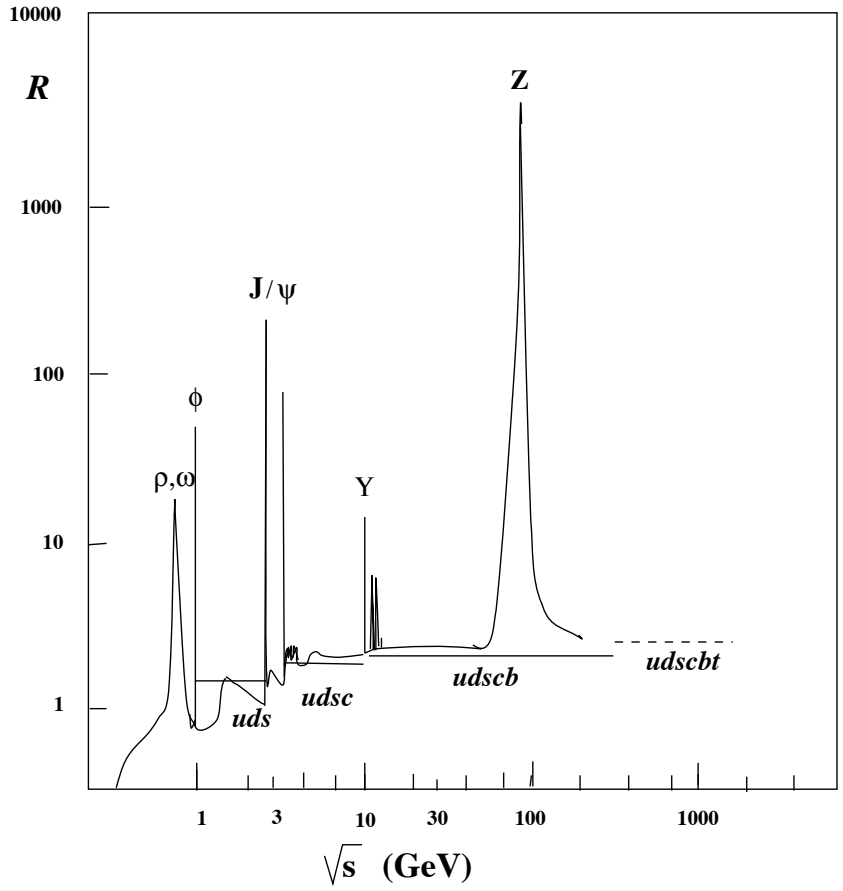


Figura 8.6: Resultados de la medida del cociente $\mathcal{R}$ entre la sección eficaz $e^+e^- \to$ hadrones y $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$.

El mesón $J/\psi(3097)$ y sus excitaciones no pueden por lo tanto ser entendidos como mesones compuestos por quarks ligeros, u, d, s. En este hecho se fundamenta que durante los días del descubrimiento del $J/\psi(3097)$ se acuñase el ya legendario calificativo de *revolución de noviembre*. Las masas y anchuras de los tres primeros estados detectados de la familia del J/ψ pueden verse en la tabla 8.5.

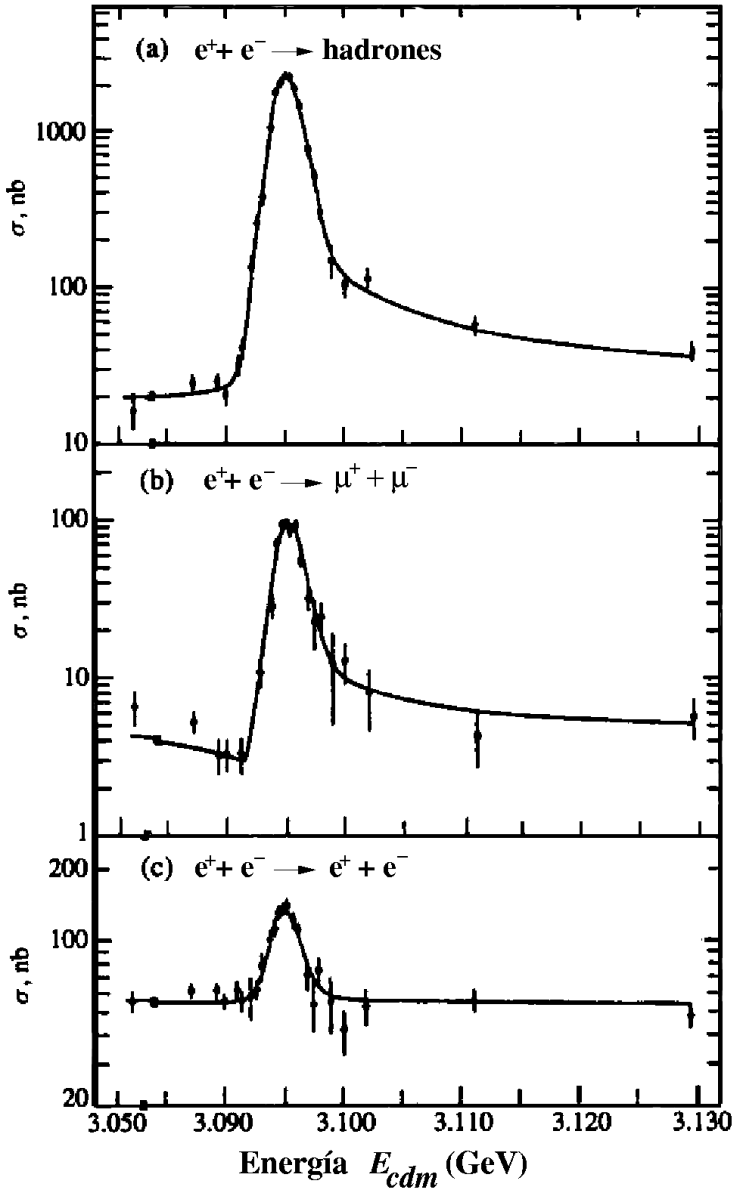


Figura 8.7: Resultados del experimento original que observó la producción del mesón J/ψ en el colisionador SPEAR de SLAC y su desintegración en los tres canales siguientes: **(a)** $e^+e^- \to$ hadrones; **(b)** $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ y **(c)** $e^+e^- \to e^+e^-$ (tomados de A. M. Boyarski *et al*., *Phys. Rev. Lett*., **34** (1975) 1357).

Se observa que los dos primeros tienen anchuras muy pequeñas (vidas medias muy largas). El tercero ya tiene una anchura típica de los mesones que se desintegran por interacción fuerte. A partir de las desintegraciones del $\psi(3770)$ y los de mayor masa, se descubren una serie de hadrones (mesones) con encanto, el $D^0(1864)$ y el $D^{\pm}(1869)$, que tienen masa $m_D > \frac{1}{2} m_{J/\psi}$, por lo que, como no puede tener lugar la desintegración del $J/\psi(3097) \nrightarrow D\overline{D}$, es por lo que el $J/\psi(3097)$ tiene una vida media tan larga, o lo que es lo mismo: una anchura de desintegración Γ tan pequeña ($\Gamma_{\text{tot}}(J/\psi(3097)) = 87$ keV).

TABLA 8.5: Los tres primeros estados del charmonio detectados en colisionadores e^+e^-.

Mesón	M(MeV)	$\Gamma_e = \Gamma_\mu$ (keV)	Γ_h (keV)	Γ_{tot} (keV)
$J/\psi(1S)$	3096,9	$5{,}40 \pm 0{,}17$	63 ± 3	$91{,}0 \pm 3{,}2$
$\psi(2S)$	3686,1	$2{,}12 \pm 0{,}12$	269 ± 16	281 ± 17
$\psi(3770)$	3770,0	$0{,}26 \pm 0{,}04$	$23{,}6 \pm 2{,}7$ MeV	$23{,}6 \pm 2{,}7$ MeV

Ya se ha visto con anterioridad que el mesón $\phi(1020)$ tiene una estructura en quarks $s\overline{s}$. Se trata de un mesón con una anchura $\Gamma_{\text{tot}} = 4{,}26 \pm 0{,}05$ MeV. Es anormalmente pequeña para su masa, pero es mucho mayor que la del J/ψ. Ello se entiende porque la masa del $\phi(1020)$ es algo mayor que el umbral $K\overline{K}$, pero con un espacio fásico muy pequeño; por ello es un mesón con una anchura muy estrecha. El cociente de desintegración:

$$\frac{\Gamma(\phi \to 3\pi)}{\Gamma(\phi \to K\overline{K})} \approx 0{,}18 \tag{8.50}$$

a pesar de ser más favorable la desintegración $\phi \to 3\pi$, por espacio fásico. La explicación hay que obtenerla a través de la regla de OZI (Okubo, Zweig, Iizuka), que favorece las desintegraciones en las que los quarks del estado inicial y final están conectados. En la figura 8.8 puede observarse la desintegración del mesón $\phi(1020)$. Se entiende la relación vista en (8.50), puesto que el diagrama con líneas de quarks no conectadas entre el ϕ y el estado final a tres piones, está suprimido frente al otro, porque es necesario un triple intercambio de gluón (la amplitud será de orden $\sim \alpha_s^3$). Son necesarios 3 gluones porque para conectar dos singletes de color (estado inicial y final desconectados) son necesarios ≥ 2 gluones. Pero como se trata de un mesón vectorial, con conjugación de carga $\mathcal{C} = -1$, hace falta un número impar de gluones.

Como consecuencia de las desintegraciones de los estados excitados del $J/\psi(3097)$, por ejemplo del $\psi(3770)$ y de los de mayor masa, se encuentran una serie de mesones con encanto. Ya se conocen muy bien los de menor masa,

que se clasifican en mesones pseudoescalares y vectoriales:

desintegración	$J^{\mathcal{P}}=0^-$	$J^{\mathcal{P}}=1^-$
$c\overline{c} \longrightarrow c\overline{u}+\overline{c}u$	$(D^0+\bar{D}^0)(1864)$	$(D^{\star 0}+\bar{D}^{\star 0})(2007)$
$\longrightarrow c\overline{d}+\overline{c}d$	$(D^+ + D^-)(1869)$	$(D^{\star +}+D^{\star -})(2010)$
$\longrightarrow c\overline{s}+\overline{c}s$	$(D_s^+ + D_s^-)(1968)$	$(D_s^{\star +}+D_s^{\star -})(2112)$

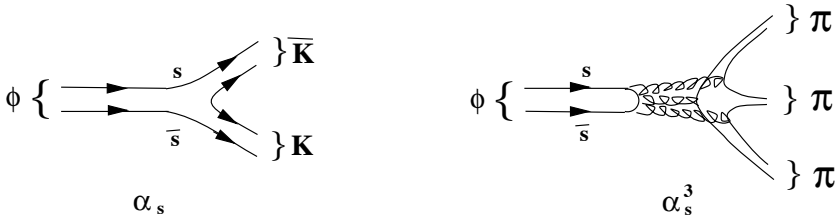


Figura 8.8: Explicación de la regla de OZI (Okubo, Zweig, Iizuka), aplicable a las desintegraciones del mesón $\phi(1020)$.

Las desintegraciones radiativas de los bosones vectoriales $J/\psi(3097)$ y $\psi'(3685)$ han permitido establecer la existencia de una serie de estados, pertenecientes a la familia del charmonio $c\overline{c}$, que no tienen los números cuánticos del fotón pero que tienen los números cuánticos esperados para un sistema ligado $c\overline{c}$ (muy similar a los estados del positronio). Este espectro del charmonio ha sido determinante a la hora de obtener un potencial que represente las fuerzas entre quarks (potencial de QCD).

Poco tiempo después, en 1977, se descubre en Fermilab (Chicago) el mesón $\Upsilon(9460)$, que también se identifica como un estado ligado $(b\overline{b})$ de un nuevo quark, el quark *beauty* (belleza), cuya masa es también inferior al doble de la masa del mesón con belleza más ligero, el $B^{\pm}(5279)$ o el $B^0(5279)$, con lo que también es un estado con una anchura de desintegración pequeña.

Con el Υ aparecen varios estados que se encuentran por debajo del umbral de desintegración en $B\overline{B}$, y se conocen como $\Upsilon(nS)$ tal como aparecen en la siguiente tabla:

	$\Upsilon(1S)$	$\Upsilon(2S)$	$\Upsilon(3S)$	$\Upsilon(4S)$
$M\,(\mathrm{MeV})=$	9460	10023	10355	10580
$\Gamma_{\mathrm{tot}}(\mathrm{keV})=$	$53,0\pm 1,5$	43 ± 6	$26,3\pm 3,4$	$(20\pm 4\ \mathrm{MeV})$

De nuevo, las excitaciones del mesón Υ con masa mayor que 10580 MeV, se desintegran dando pares de mesones con belleza. Ya están confirmados los

miembros del multiplete de mesones con belleza más ligeros:

desintegración		$J^{\mathcal{P}} = 0^-$
$b\overline{b}$	$\longrightarrow b\overline{u} + \overline{b}u$	$(B^+ + B^-)(5279)$
	$\longrightarrow b\overline{d} + \overline{b}d$	$(\bar{B}^0 + B^0)(5279)$
	$\longrightarrow b\overline{s} + \overline{b}s$	$(\bar{B}_s^0 + B_s^0)(5369)$

(8.51)

habiéndose establecido, de momento, solamente un mesón vectorial con belleza, $B^\star(5324)$.

Las masas de los dos mesones vectoriales $J/\psi(c\,\overline{c})$ y $\Upsilon(b\,\overline{b})$, permiten estimar la masa de los quarks constituyentes respectivos:

$$\begin{array}{l} m_c \approx \ 1{,}5 \text{ GeV/c}^2 \\ m_b \approx \ 5{,}0 \text{ GeV/c}^2 \end{array}$$

El espectro energético de los mesones vectoriales que se muestra en la figura 8.9 ayuda a entender por qué las anchuras de desintegración de los mesones ϕ, $\psi(2S)$ y $\Upsilon(4S)$ son tan pequeñas; están relativamente muy cerca de los umbrales de producción de hadrones con extrañeza, encanto y belleza, respectivamente. El espacio fásico disponible es pequeño. Obsérvese también que los mesones más ligeros con encanto y belleza, están debajo del umbral y por ello no pueden desintegrarse en hadrones que tengan encanto y belleza. Esto no sucede en el caso del mesón ϕ.

8.6.1 Desintegraciones leptónicas de los mesones vectoriales

Una consecuencia directa de las anchuras leptónicas de los mesones vectoriales, como puede verse en la figura 8.10, en donde se observa el acoplamiento al estado final e^+e^-, es que son directamente proporcionales a la carga de los quarks Q_i. En efecto, la expresión de la anchura leptónica (fórmula de Van Royen-Weisskopf) es:

$$\boxed{\Gamma_{V \to e^+e^-} = \frac{16\pi\alpha^2 Q^2}{m_V^2}|\Psi(0)|^2} \qquad (8.52)$$

en donde $Q^2 = \left|\sum_i a_i Q_i\right|^2$, es la suma ponderada de los cuadrados de las cargas de los quarks constituyentes, siendo a_i las amplitudes de las funciones de onda; por ejemplo, para los mesones vectoriales ligeros, las vistas en (8.24) y (8.25), y

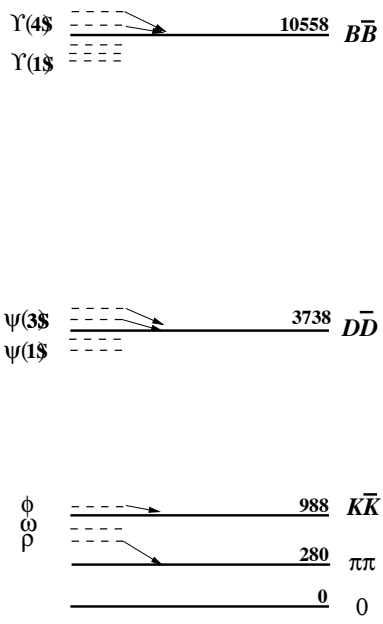


Figura 8.9: Umbrales energéticos (en MeV) de los mesones vectoriales y de la producción asociada de los hadrones de menor masa formados por quarks s, c, b.

para los pesados la estructura que se acaba de ver, se tiene que las cargas valen:

$$\rho^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\,\overline{u} - d\,\overline{d}) \implies Q^2_{\rho^0} = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right\}\right|^2 = \frac{1}{2}$$

$$\omega^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\,\overline{u} + d\,\overline{d}) \implies Q^2_{\omega^0} = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right\}\right|^2 = \frac{1}{18}$$

$$\phi^0 = s\,\overline{s} \implies Q^2_{\phi^0} = \left|\frac{1}{3}\right|^2 = \frac{1}{9}$$

$$J/\psi = c\,\overline{c} \implies Q^2_{J/\psi} = \left|\frac{2}{3}\right|^2 = \frac{4}{9}$$

$$\Upsilon(1S) = b\,\overline{b} \implies Q^2_{\Upsilon(1S)} = \left|\frac{1}{3}\right|^2 = \frac{1}{9}$$

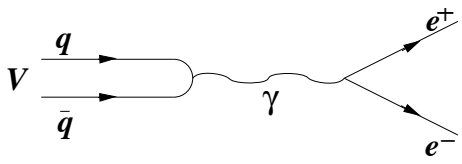


Figura 8.10: Diagrama de la desintegración leptónica $V \rightarrow e^+e^-$ de un mesón vectorial V.

La fórmula de la amplitud de desintegración en e^+e^- para los mesones vectoriales (8.52) se puede comprobar con la serie ρ, ω, ϕ dada anteriormente así como con los mesones J/ψ y Υ, que son estados puros $c\,\overline{c}$ y $b\,\overline{b}$. Con todos ellos se obtiene la siguiente relación entre anchuras leptónicas:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \Gamma(\rho^0) & \div & \Gamma(\omega^0) & \div & \Gamma(\phi^0) & \div & \Gamma_{J/\psi} & \div & \Gamma_\Upsilon \\ 9 & \div & 1 & \div & 2 & \div & 8 & \div & 2 \end{array}$$

Las medidas experimentales de las anchuras de los mesones vectoriales estudiados se pueden observar en la tabla 8.6, con lo que las relaciones entre ellas (tomando Γ_ω como unidad) es la siguiente:

$$\begin{array}{ccccccccc} \Gamma_\rho & \div & \Gamma_\omega & \div & \Gamma_\phi & \div & \Gamma_{J/\psi} & \div & \Gamma_\Upsilon \\ 11,7 \pm 0,4 & \div & 1 \pm 0,05 & \div & 2,11 \pm 0,07 & \div & 9,0 \pm 0,4 & \div & 2,2 \pm 0,09 \end{array}$$

lo que es una valiosa comprobación del modelo de quarks constituyentes.

TABLA 8.6: Anchuras de desintegración de los mesones vectoriales.

Mesón	Masa (MeV)	$\Gamma_e = \Gamma_\mu$(keV)	Γ_{tot}	
ρ	$775,8$	$7,02 \pm 0,11$	$150,3 \pm 1,6$	MeV
ω	$782,59$	$0,60 \pm 0,02$	$8,49 \pm 0,08$	MeV
ϕ	$1019,46$	$1,27 \pm 0,05$	$4,26 \pm 0,05$	MeV
$J/\psi(1S)$	$3096,9$	$5{,}40 \pm 0{,}17$	$91{,}0 \pm 3{,}2$	keV
$\Upsilon(1S)$	$9460,30$	$1,31 \pm 0,03$	$53,0 \pm 1,5$	keV

Se observa en particular que $\Gamma_{e^+e^-}/Q^2$ es casi constante. Lo que implica que:

1. Las cargas de los quarks *charm* y *beauty* son $Q_c = \frac{2}{3}e$ y $Q_b = -\frac{1}{3}e$
2. La probabilidad $|\Psi(0)|^2 \sim m_V^2$

En conclusión: por una parte se observa que el espectro de mesones pesados es compatible con la asignación de cargas fraccionarias a los quarks; por otra parte, la dependencia $|\Psi(0)|^2 \sim m_V^2$ permite determinar la forma del potencial de ligadura entre quarks, como se verá más adelante.

8.6.2 El cuarto y quinto quark: simetrías $SU(4)$ y $SU(5)$

La aparición del cuarto quark (el encanto, c), con un número cuántico que se conserva en las interacciones fuertes, obliga a introducir una nueva dimensión al grupo $SU(3)$, dando lugar a la simetría $SU(4)$ de sabor. Los multipletes ahora se obtendrán introduciendo el nuevo eje C, con lo que los mesones pseudoescalares y vectoriales se representarán según el esquema de la figura 8.11 (a) y (b). El $\eta_c(2980)$ es el mesón pseudoescalar y el $J/\psi(3097)$ el vectorial; ambos singletes de isospín. Los otros estados se clasifican en un triplete de mesones con encanto y otro triplete con los antimesones correspondientes. El multiplete de mesones con los quarks u, d, s, c tiene una multiplicidad de 16.

Todos los mesones que aparecen en estas figuras han sido descubiertos y tienen los números cuánticos esperados.

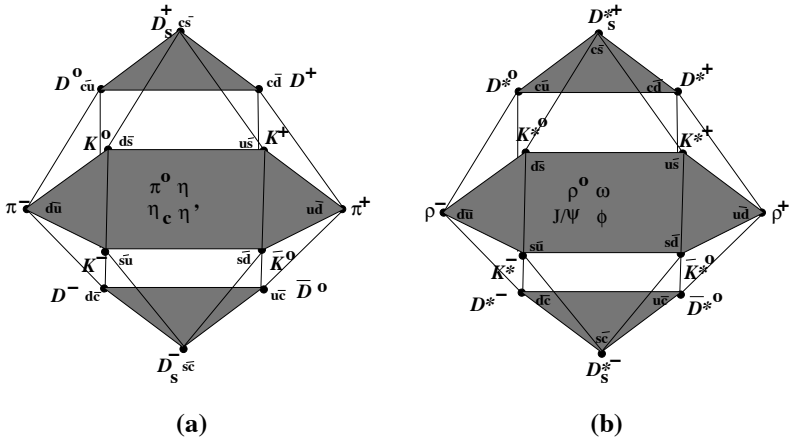
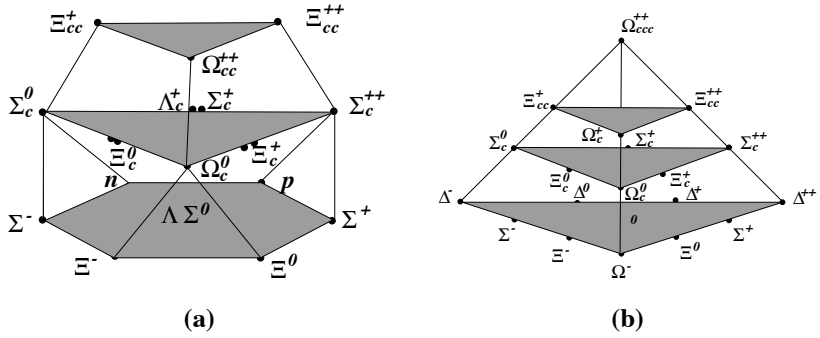


Figura 8.11: **(a)** Multiplete de mesones pseudoescalares en $SU(4)$, una vez introducido el quark c. **(b)** Multiplete de mesones vectoriales en $SU(4)$.

Para obtener los multipletes de bariones, la composición de representaciones en $SU(4)$ es ahora:

$$\mathbf{4} \otimes \mathbf{4} \otimes \mathbf{4} = \mathbf{20}_{\mathrm{S}} \oplus \mathbf{20}_{\mathrm{M_S}} \oplus \mathbf{20}_{\mathrm{M_A}} \oplus \overline{\mathbf{4}}_{\mathrm{A}} \tag{8.53}$$

y se estructuran según la figura 8.12, en la que se observan los dos 20-pletes, uno con el octete y otro con el decuplete de $SU(3)$.



(a) **(b)**

Figura 8.12: Multipletes de bariones con quarks u, d, s y c en $SU(4)$. **(a)** 20-plete de bariones que contiene el octete de $SU(3)$. **(b)** 20-plete de bariones con el decuplete de $SU(3)$.

Todos los mesones y bariones encantados descritos en los anteriores multipletes han sido encontrados.

El quinto quark (con belleza, b), introduce un nuevo número cuántico que se conserva en las interacciones fuertes y con ello otra dimensión al grupo $SU(4)$, dando lugar a la simetría $SU(5)$ de sabor.

8.7 Los *Quarkonia* y el potencial de QCD

Otro de los éxitos del modelo de quarks constituyentes se deriva del estudio de los sistemas ligados conocidos por el nombre de *quarkonia*, es decir, sistemas ligados $q\,\overline{q}$ similares al positronio, el estado ligado e^+e^-.

8.7.1 El positronio y su desintegración

El positronio (véase la figura 8.13**(a)**) es un sistema (e^+e^-) ligado por un potencial culombiano $V(r) \sim -\frac{\alpha}{r}$, con números cuánticos bien conocidos: $J = L + S$, $\mathcal{P} = (-1)^{L+1}$ y $\mathcal{C} = (-1)^{L+S}$. Al igual que en el átomo de hidrógeno, los estados ligados del sistema se obtienen resolviendo la ecuación de Schrödinger

$$H\Psi(\vec{r}) = E\Psi(\vec{r}) \qquad \text{con} \qquad H = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{\alpha\hbar c}{r}\right)$$

Los niveles energéticos son $E_n = -\frac{\alpha^2 mc^2}{2n^2}$, con m la masa reducida, lo que en el caso del átomo de H es $m \approx m_e$, pero en el positronio $m = m_e/2$. La

energía de estos niveles queda determinada por el número cuántico n, llamado número cuántico radial (o principal). Por eso se denominan excitaciones radiales del positronio.

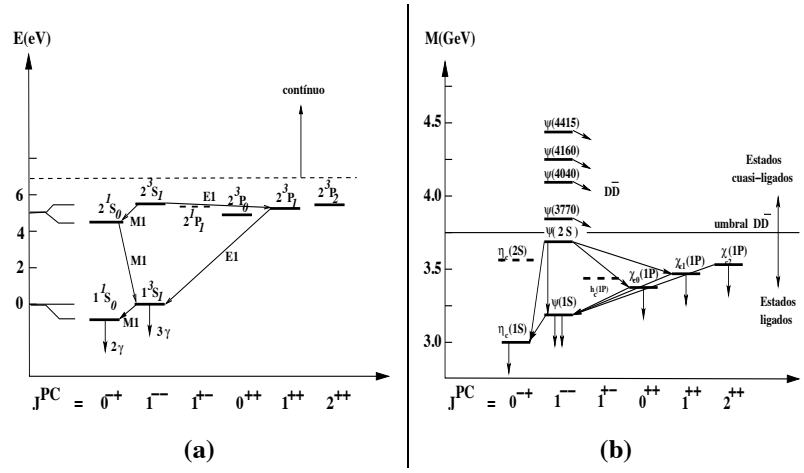


Figura 8.13: **(a)** Niveles de energía del positronio, en donde se observa el desdoblamiento de estructura fina e hiperfina de los niveles $n = 1$ y $n = 2$ aumentados por un factor 10^3 y 10^4 respectivamente. **(b)** Masas del sistema charmonio. Los estados en trazos todavía no son seguros. Los singletes son $\eta_c(2980)$ y h_c y los tripletes son ψ y χ_{ci}. Exceptuando la escala energética, la similitud entre el positronio y el charmonio es extraordinaria.

El radio de Bohr $r_0 = \frac{\hbar}{m\alpha c}$, es por lo tanto dos veces mayor en el positronio que en el hidrógeno, para el que vale $r_0 = 0,53$ Å.

La conocida estructura fina en el átomo de hidrógeno es debida a la interacción espín-órbita ($\vec{s}_e \cdot \vec{\ell}$) y produce correcciones a los niveles energéticos de orden α^2. Da lugar a estados con momento angular orbital L diferentes (identificados como onda $S, P, \ldots$); la estructura hiperfina es debida a la interacción espín-espín ($\vec{s}_e \cdot \vec{s}_p$). Esta última desdobla los estados en singletes ($^1S_0$) y tripletes de espín[14] ($^3S_1$) y las correcciones a los niveles energéticos son aún más pequeñas, del orden de $\alpha^2 \mu_p / \mu_e$.

El positronio no es estable y se desintegra por aniquilación. El estado de menor energía es el pseudoescalar $^1S_0$, estado singlete de espín y con momento angular $\ell = 0$. Es estado propio de la conjugación de carga $\mathcal{C} = (-1)^{\ell+S} = +1$, por lo que se desintegra dando 2 fotones. La probabilidad de desintegración es:

$$\Gamma(1^1S_0 \longrightarrow 2\gamma) = \frac{4\pi\alpha^2\hbar^3}{m_e^2 c} |\psi(0)|^2 \tag{8.54}$$

[14]En el positronio, igual que en el caso del átomo de H los estados se suelen denotar como en espectroscopía atómica, $n^{2S+1}L_J$.

siendo

$$|\psi(0)|^2 = \frac{1}{\pi a^3}$$

y a el radio de Bohr $a = \hbar/(m\alpha c)$, con lo que se obtiene una vida media $\tau = 1{,}252 \cdot 10^{-10}$ seg, exactamente igual al valor experimental.

El estado $^3S_1$, triplete de espín y con momento angular $\ell = 0$ tiene conjugación de carga $\mathcal{C} = -1$ por lo que se desintegra dando 3 fotones. Este estado tiene una probabilidad de desintegración

$$\Gamma(1^3S_1 \longrightarrow 3\gamma) = \frac{2}{9\pi}(\pi^2 - 9)\alpha^6 m_e c \tag{8.55}$$

o sea una vida media más larga $\tau = 1{,}374 \cdot 10^{-7}$ seg., también compatible con la medida experimental.

La conclusión de este sistema puede verse en la figura 8.13 **(a)**; pudiéndose concluir que el espectro es debido a la constante α y al potencial de Coulomb.

8.7.2 El potencial QCD

Las desintegraciones radiativas de los bosones vectoriales $J/\psi(3097)$ y $\psi'(3685)$ han permitido establecer la existencia de una serie de estados, pertenecientes a la familia del charmonio $c\overline{c}$, que no tienen los números cuánticos del fotón pero que tienen los números cuánticos previstos:

- El estado $\ell = 0$ (onda S) y singlete de espín, llamado $\eta_c(2980)$ con $\Gamma = 13$ MeV. Es un mesón pseudoescalar.
- Los estados $\ell = 0$ (onda S) y triplete de espín, que pertenecen a la familia del J/ψ; se trata de mesones vectoriales.
- Los estados $\ell = 1$ (onda P) y tripletes de espín se les denomina χ; se desintegran parcialmente en $J/\psi + \gamma$, y se han encontrado los siguientes estados 1^3P,

denominación:	$\chi_{c0}(3415)$,	$\chi_{c1}(3510)$,	$\chi_{c2}(3556)$
anchura Γ_{tot} (MeV):	$10,1 \pm 0,8$	$0{,}91 \pm 0{,}13$	$2{,}11 \pm 0{,}16$
espín-paridad $J^{\mathcal{P}}$:	0^{++}	1^{++}	2^{++}

La figura 8.13 **(b)**, ilustra el espectro del charmonio. Obsérvese la similitud con el espectro del positronio.

En el caso del quarkonio, al ser las masas de los quarks muy elevadas ($m_c \approx 1{,}5$ GeV/c^2 y $m_b \approx 5{,}0$ GeV/c^2), el sistema puede ser tratado como un sistema no relativista. En la figura 8.13 **(b)** se muestran los estados charmonio, es decir, hadrones cuya estructura de quarks es $c\overline{c}$. Un espectro muy parecido se observa en el caso del sistema bottomonio. Lo más importante es que el espectro de estos estados, genéricamente llamados quarkonio es casi idéntico al

del positronio, pero en el caso del quarkonio, el potencial que mejor se ajusta al espectro experimental es de la forma

$$\boxed{V(r) = -\frac{4}{3}\alpha_s \frac{\hbar c}{r} + kr} \tag{8.56}$$

con $k \approx 1$ GeV fm^{-1}. La forma de este potencial puede verse en la figura 8.14.

El primer término da la dependencia en $1/r$ igual a la del potencial de Coulomb, debido a la interacción entre quarks a pequeñas distancias. El último término, lineal con r, es el responsable del confinamiento de los quarks. La constante α_s, en realidad no es constante, sino que varía con la distancia entre quarks, disminuyendo a medida que la distancia entre quarks disminuye. Esto es una consecuencia directa de la teoría QCD, que se conoce con el nombre de libertad asintótica.

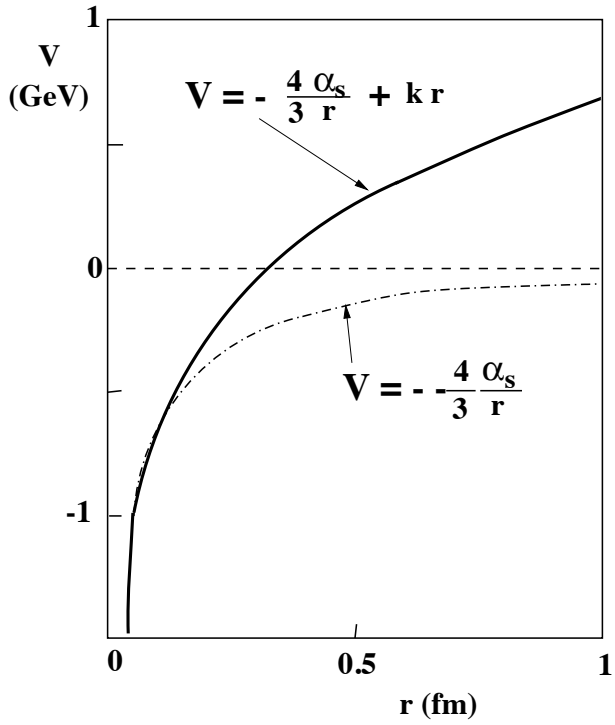


Figura 8.14: La forma del potencial de QCD, $V(r) = -\frac{4}{3}\alpha_s \frac{\hbar c}{r} + kr$, con $\alpha_s = 0{,}3$ y k= 1 GeV/fm.

La forma del potencial en (8.56) es compatible con la observación vista en las desintegraciones leptónicas de los mesones vectoriales en los que $|\Psi(0)|^2 \sim m_V^2$.

8.7.3 Desintegración de los *Quarkonia*

La producción más sencilla del charmonio es en colisionadores e^+e^-. El J/ψ y sus excitaciones radiales $\psi(2^3S_1)$, etc..., se acoplan al fotón puesto que tienen los mismos números cuánticos $J^{\mathcal{P}} = 1^-$. De ahí se accede a los estados $\eta_c(n^1S_0)$ por desintegración radiativa (dipolar magnética, es decir $\Delta L = 0,\ \Delta S = 1$), o sea corresponden al cambio de espín de uno de los quarks. Los estados χ_{ci}, son accesibles por transiciones dipolares eléctricas de los estados $\psi(n^3S_1)$, con $n \geq 2$.

Sin embargo hay un total de 4 modos de desintegración de los *quarkonia*. A continuación se describen los 4 modos de desintegración del charmonio:

1. Desintegración radiativa, de tipo electromagnético. Ejemplos:

$$J/\psi(1^3S_1) \longrightarrow \eta_c(1^1S_0) + \gamma \qquad \text{y} \qquad \psi(2^3S_1) \longrightarrow \eta_c(1^1S_0) + \gamma$$

2. Aniquilación (véase la figura 8.15):

   a) en dos γ o dos gluones, como por ejemplo:

   $$\eta_c(1^1S_0) \to 2\gamma, 2g$$

   donde domina la desintegración en hadrones frente a 2γ (cuya fracción representa $(3 \pm 1) \times 10^{-4}$ de las desintegraciones).

   b) en tres gluones como en el caso del

   $$J/\psi(1^3S_1) \to ggg$$

   estado final con hadrones (suprimido OZI) y que representa el 87,7 % de sus desintegraciones.

   c) a través de un γ virtual dando hadrones (60 %) o leptones (40 %). Este es el caso de las desintegraciones del J/ψ;

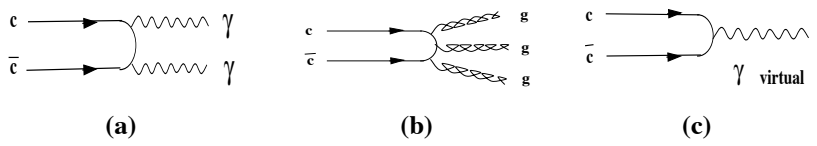


Figura 8.15: Diagramas de aniquilación del charmonio **(a)** proceso electromagnético dando dos fotones, **(b)** proceso fuerte dando tres gluones y **(c)** aniquilación dando un fotón virtual.

3. Desintegración débil del quark c. Proceso poco importante puesto que se trata de una interacción débil; ejemplo:

$$J/\psi(3097) \longrightarrow D_s^- \, e^+ \nu_e$$

visible en la figura 8.16 **(a)**, y que es muy difícil de detectar experimentalmente.

4. Creación de pares de quarks. Da lugar a los mesones encantados, por ejemplo:

$$\psi(3770) \longrightarrow D^0 \bar{D}^0$$

Para que este proceso pueda tener lugar es necesario evidentemente que $M_\psi > 2M_D$, y además es el proceso dominante (figura 8.16 **(b)**).

Este último tipo de desintegración es el que ha permitido encontrar todos los mesones encantados a través de la creación de los quarks ligeros, como ya se ha visto anteriormente y lo mismo se aplica a los mesones bellos, visto en (8.51).

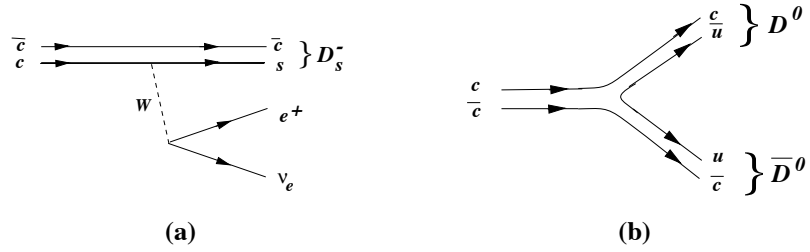


Figura 8.16: Desintegración **(a)** débil y **(b)** fuerte (por creación de pares de quarks) del charmonio.

Medida de α_s

Existen muchos métodos experimentales de medida de la constante α_s. Se presentan a continuación dos métodos que han permitido determinar esta constante comparando las desintegraciones:

a) de los mesones pseudoescalares en los sistemas quarkonio (2γ y 2 gluones) y

b) de los mesones vectoriales (entre ellos el J/ψ y el Υ a 3γ y 3 gluones).

En el caso de los mesones pseudoescalares, se pueden comparar las anchuras de desintegración del $\eta_c(1^1S_0)$, electromagnética (dando 2γ) y la fuerte (dando 2 gluones) para poder realizar un test de QCD, ya que se puede medir α_s, la constante de acoplamiento de quarks y gluones.

En efecto, a primer orden se cumple,

$$\Gamma(1^1S_0 \to 2\gamma) = \frac{3 \cdot 4\pi z_c^4 \alpha^2 \hbar^3}{m_c^2 c} |\Psi(0)|^2 \tag{8.57}$$

siendo $z_c = \frac{2}{3}$, la fracción de carga del quark c y

$$\Gamma(1^1S_0 \to 2g) = \frac{8\pi}{3} \frac{\alpha_s^2 \hbar^3}{m_c^2 c} |\Psi(0)|^2 \tag{8.58}$$

Al calcular el cociente,

$$\boxed{\frac{\Gamma(1^1S_0 \to 2\gamma)}{\Gamma(1^1S_0 \to 2g)} = \frac{8\alpha^2}{9\alpha_s^2}} \tag{8.59}$$

permite determinar

$$\alpha_s(m_{J/\psi}^2 c^2) \approx 0{,}20 \tag{8.60}$$

encontrándose por el mismo método aplicado al bottomonio

$$\alpha_s(m_\Upsilon^2 c^2) \approx 0{,}17 \tag{8.61}$$

En el caso de los mesones vectoriales se recurre a comparar las desintegraciones leptónicas, vistas anteriormente con las desintegraciones a 3 gluones. En efecto, como ya se ha visto en (8.52),

$$\boxed{\Gamma_{V \to e^+e^-} = \frac{16\pi\alpha^2 Q^2}{m_V^2} |\Psi(0)|^2}$$

que da directamente la anchura Γ_{ee}. Si se calcula la anchura de las desintegraciones hadrónicas:

$$\boxed{\Gamma_{V \to 3g \to \text{ hadrones}} = \frac{160(\pi^2 - 9)\alpha_s^3}{81 m_V^2} |\Psi(0)|^2} \tag{8.62}$$

dando valores para α_s compatible con el anteriormente visto en (8.60). Véase la tabla 8.7, en donde también se encuentra el valor obtenido para el mesón ϕ. Es decir, se prueba que el comportamiento de QED y QCD a pequeñas distancias es similar, además verifica que las constantes de acoplamiento de las dos teorías son distintas y comprueba la evolución de la constante de acoplamiento α_s con la energía (*running coupling constant*):

$$\boxed{\alpha_s(Q^2) = \frac{12\pi}{(33 - 2N_f)\ln(Q^2/\Lambda^2)}} \tag{8.63}$$

donde N_f es el número de sabores de quarks cuya masa al cuadrado está por debajo del valor de Q^2 (de momento $N_f^{max} = 6$) y el parámetro *de escala*

$\Lambda = 0{,}2$ GeV, habiéndose verificado experimentalmente esta evolución también hasta $Q^2 = M_Z^2$, es decir para una energía equivalente a la masa del Z^0, en la que la constante vale

$$\alpha_s(M_Z) = 0{,}117 \pm 0{,}005$$

También se cumple la llamada libertad asintótica, $\alpha_s \to 0$ cuando $Q \to \infty$.

TABLA 8.7: Valores de la constante α_s medidos en función de la energía (q^2 del fotón virtual igual a la masa de los mesones vectoriales).

Mesón	Γ_{ee}/Γ_{tot}	α_s
$\phi(1020)$	$(2{,}09 \pm 0{,}07) \cdot 10^{-3}$	0,44
$J/\psi(1S)$	$(7{,}4 \pm 1{,}2) \cdot 10^{-2}$	0,20
$\Upsilon(1S)$	$(3{,}0 \pm 1{,}0) \cdot 10^{-2}$	0,17

8.8 El descubrimiento del último quark (el quark *t*)

En 1994, gracias al colisionador protón-antiprotón (Tevatrón) de Fermilab, que alcanzó una energía en el centro de masas de la colisión $\sqrt{s} = 1{,}8$ TeV, los dos experimentos instalados en el mismo (conocidos por $D0$ y CDF), obtuvieron la primera evidencia experimental de la producción asociada del quark t a través del proceso

$$p + \overline{p} \longrightarrow t + \overline{t} + X$$

siendo X un sistema de hadrones que conserva todos los números cuánticos.

La sección eficaz obtenida es $\sigma(p + \overline{p} \longrightarrow t + \overline{t} + X) \approx 6{,}8$ pb, mientras que la sección eficaz total de colisión $\sigma(p + \overline{p}) \approx 150$ mb. Esto informa de la enorme dificultad del descubrimiento. La detección del quark *top*, fue puesta de manifiesto gracias a su desintegración

$$t \to W^+ + b \qquad \text{y} \qquad \overline{t} \to W^- + \overline{b}$$

apareciendo pares de bosones W, junto con *jets*[15] debidos a la fragmentación de los quarks $b, \overline{b}$ y a otros quarks. La identificación de los leptones $e^{\pm}$ y $\mu^{\pm}$, producto de las desintegraciones de los bosones $W^{\pm}$, permitieron explicar el origen de los pocos sucesos obtenidos.

Las distintas topologías estudiadas se encontraron de acuerdo con las predicciones del modelo estándar. Todos estos datos vienen recogidos en la tabla 8.8.

[15] En física de altas energías se denomina *jet* a un pincel o chorro formado por varias partículas (hadrones) que siguen la dirección del quark, como consecuencia del fenómeno llamado fragmentación; es decir, los quarks se materializan en varios hadrones ya que no pueden existir en estado libre.

TABLA 8.8: Canales que sirvieron para identificar la producción y desintegración del quark *top*, en los experimentos $D0$ y CDF del Tevatrón de Fermilab.

canal	señal	fracción
$t+\overline{t} \rightarrow \ \ell_1+\overline{\ell}_2+\nu_1+\overline{\nu}_2+b+\overline{b}$	$e+\mu+jets$	$\frac{2}{81}$
	$e+e+jets$	$\frac{1}{81}$
	$\mu+\mu+jets$	$\frac{1}{81}$
$t+\overline{t} \rightarrow \ \ell+\overline{\nu}+q_1+\overline{q}_2+b+\overline{b}$	$e+jets$	$\frac{12}{81}$
	$\mu+jets$	$\frac{12}{81}$

8.9 Ejercicios

8.1. Reacciones con hadrones.
Indicar en la siguiente lista cuáles son los procesos permitidos y prohibidos, señalando en cada cado el tipo de interacción y el proceso subyacente a nivel de los quarks:
a) $\Xi^0 \rightarrow \Sigma^0\gamma$
b) $\mu^- p \rightarrow \Lambda^0\nu_\mu$
c) $\Sigma^+ \rightarrow \Lambda^0\mu^+\nu_\mu$
d) $K^- p \rightarrow \pi^+\Sigma^-$
e) $K^+ \rightarrow \pi^0 e^+\nu_e$

8.2. Momento magnético de Λ^0.
a) Escribir la función de ondas del Λ^0 según el modelo quark, de forma que la tercera componente del espín sea $m_s = +1/2$.
b) Demostrar que el momento magnético del Λ^0 es igual al momento magnético intrínseco del quark s.

8.3. Masas los mesones η y η'.
a) La mezcla de los estados η_1 y η_8, pertenecientes al nonete de mesones pseudoescalares, se puede expresar mediante la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} \eta' \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_8 \end{pmatrix}$$

siendo θ el ángulo de mezcla y η y η' los estados físicos. Demostrar que si esta transformación matricial diagonaliza la matriz de masas, entonces se verifica

$$tg^2\theta = (m_8^2 - m_\eta^2)/(m_{\eta'}^2 - m_8^2)$$

b) Calcular m_8 a partir de la fármula de GellMann-Okubo para mesones y deducir el valor del ángulo de mezcla.

8.4. Masas de los mesones en el modelo quark.
Las masas de los mesones en el modelo quark se pueden determinar a partir de las masas de los quarks constituyentes y una interacción hiperfina del tipo

$$m(q_1\bar{q}_2) = m_1 + m_2 + a\frac{\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2}{m_1 m_2}$$

siendo $\vec{S}_1$ y $\vec{S}_2$ los espines de los quarks constituyentes y m_1 y m_2 sus masas respectivas.
a) Calcular las masas de los mesones pseudo-escalares y vectoriales a partir del modelo anterior.
b) Comparar las masas obtenidas con los valores experimentales.

8.5. Masas de los bariones en el modelo quark.
a) Verificar a partir de los valores medidos de las masas hadrónicas las siguientes relaciones

$$(m_N + m_\Xi)/2 \approx (m_\Sigma + 3m_\Lambda)/4$$

$$m_\Sigma - m_\Lambda \approx m_\Xi - m_\Sigma \approx m_\Omega - m_\Xi$$

para el octete y el decuplete de bariones, respectivamente.
b) Deducir las relaciones anteriores a partir del modelo de quarks constituyentes.

8.6. Espectro del charmonio.
a) Dibujar el espectro del charmonio clasificando los estados según el valor de J^{PC} e indicar qué estados han sido ya observados y cuáles no.
b) Utilizando la ley de conservación de la conjugación de carga, indicar todas las transiciones radiativas posibles entre estados del charmonio.
c) El experimento CRYSTAL BALL de SLAC ha observado claramente, en el espectro de fotones emitido por estados del charmonio, las siguientes energías: 130, 175, 269, 459 y 414 MeV. Identificar las transiciones que corresponden a estos fotones.
d) Discutir por qué no se observan transiciones radiativas a los estados η_c' y h_c en el espectro de fotones del apartado anterior.

8.7. Espectro del bottomonio.
a) Dibujar el espectro del bottomonio clasificando los estados según el valor de J^{PC} e indicar qué estados han sido ya observados y cuáles no.
b) Utilizando la ley de conservación de la conjugación de carga, indicar todas las transiciones radiativas posibles entre estados del bottomonio.
c) Los experimentos CRYSTAL BALL (SLAC), ARGUS (DESY), CUSB y CLEO (Cornell) han observado claramente, en el espectro de fotones emitido por estados del bottomonio, las siguientes energías: 87, 100, 110, 123, 131 y 163 MeV. Identificar las transiciones que corresponden a estos fotones.
d) Discutir qué señal habría que buscar para descubrir los estados $\eta_b(1S)$ y $h_b(1S)$.

8.8. Hadrones con quarks pesados.
a) Dibujar el espectro de los hadrones (mesones y bariones) con encanto (C=1), clasificando los estados según el valor de S (extrañeza). Indicar qué estados han sido ya observados y cual ha sido la proceso que ha permitido dicha identificación.
b) Ídem para los hadrones con belleza (B=1).

Parte IV

Interacciones fundamentales

9. *Interacciones débiles*

9.1 Introducción

Inicialmente la interacción débil se descubre y se asocia con la desintegración β nuclear. La interacción débil que se aborda en este tema es una fuerza fundamental responsable de muchos procesos entre leptones y quarks, explica las desintegraciones de los quarks (es el proceso de cambio de sabor de quarks, o sea de los hadrones, ya que como se sabe no se han encontrado quarks en estado libre) y es el único tipo de interacción que sufren los neutrinos.

La interacción débil se considera que es debida al intercambio de los bosones $W^{\pm}$ y Z^0, de masa muy elevada ($80{,}425$ y $91{,}1876$ GeV respectivamente), lo cual justifica el corto alcance de la misma ($R \sim \frac{\hbar}{Mc} \sim 10^{-3}$ fm) y por ello se entiende que tuviera tanto éxito la primera teoría de Fermi sobre la desintegración beta de los núcleos que suponía una interacción puntual.

Al contrario que en el caso de las otras tres fuerzas de la naturaleza, no se conocen estados ligados por la interacción débil. Tratándose de una fuerza de intensidad muy pequeña, casi todo lo que se ha aprendido sobre ella proviene del estudio de las desintegraciones de los hadrones (quarks) y leptones.

A escala cósmica, la interacción débil es muy importante ya que controla la velocidad de reacción termonuclear en la secuencia principal de las estrellas, puesto que en el núcleo de las mismas (densidades ~ 100 veces la del agua) tiene lugar el proceso de formación del deuterio,

$$p + p \longrightarrow d + e^+ + \nu_e \tag{9.1}$$

que no tiene lugar en la tierra, dada su insignificante probabilidad.

Es interesante adelantar que, además del gran número de experimentos realizados para medir vidas medias y secciones eficaces de procesos débiles, se pueden destacar al menos tres de ellos por su impacto posterior:

- la violación de la paridad,
- las corrientes neutras y
- la detección de los bosones intermediarios $W^{\pm}$ y Z^0.

9.2 Las familias de leptones

9.2.1 El electrón y su neutrino

El electrón es una de las primeras partículas elementales descubiertas (J. J. Thomson, 1897) siendo ya más que centenario. Es el único leptón cargado estable y sus propiedades son bien conocidas.

En 1914 Chadwick, estudiando la desintegración beta de los núcleos, demostró que, a diferencia de los rayos α y γ, los rayos β (electrones) no tienen un espectro monoenergético, tal como se esperaría en una desintegración a 2 cuerpos. Al principio se pensó que esto era debido a la emisión de fotones adicionales, pero esta hipótesis quedó descartada por experimentos calorimétricos llevados a cabo en 1927. Con objeto de salvar el principio de conservación de la energía, Pauli lanzó en 1930 la hipótesis de que la radiactividad β no es un proceso a 2 cuerpos sino a 3 cuerpos (véase figura 9.1), al emitirse, además del electrón, una partícula neutra, de masa muy ligera y que interacciona muy débilmente con la materia. Tras el descubrimiento del neutrón en 1932, la partícula propuesta por Pauli recibió el nombre de neutrino.

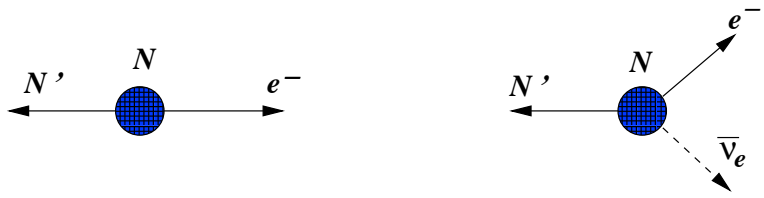


Figura 9.1: La desintegración β como desintegración a dos cuerpos ($N \to N' + e^-$) y con producción adicional de ν ($N \to N' + e^- + \nu$) según la hipótesis de Pauli.

Por argumentos de composición de momento angular según las reglas de la mecánica cuántica se demuestra fácilmente que el neutrino es un fermión (espín 1/2).

En 1933 Fermi elabora la primera teoría de la desintegración β, o sea del proceso $n \to pe^-\nu$ donde ν es la partícula propuesta por Pauli (en notación actual sería $\bar{\nu}_e$). El hamiltoniano de Fermi es:

$$\boxed{\mathcal{H}_{\rm I} = G_{\rm F}(\bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n)(\bar{\psi}_e \gamma_\mu \psi_\nu)} \tag{9.2}$$

donde los campos ψ y las matrices γ son los que aparecen en la ecuación relativista del electrón propuesta por Dirac en 1928, y $G_{\rm F}$ es una constante llamada constante de Fermi, cuyo valor es $G_{\rm F} \approx 1{,}17 \cdot 10^{-5}$ GeV^{-2}. La interacción de Fermi no es la interacción efectiva más general que se puede construir con los 4 espinores ψ preservando la invariancia relativista. De todos los acoplos posibles

(escalar, vectorial, tensorial) sólo se ha utilizado el vectorial. Experimentos posteriores demostraron que el acoplo vectorial es efectivamente el correcto, modificado únicamente para introducir la violación de paridad como se discutirá más adelante.

La teoría de Fermi introduce una interacción distinta a las dos interacciones conocidas en la época: la interacción electromagnética y la interacción fuerte, responsable de las fuerzas nucleares. Esta interacción, de corto alcance al igual que la interacción fuerte, se conoce como interacción débil. En 1934, Bethe y Peierls calcularon las secciones eficaces de interacción del neutrino con la materia (es decir, con protones y neutrones) utilizando la teoría de Fermi. Se trata de los procesos:

$$\nu n \to p e^- \qquad \bar{\nu} p \to n e^+$$

que se pueden obtener a partir de la desintegración del neutrón por simetría de cruce entre partículas iniciales y finales. La expresión de la sección eficaz, para energías del neutrino no muy superiores a 1 GeV (de forma que la colisión sea elástica), pero tampoco muy cercanas al umbral (de forma que se pueda despreciar la masa del electrón), es $\sigma \approx G_{\mathrm{F}}^2 m E_\nu/(2\pi)$ siendo m la masa del nucleón y E_ν la energía del neutrino expresada en GeV. Para $E_\nu = 1$ GeV, se obtiene $\sigma \approx 10^{-38}$ cm^2 es decir 10^{-14} barn, que es un valor extremadamente pequeño si se compara con las secciones eficaces típicas de la interacción fuerte o electromagnética, del orden de 1 barn. Naturalmente esto supone que el neutrino es muy difícil de detectar. Por ejemplo, la probabilidad de que un neutrino de 1 GeV que atraviese la tierra interaccione con la misma es únicamente del orden de 10^{-5}.

Experimento de Reines y Cowan

Durante mucho tiempo se pensó que jamás se podría detectar el neutrino, pero un experimento llevado a cabo en 1956 logró demostrar la existencia de esta partícula. Se trata del llamado *Experimento de Reines y Cowan*. Precisamente en 1995 se concedió el premio Nobel de Física a F. Reines y a M. Perl. Al primero, por la primera evidencia experimental del $\overline{\nu}_e$ a través de la detección de las interacciones de antineutrinos procedentes de un reactor nuclear,[1] sobre un blanco de $CdCl_2$ y agua; al segundo por el descubrimiento del leptón $\tau^\pm$, que fue detectado gracias a la aniquilación $e^+e^- \to \tau^+\tau^-$ estudiada en el colisionador SPEAR del laboratorio SLAC en Stanford (EEUU). Su masa es $m_\tau = 1777$ MeV/c^2, por lo tanto es el más masivo de los leptones cargados. Tiene una vida media $\tau_\tau = 0,291 \times 10^{-12}$ seg. Más adelante se describirá este experimento de SPEAR.

En el experimento de Reines y Cowan (véase figura 9.2) se utilizó el flujo de antineutrinos de una de las primeras centrales nucleares construidas tras la segunda guerra mundial, la de Savannah River (South Carolina, EEUU). Una central nuclear produce un flujo enorme de antineutrinos de energía en torno a 1

[1] F. Reines, C. L. Cowan, *Phys. Rev.*, **113** (1959) 273-279.

MeV, como resultado de las reacciones de fisión nuclear; se estima que se emiten, en promedio, unos 6 $\overline{\nu}_e$ por fisión. Así, en un reactor de 1000 MW que es el que utilizaron Cowan y Reines (es decir, de una potencia similar al reactor de Cofrentes en la Comunidad Valenciana), el flujo útil de $\overline{\nu}_e$ era del orden de 10^{13} cm^{-2} s^{-1}. Como detector, se utilizó una solución de 200 litros de agua y 40 kg de cloruro de cadmio, rodeados por centelleador líquido. Los antineutrinos interaccionan con los protones libres del agua (es decir, los del hidrógeno, ya que para 1 MeV no es posible la interacción con los protones del núcleo de oxígeno) según la reacción $\bar{\nu}p \rightarrow ne^+$. El positrón se aniquila dando dos fotones, mientras que el neutrón termaliza y es absorbido por el cadmio emitiendo otro fotón característico. La detección de los fotones se realizó gracias a la utilización de centelleador líquido, que producen pulsos luminosos tras interaccionar a través del efecto Compton o del efecto fotoeléctrico en el centelleador. La aparición de 2 fotones en coincidencia y otro fotón un breve instante después (del orden del microsegundo) es, por tanto, la señal de que el antineutrino ha sido detectado. Se observaron del orden de 3 sucesos por hora con una relación señal/ruido de 4/1.

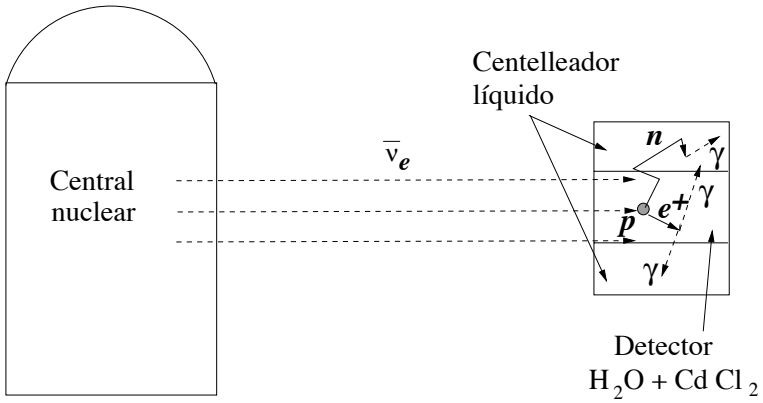


Figura 9.2: Experimento de Reines y Cowan.

Para antineutrinos de muy baja energía, la sección eficaz de interacción es bastante inferior al valor que ha sido utilizado antes para 1 GeV. El valor correcto para $E_\nu = 1$ MeV es $\sigma \approx 10^{-43}$ cm^2. Teniendo en cuenta que el flujo de antineutrinos se puede estimar en unos 10^{13} cm^{-2}s^{-1} y que el detector contenía 200 litros de agua, el número de interacciones observadas está básicamente de acuerdo con la teoría de Fermi.

9.2.2 El muón y su neutrino

En 1936, Anderson y Neddermeyer observaron utilizando una cámara de niebla partículas procedentes de la radiación cósmica con una masa de aproximadamente 200 veces la masa del electrón. Estas partículas se llaman hoy día muones. En un principio se pensó que se trataba del mesón de Yukawa; es decir,

de la partícula responsable de la interacción fuerte. La situación no se clarificó hasta que Conversi, Panini y Piccioni demostraron en 1945 que el muón no tiene interacción fuerte y, por tanto, no puede ser dicho mesón. Finalmente, en 1947, el mesón de Yukawa, hoy día llamado pión, fue descubierto por Lattes, Occhialini y Powell en la radiación cósmica producida en las capas altas de la atmósfera. La confusión se había debido a que la masa del muón (106 MeV) es muy parecida a la del pión (140 MeV). Es interesante observar que tanto los piones como los muones se producen por interacción de los rayos cósmicos en las capas altas de la atmósfera, típicamente a 15 km de altura y con energías de algunos GeV. Sin embargo la vida media del pión ($2{,}6 \cdot 10^{-8}$ s) es muy inferior a la del muón ($2{,}2 \cdot 10^{-6}$ s). Los piones cósmicos recorren en media unos 200 m antes de desintegrarse, mientras que los muones pueden llegar a la superficie terrestre. Por tanto, la radiación cósmica observable en la superficie terrestre se compone esencialmente sólo de muones.

El muón es una partícula inestable como el neutrón y su vida media puede calcularse utilizando la teoría de Fermi. El proceso de desintegración es $\mu^- \to e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$, donde se ha introducido un nuevo neutrino ν_μ distinto del neutrino del electrón ν_e. Se ha supuesto implícitamente la conservación del número leptónico al asociar un antineutrino al electrón. Por analogía con la desintegración del neutrón (ecuación (9.2)), el hamiltoniano de interacción se escribe:

$$\mathcal{H}_{\mathrm{I}} = G_{\mathrm{F}}(\bar{\psi}_{\nu_\mu}\gamma^\mu\psi_\mu)(\bar{\psi}_e\gamma_\mu\psi_{\nu_e}) \tag{9.3}$$

La anchura del muón se puede calcular y resulta ser $\Gamma_\mu = G_{\mathrm{F}}^2 m_\mu^5/(192\pi^3)$ con lo cual la vida media es de aproximadamente $2 \cdot 10^{-6}$ s, en perfecto acuerdo con las medidas experimentales.

Las primeras medidas de la vida media del muón fueron efectuadas por Rasetti en 1940 utilizando los muones de la radiación cósmica. El aparato experimental (figura 9.3) consiste básicamente en tres contadores de centelleo en coincidencia, entre bloques de carbono que permiten absorber la energía del muón. Los dos primeros, S_1 y S_2, permiten detectar el tiempo de paso del muón t_{12}, mientras que el tercero S_3 mide el tiempo de paso t_3 del electrón emitido en la desintegración del muón. La vida media puede extraerse a partir de la curva que resulta de dibujar el número de electrones observados en función de la diferencia de tiempos $\Delta t = t_3 - t_{12}$. En la actualidad se ha logrado medir con gran precisión tanto la masa como la vida media del muón, utilizando haces muy intensos de piones. Se obtiene:

$$m_\mu = 105{,}658357(5)\ \text{MeV} \qquad \text{y} \qquad \tau_\mu = 2{,}19703(4)\ \mu\text{s}$$

En la desintegración del muón, se ha supuesto que se producen dos neutrinos ν_e y ν_μ, pero no es evidente que ambos sean distintos. La prueba experimental de que se trata efectivamente de dos partículas distintas fue obtenida en 1962 por Schwartz, Steinberger y Lederman, mediante el llamado *experimento de los dos neutrinos* (véase figura 9.4). En 1988 les fue concedido el Premio Nobel de Física por este hallazgo. Para ello utilizaron un haz de protones de

15 GeV acelerados en el sincrotrón de protones AGS (Brookhaven, EEUU). Al chocar con un blanco, los protones producen piones y kaones que se desintegran en muones y neutrinos (la probabilidad de desintegración en electrones es muy pequeña: véanse los cocientes de desintegración en la tabla C.6 del apéndice C). Tras hacer pasar las partículas resultantes de las desintegraciones por un blindaje de hierro de 13 m, se consigue un haz que contiene únicamente neutrinos. Para detectar estos neutrinos utilizaron un detector formado por cámaras de chispas y contadores de centelleo. Con este detector observaron sucesos de interacción de los neutrinos con producción de muones pero ningún suceso con aparición de electrón. Esto prueba que el haz contiene únicamente neutrinos muónicos y que estos son distintos a los electrónicos. Este es el primer experimento en que se utiliza un haz de neutrinos. Los haces de neutrinos que se han construido posteriormente están basados en el mismo principio que este experimento.

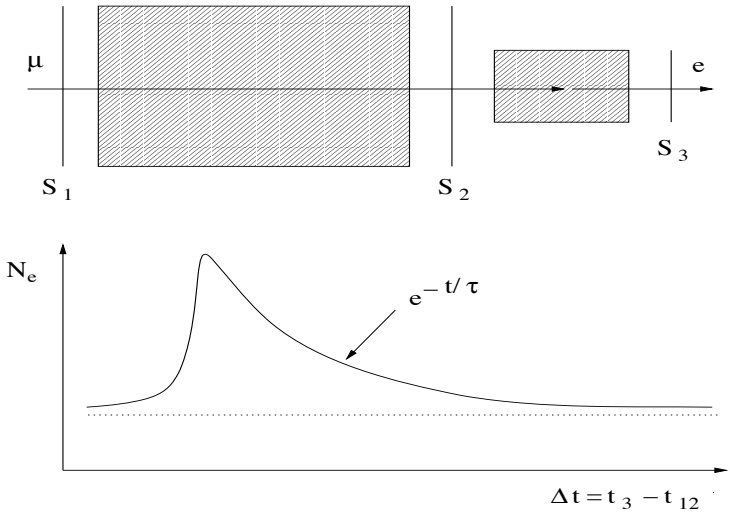


Figura 9.3: Esquema del dispositivo experimental (arriba) y distribución de tiempos (abajo) en la medida de la vida media del muón.

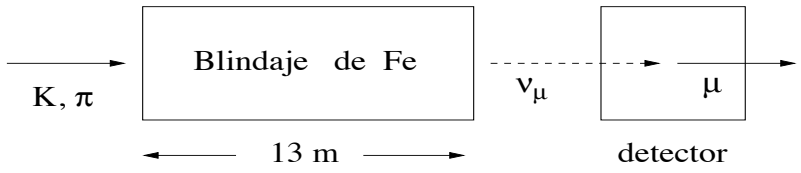


Figura 9.4: Experimento de los dos neutrinos.

9.2.3 El leptón τ y su neutrino

El leptón τ, partícula con las mismas propiedades que e y μ pero más pesado, fue descubierto gracias al anillo de colisiones SPEAR en el laboratorio SLAC (Stanford, EEUU). En este anillo se hacían colisionar electrones y positrones con una energía en centro de masas entre 3 y 8 GeV. Al producirse la colisión en el centro de masas, la energía puede utilizarse íntegramente para producir nuevas partículas, a diferencia de lo que ocurre en experimentos de blanco fijo. Los experimentos de colisión e^+e^- son también más fáciles de analizar que los experimentos de colisión con hadrones. Finalmente se utilizó un detector totalmente electrónico para observar las colisiones, llamado primero detector magnético de SLAC y luego MARK I. Estos detectores electrónicos son mucho más rápidos que las cámaras de burbujas entonces en uso. Todo ello colocaba este experimento en situación ideal para efectuar importantes descubrimientos. El primero de estos descubrimientos fue el de la partícula J/ψ, observada (véase figura 8.7) en forma de una resonancia muy estrecha de 3.1 GeV (Richter, 1974) y que tuvo un impacto decisivo en la validación del modelo quark. También se observaron una veintena de sucesos con un electrón y un muón emitidos en direcciones opuestas en el plano perpendicular a los haces, aunque sin que el momento de ambos se compense exactamente (véase figura 9.5).

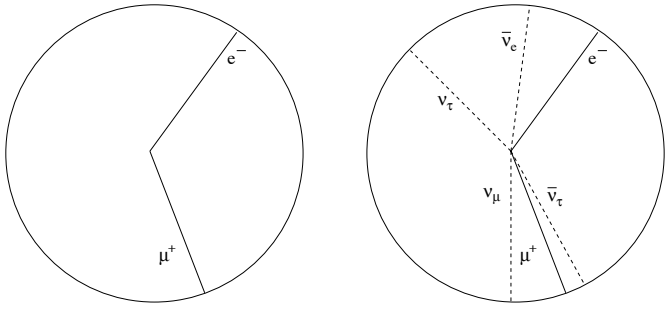


Figura 9.5: Los sucesos observados por MARK I y su interpretación suponiendo la producción de pares de un nuevo leptón.

Estos sucesos violan aparentemente la conservación del momento en el plano transverso, así como el número leptónico, pero pueden también interpretarse como la producción de un par de leptones pesados $e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$ (Perl,[2] 1975). El experimento del descubrimiento de leptón τ es un bello ejemplo del ingenio de un grupo de investigación, que se centra en la identificación de los modos leptónicos $\tau^- \longrightarrow \ell^- + \overline{\nu}_\ell + \nu_\tau$ y $\tau^+ \longrightarrow \ell^+ + \nu_\ell + \overline{\nu}_\tau$ de desintegración del τ (con aparición del nuevo tipo de neutrino ν_τ). La identificación se ve complicada por el hecho de que hay neutrinos (indetectables) en el estado final. Pero

[2] M. Perl *et al., Phys. Rev. Lett.*, **35** (1975) 1489.

se vieron favorecidos por el efecto umbral ya que los leptones τ se producen asociados en la reacción $e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$. La idea fue buscar la producción asociada de $e^+\mu^-$ o $e^-\mu^+$. Los resultados pueden verse en la figura 9.6, donde efectivamente se pone en evidencia la aparición de este estado final, justo a partir del umbral, que es igual a $2m_\tau$. La medida se complica por la existencia del umbral de producción de partículas con encanto, muy cercano al umbral de producción de leptones τ.

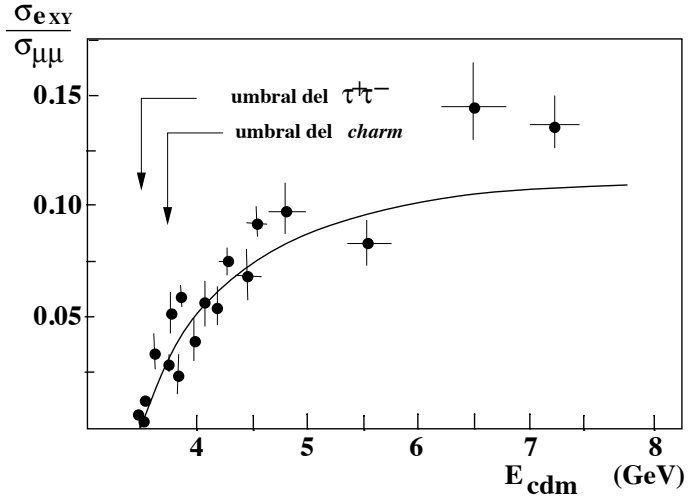


Figura 9.6: Cociente de secciones eficaces de producción de dos partículas de carga opuesta en la reacción $e^+e^- \rightarrow e^\pm + X^\mp + Y$ respecto a la producción de pares $\mu^+\mu^-$. Y representa partículas neutras no detectadas. Datos de W. Bacino *et al., Phys. Rev. Lett.,* **41** (1978) 13.

La vida media del leptón τ puede calcularse teóricamente igual que la del muón, pero hay que tener en cuenta que, además del modo de desintegración en electrón, existe el modo en muón y en hadrones con masa inferior a la masa del τ. Se observa experimentalmente que $\mathrm{BR}(\tau \rightarrow e) = 17{,}8\,\%$. Por otra parte, según la teoría de Fermi, la anchura de desintegración $\Gamma(\tau \rightarrow e)$ es proporcional a la quinta potencia de m_τ. De todo ello se deduce:

$$\tau_\tau = \tau_\mu \cdot BR(\tau \rightarrow e) \cdot (m_\mu/m_\tau)^5 = 0{,}29 \cdot 10^{-12}\mathrm{s}$$

que está en perfecto acuerdo con el valor experimental. Este resultado constituye una prueba importante de la universalidad de la interacción débil; es decir, la constante G_F es la misma cualquiera que sea el leptón que interviene. La medida experimental de la vida media del leptón τ ha sido posible a partir de los años 1990 gracias a la utilización de detectores de estado sólido que permiten medir posiciones con enorme precisión, del orden de 10 μm. La distancia típica

recorrida por un leptón τ producido por ejemplo en el anillo de colisiones LEP ($\sqrt{s} = 91$ GeV) es $L = c\beta\gamma\tau = 2{,}3$ mm, que da lugar a parámetros de impacto, para el e o μ producidos en la desintegración, del orden de 100 μm. Dado que el parámetro de impacto es proporcional a la vida media, la técnica de medida (véase figura 9.7) consiste en medir esta cantidad con tanta precisión como sea posible.

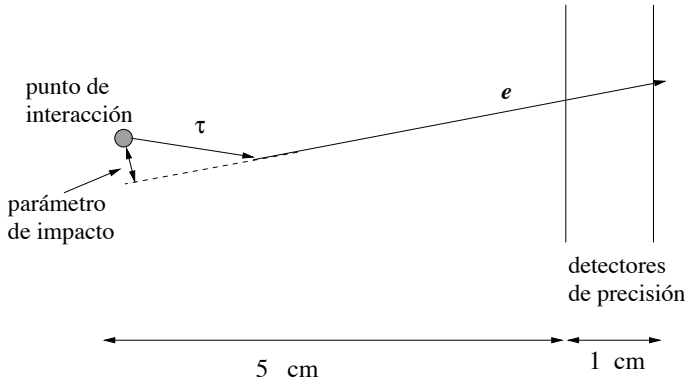


Figura 9.7: Medida de la vida media del leptón τ mediante la técnica del parámetro de impacto.

Un detector de vértices típico de LEP consta de dos capas de detectores separadas por 1 cm y situadas alrededor del tubo de vacío de los haces, a unos 5 cm del punto de interacción. La resolución experimental en el parámetro de impacto de un dispositivo como éste es de unos 50 μm. Esto permite medir la vida media del leptón τ a condición de acumular un número suficiente de sucesos. Actualmente se dispone de medidas precisas tanto de la masa como de la vida media del leptón τ:

$$m_\tau = 1{,}7770(3) \text{ GeV} \qquad \text{y} \qquad \tau_\tau = 0{,}2906(11) \text{ ps}$$

Aunque prácticamente desde el descubrimiento del leptón τ se tiene evidencia de la existencia de un neutrino asociado ν_τ, distinto de ν_e y ν_μ, no ha habido evidencia directa de la existencia de esta partícula hasta el experimento DONUT (*Direct Observation of NU Tau*) efectuado en Fermilab (Chicago, EEUU) en 2000. En este experimento se envía un haz de protones de 800 GeV contra un blanco muy masivo de tungsteno, que tiene la propiedad de absorber los piones y kaones secundarios. De esta forma se logra enriquecer el haz de neutrinos con los ν_τ procedentes de la desintegración $D_s \to \tau\bar{\nu}_\tau$. Este haz se hace seguidamente interaccionar contra un blanco de hierro que contiene en su interior emulsiones fotográficas. Se trata a continuación de encontrar vértices desplazados compatibles con desintegraciones del leptón τ en las emulsiones.

En este experimento se encontraron 4 sucesos de este tipo, lo cual prueba la presencia de ν_τ en el haz.

El resumen de estos descubrimientos puede verse en la tabla C.1, en la que aparecen listados todos los leptones conocidos hasta hoy con todos sus números cuánticos. En particular, pueden verse los tres números leptónicos. Se denomina número leptónico a la suma $\mathcal{L}_e + \mathcal{L}_\mu + \mathcal{L}_\tau$. Estos números cuánticos se conservan cada uno por separado y, por supuesto, la suma de ellos en todas las interacciones débiles. Garantizan que en todos los procesos débiles, cada neutrino acompaña al leptón de su familia. No se han encontrado más leptones cargados que tengan una masa inferior a $m_\ell \sim 50$ GeV, pese a las intensas búsquedas realizadas en los colisionadores modernos.

9.3 Violación de paridad

La violación de paridad en las desintegraciones débiles fue sugerida por Lee y Yang en 1956 tras analizar la llamada 'paradoja de los mesones $\theta - \tau$'. En lenguaje actual, esta paradoja se origina al estudiar la conservación de paridad en las desintegraciones de kaones en 2 y 3 piones:

$$K^+ \to \pi^+ \pi^0 \qquad \text{y} \qquad K^+ \to \pi^+ \pi^+ \pi^-$$

Si suponemos que el kaón tiene espín nulo, las paridades de los estados finales con 2 y 3 piones son necesariamente opuestas. En efecto, el momento angular orbital relativo del estado final de dos piones, l_{12} es nulo por conservación de momento angular. Para 3 piones, pueden existir momentos angulares orbitales relativos l_{12} y l_3 no nulos, pero han de ser iguales de forma que sumen un momento angular nulo. Se tiene, por tanto,

$$\mathcal{P}(2\pi) = (\mathcal{P}_\pi)^2 (-1)^{l_{12}} \quad \text{y} \quad \mathcal{P}(3\pi) = (\mathcal{P}_\pi)^3 (-1)^{l_{12}+l_3}$$

Dado que la paridad intrínseca del pión es $\mathcal{P}_\pi = -1$, la paridad del estado final es +1 para 2 piones y -1 para 3 piones, lo cual resulta imposible si se conserva la paridad. Se propusieron varias alternativas que permiten preservar la conservación de paridad:

a) el kaón no tiene espín nulo (puede comprobarse en efecto que si su espín-paridad es 1^-, los modos en 2 y 3 piones pueden coexistir sin violar paridad),

b) los modos en 2 y 3 piones proceden de mesones distintos aunque muy próximos en masa que fueron bautizados θ y τ.

La primera hipótesis quedó descartada al analizar el diagrama de Dalitz de la desintegración $K \to 3\pi$. En efecto, la probabilidad de desintegración no se anula en ningún punto, y esto sólo es posible si el kaón tiene espín nulo. La segunda hipótesis tampoco resultó viable ya que al hacerse medidas precisas de la masa y vida media de θ y τ, se observó que eran iguales y, por tanto, no podían ser partículas distintas. La violación de paridad en las desintegraciones débiles

quedó confirmada inequívocamente en una serie de experimentos efectuados durante 1957 que se van a describir a continuación. En todos estos experimentos se logró probar que al desintegrarse una partícula polarizada, la probabilidad de desintegración en una dirección dada depende de la orientación del espín, lo cual es incompatible con la conservación de paridad.

Considérese en efecto la desintegración de una partícula a polarizada, en un estado final que contiene una cierta partícula b que es detectada en una dirección determinada (véase figura 9.8). La operación de paridad invierte el momento pero no modifica el espín. Por tanto, si la paridad se conserva, la probabilidad de desintegración no ha de variar al invertir la dirección de b sin modificar el espín de a, o al invertir el espín de a sin modificar la dirección de b.

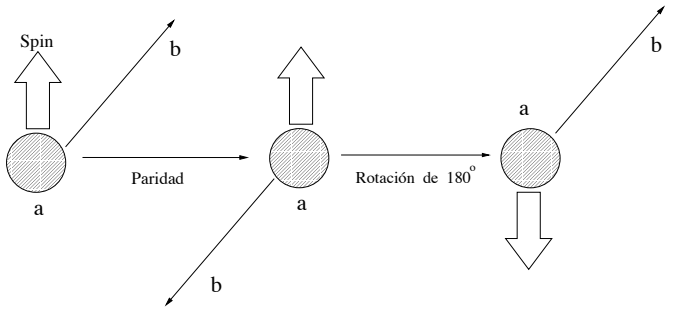


Figura 9.8: Paridad y rotación de $180°$ aplicados a la desintegración $a \rightarrow b$, siendo a una partícula polarizada.Vectores ordinarios ($\longrightarrow$) denotan dirección del movimiento mientras que vectores $\Longrightarrow$ denotan sentido de rotación de espín.

El primer experimento que se va a considerar fue realizado por Mme. Wu[3] y colaboradores con una muestra de ^{60}Co polarizada (véase figura 9.9). El ^{60}Co se desintegra en un estado excitado de ^{60}Ni con emisión de un electrón y el ^{60}Ni se desexcita posteriormente con emisión de dos fotones. Estos fotones se detectan con sendos cristales de NaI y sirven para demostrar que la muestra de cobalto está polarizada. En efecto, al aplicar un campo magnético $\vec{B}$ en la dirección vertical, el cobalto puede polarizarse si la temperatura es suficientemente baja (del orden de 0.01 K) creándose una asimetría relativa en el número de fotones detectados por los dos contadores, ya que estos se hallan en direcciones distintas respecto al espín del cobalto. Esta asimetría dura tan sólo unos minutos ya que la agitación térmica acaba despolarizando la muestra. Durante este tiempo se ha de invertir el campo magnético (y por tanto el espín del cobalto) y observar el número de sucesos en el contador de electrones. Se observó que este número depende de la orientación de $\vec{B}$ y, por tanto, hay violación de paridad (el 70 % de los e^- son emitidos en la dirección opuesta a la del espín del ^{60}Co).

[3] C. S. Wu *et al., Phys. Rev.,* **105** (1957) 1413.

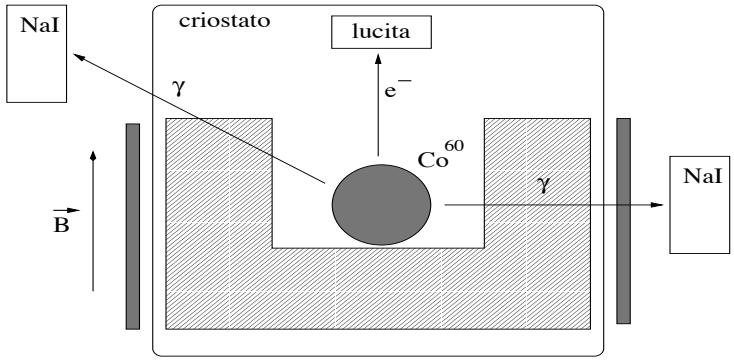


Figura 9.9: Aparato experimental utilizado para demostrar la violación de paridad en la desintegración de una muestra polarizada de ^{60}Co.

El segundo experimento, realizado por Garwin, Lederman y Weinrich, consiste en observar la desintegración de muones polarizados (véase figura 9.10). Los muones se obtienen por desintegración en un absorbente de carbono de los piones de un haz. Los muones se hacen decaer en otro bloque absorbente y se observan los electrones emitidos en una dirección determinada.

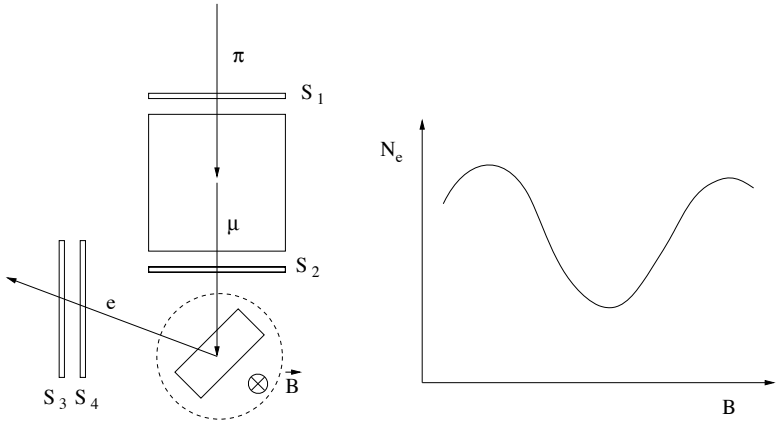


Figura 9.10: Aparato experimental utilizado para demostrar la violación de paridad en la desintegración de muones polarizados.

En la desintegración del pión, el muón se polariza en la dirección de su

momento (véase la figura 9.11). El espín del muón se hace girar mediante un campo magnético perpendicular al plano del experimento. Se observa que el número de electrones depende de la intensidad de $\vec{B}$, o sea del giro efectuado por el espín del muón. Esto no implica necesariamente violación de paridad. Sin embargo, el experimento permite extraer la dependencia de la probabilidad de desintegración en el ángulo θ entre el espín del muón y la dirección del electrón, que resulta ser $1 - 0{,}3 \cos\theta$. Esta dependencia lineal en $\cos\theta$ implica violación de paridad. En este experimento se determinó que los neutrinos son sólo levógiros; es decir, con una sola proyección de espín.

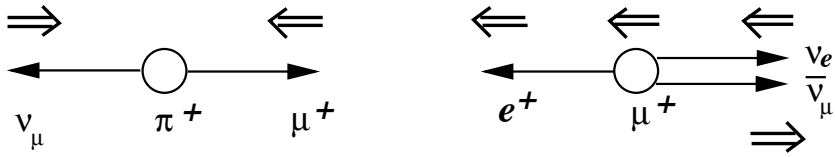


Figura 9.11: Explicación gráfica de la violación de la paridad en la cadena de desintegración del $\pi \rightarrow \mu \rightarrow e$. El espectro de energías del e refleja que los muones están completamente polarizados con helicidad -1. En la desintegración del μ^+, la configuración opuesta, dando lugar a un e^+ levógiro está suprimida y no se observa experimentalmente.

Incidentalmente, este experimento permite medir igualmente el factor giromagnético del muón que resulta ser igual a 2, de acuerdo con la teoría de Dirac para fermiones elementales de espín 1/2.

El tercer experimento fue realizado en Berkeley y simultáneamente en Brookhaven, con haces de piones obtenidos a partir de los ciclotrones existentes en ambos laboratorios. Los piones se hacen incidir sobre una cámara de burbujas de hidrógeno, produciendo sucesos del tipo $\pi^- p \rightarrow \Lambda K^0$. Estos sucesos son fácilmente identificables ya que tanto el Λ como el K^0 se desintegran en dos partículas cargadas dando una señal característica en forma de V. Concretamente, se tiene $\Lambda \rightarrow p\pi^-$ y $K^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$. Las cuatro partículas resultantes permiten reconstruir los momentos del Λ y del K^0 y, por tanto, el plano de la reacción formado por ambos y por el pión incidente (véase figura 9.12). El Λ producido en esta reacción resulta estar fuertemente polarizado, pero al ser la interacción fuerte invariante por paridad, la polarización es necesariamente perpendicular al plano de la reacción, concretamente en la dirección del producto vectorial $\vec{p}_{\mathrm{K}} \wedge \vec{p}_{\Lambda}$. En el experimento se observa una asimetría entre el número de protones producidos en los dos hemisferios definidos por el plano de la reacción. Esta asimetría implica que la probabilidad de desintegración del Λ en protón es del tipo $1 + \alpha \cos\theta$ donde θ es el ángulo entre el espín del Λ y el momento del protón. La dependencia lineal en $\cos\theta$ implica violación de paridad, igual que en el experimento anterior.

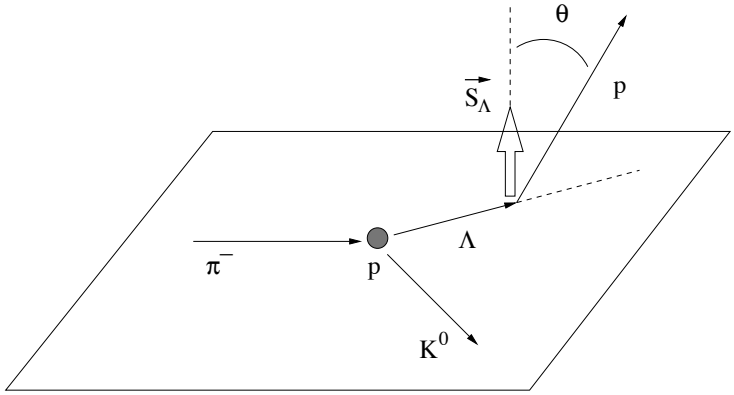


Figura 9.12: Cinemática de la reacción $\pi^- p \to \Lambda K^0$.

La razón última de la violación de paridad en las desintegraciones débiles es que la interacción débil produce siempre neutrinos de helicidad negativa (levógiros) y antineutrinos de helicidad positiva (dextrógiros). Para partículas con masa no nula, como electrones o quarks, ocurre lo mismo si se razona con la quiralidad. La paridad invierte la helicidad y, por tanto, no puede conservarse (véase figura 9.13). Es interesante observar que $\mathcal{CP}$ transforma un neutrino levógiro en un antineutrino dextrógiro y, por tanto, debería conservarse en la interacción débil. En realidad $\mathcal{CP}$ se viola ligeramente, pero ello no se debe en modo alguno al neutrino. La existencia de un único estado de helicidad para el neutrino se demostró en un brillante experimento realizado por Goldhaber, Grodzins y Sunyar[4] en 1958. Determinó que el neutrino ν_e de 900 keV emitido tras captura electrónica del ^{152}Eu es levógiro, o sea con helicidad $\lambda = -1$, definida en (7.69), lo que confirma también que se viola la paridad en la desintegración β del Eu.

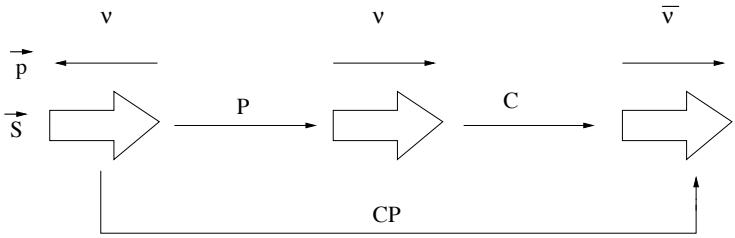


Figura 9.13: Operaciones $\mathcal{P}$, $\mathcal{C}$ y $\mathcal{CP}$ sobre un neutrino de helicidad negativa.

[4] M. Goldhaber *et al., Phys. Rev.,* **109** (1958) 1015.

9.4 Teoría V-A de la desintegración beta

El estudio cuantitativo de las interacciones débiles requiere la utilización de las soluciones de la ecuación de Dirac, $(\gamma_\mu p^\mu - m)\psi(x) = 0$, descrita en el apéndice D, de la que se obtiene $\psi(\mathbf{x})$ el llamado espinor de Dirac, de cuatro componentes y en la que aparecen las matrices 4x4, γ de Dirac. En física de partículas la ecuación de Dirac describe partículas y antipartículas relativistas con espín 1/2.

La hipótesis original de Fermi,[5] parte de la idea que la interacción débil es de la misma forma que la electromagnética; es decir, corriente$\times$corriente. Tomando por ejemplo la difusión $e^- + p \longrightarrow e^- + p$, la amplitud de probabilidad (hamiltoniano) de la transición es,

$$\mathcal{H}_{em} \propto \frac{e^2}{q^2} J_{\text{barión}} \cdot J_{\text{leptón}} \tag{9.4}$$

La corriente eléctrica en el formalismo de Dirac es de la forma

$$j^\mu = -e\bar{\psi}_1 \gamma^\mu \psi_2 \tag{9.5}$$

que, efectivamente, se transforma como un vector bajo las transformaciones de Lorentz y cumple la ecuación de continuidad.

La teoría de Fermi permite explicar toda una serie de desintegraciones, tales como $\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$, $\tau^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\tau$, $\tau^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu \nu_\tau$, $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$, $\pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e$, $\pi^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu_e$, $n \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e$, etc. Los diagramas de Feynman de algunas de estas desintegraciones pueden verse en la figura 9.14. Es interesante observar que todos estos diagramas pueden construirse con sólo dos tipos de corrientes: la corriente leptónica ($l \leftrightarrow \nu_l$ con $l = e, \mu, \tau$) y la corriente hadrónica ($u \leftrightarrow d$). No existen corrientes entre leptones y quarks, y de ello se deriva una importante propiedad de la interacción débil, la conservación del número leptónico.

En su primera formulación, la teoría de Fermi propuso una sencilla interacción puntual entre los cuatro fermiones, mediante un acoplo vectorial entre dos corrientes, con un hamiltoniano de interacción de la forma:

$$\mathcal{H}_{\text{I}} = G_{\text{F}}(\bar{\psi}_1 \gamma^\mu \psi_2)(\bar{\psi}_3 \gamma_\mu \psi_4) = G_{\text{F}}(J_{12})^\mu \cdot (J_{34})_\mu$$

Los campos ψ son espinores de Dirac, las matrices γ^μ son las que aparecen en la ecuación de Dirac, y finalmente G_{F} es una constante. La corriente vectorial J^μ_{ij} puede ser una corriente leptónica (con cualquier tipo de leptón y su correspondiente neutrino) o bien una corriente hadrónica tal como se ha explicado antes, pero cualquiera que que sea la corriente considerada, la constante G_{F} es la misma. Esta importante propiedad de la interacción débil se conoce como universalidad.

[5] E. Fermi, *Z. Physik*, **88** (1934) 161.

Posteriormente, se encontró que había que incluir otro término (el axial) además del vectorial (recuérdese que Fermi no conocía la violación de la paridad); con el término axial se podían explicar las transiciones de Gamow-Teller en las desintegraciones nucleares. Con los espinores de Dirac se pueden formar dos tipos de corrientes, la corriente vectorial $V^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ y la corriente axial $A^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$, donde $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Si en el hamiltoniano de Fermi definimos J^μ como una combinación lineal de ambas, o sea $J^\mu = \alpha V^\mu + \beta A^\mu$, se obtiene violación de paridad cualquiera que sean los valores de α y β, siempre que no sean nulos. La combinación correcta fue postulada por Feynman y Gell-Mann en 1958, basándose en la escasa evidencia experimental que existía en la época. Esta combinación correcta es simplemente $\alpha = 1$ y $\beta = -1$, también llamada teoría V-A, con lo cual se obtiene finalmente:

$$\boxed{\mathcal{H}_{\rm I} = \frac{G_{\rm F}}{\sqrt{2}}(J_{12})^\mu \cdot (J_{34})_\mu \quad \text{siendo} \quad J^\mu = V^\mu - A^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\psi}$$

donde el factor $\sqrt{2}$ se debe únicamente a razones históricas.

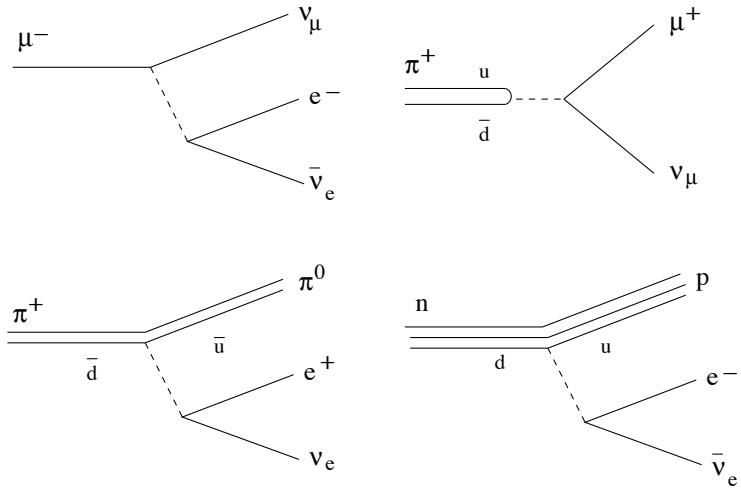


Figura 9.14: Diagramas de Feynman de algunas desintegraciones débiles.

Es interesante observar que, para partículas de masa nula como el neutrino, los operadores $(1 \pm \gamma^5)$ son justamente proyectores sobre estados de helicidad:

$$\psi_{\rm R} = \frac{1}{2}(1+\gamma^5)\psi \qquad \text{y} \qquad \psi_{\rm L} = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\psi$$

siendo $\psi_{\rm R}$ el estado dextrógiro y $\psi_{\rm L}$ el estado levógiro. La estructura V-A de la corriente asegura que el estado dextrógiro del neutrino no puede producirse en la interacción débil, tal como se discutió anteriormente. En realidad, la teoría V-A

es únicamente válida para la corriente leptónica; en ésta se produce la denominada *violación máxima de la paridad*. La corriente hadrónica es del tipo V-A sólo a nivel de los constituyentes fundamentales, es decir los quarks, y además ha de escribirse en la forma:

$$J^{\mu}_{ud} = V_{ud}\bar{\psi}_u\gamma^{\mu}(1-\gamma^5)\psi_d$$

donde se ha introducido un coeficiente V_{ud} que es muy próximo a 1, pero no exactamente 1, según se discutirá más adelante. Los coeficientes de las corrientes V y A se renormalizan por efecto de la interacción fuerte, de forma que el elemento de matriz necesario para calcular la desintegración del neutrón es:

$$< p|J^{\mu}_{ud}|n >= V_{ud}\bar{\psi}_p\gamma^{\mu}(C_{\rm V}+C_{\rm A}\gamma^5)\psi_n$$

donde los coeficientes que multiplican la corriente vectorial y axial, $C_{\rm V}$ y $C_{\rm A}$, son en principio distintos de ± 1. Estos son los coeficientes que incorporan la violación de la paridad. Dado que la carga eléctrica del protón no se modifica por interacción fuerte, es razonable suponer que la corriente vectorial se conserva incluso tras introducir la interacción fuerte (hipótesis CVC) y este razonamiento conduce a $C_{\rm V} = 1$. La corriente axial, por el contrario, sólo se conserva parcialmente (hipótesis PCAC) lo cual conduce a un valor para $C_{\rm A}$ ligeramente distinto de -1 (el valor experimental está en torno a $-1{,}27$ lo que dio origen al nombre de la teoría: V-A). Más adelante se darán ejemplos de la determinación de las constantes $C_{\rm V}$ y $C_{\rm A}$.

9.4.1 Aplicación al cálculo de vidas medias

Vida media del muón

Utilizando la teoría expuesta anteriormente, la anchura de desintegración del muón resulta ser en el límite $m_e \to 0$:

$$\boxed{\Gamma_{\mu} = \frac{G_{\rm F}^2 m_{\mu}^5}{192\pi^3}} \tag{9.6}$$

El valor experimental de la vida media del muón se conoce con una gran precisión, $\tau_{\mu} = 2{,}19703(4)\ 10^{-6}$ s, y permite por tanto extraer el valor de la constante de Fermi $G_{\rm F}$ con una precisión de 10^{-5}. El valor obtenido es:

$$\boxed{G_{\rm F} = 1{,}16639(1)\ 10^{-5} \quad \text{GeV}^{-2}} \tag{9.7}$$

En realidad, para obtener este valor es preciso aplicar una corrección a la fórmula de Γ_{μ} anterior. Esta corrección tiene en cuenta la masa del electrón y correcciones radiativas y su expresión es:

$$\Gamma = \Gamma_0\left(1-8\frac{m_e^2}{m_{\mu}^2}+\ldots\right)\left[1-\frac{\alpha}{\pi}(\frac{\pi^2}{2}-\frac{25}{8})+\ldots\right]$$

Numéricamente el término en α es dominante y la corrección es de $-0{,}44\,\%$.

Vida media del tauón

La vida media del leptón τ se puede calcular de la misma manera. En este caso hay que tener en cuenta que existen numerosos modos de desintegración y, por tanto, se necesitan los cocientes de desintegración en electrones y muones. Experimentalmente se obtiene

$$BR(\tau \to e\bar{\nu}_e\nu_\tau) = (17{,}8 \pm 0{,}1)\,\% \quad \text{y} \quad BR(\tau \to \mu\bar{\nu}_\mu\nu_\tau) = (17{,}4 \pm 0{,}1)\,\%$$

de donde resulta una predicción teórica para la vida media del leptón τ de $\tau_\tau = 0{,}291$ ps, en perfecto acuerdo con el valor experimental de $\tau_\tau = 0{,}2906(11)$ ps, lo cual constituye un importante test de la universalidad de la interacción débil. Por otra parte, es fácil comprobar que la pequeña diferencia entre el modo de desintegración electrónico y el muónico es perfectamente explicable por la diferencia de masas entre ambos leptones.

Vida media del pión

Otro elemento de matriz importante es el que interviene en la desintegración puramente leptónica del pión:

$$< 0|J^\mu_{ud}|\pi >= iV_{ud} f_\pi q^\mu$$

donde f_π es una constante y q^μ el cuadrimomento del pión. La estructura de este elemento de matriz puede deducirse por simples argumentos de invariancia Lorentz, pero el coeficiente f_π no se puede deducir por argumentos teóricos. Su valor experimental está en torno a $f_\pi = 131$ MeV. Los elementos de matriz hadrónicos tienen igualmente interés en el cálculo de desintegraciones nucleares, en las cuales la corriente vectorial da lugar a las transiciones llamadas de tipo Fermi y la corriente axial a las transiciones de tipo Gamow-Teller.

La expresión de la anchura de desintegración del pión según el modo $\pi^- \to \ell^-\bar{\nu}_l$ (siendo $\ell = e, \mu$) resulta ser:

$$\boxed{\Gamma_\pi = \frac{G_F^2|V_{ud}|^2}{8\pi} f_\pi^2 m_\pi m_\ell^2 \left(1 - \frac{m_\ell^2}{m_\pi^2}\right)^2} \tag{9.8}$$

siendo f_π la constante de desintegración del pión. Dado que esta constante es desconocida, la fórmula anterior sirve únicamente para extraer el valor de dicha constante, que resulta ser

$$\boxed{f_\pi = 131 \pm 0{,}4\ MeV} \tag{9.9}$$

Insertando dicho valor (y utilizando $|V_{ud}| = 0{,}973$), se obtiene un valor que difiere en 1 % del valor experimental $\tau_\pi = 2{,}6033(5)\ 10^{-8}$ s. Esta diferencia se

debe de nuevo a correcciones radiativas. En el cálculo anterior se ha utilizado únicamente el modo de desintegración muónico. En efecto, es fácil comprobar que el modo electrónico está muy suprimido, ya que

$$\frac{\Gamma(\pi \to e)}{\Gamma(\pi \to \mu)} = \left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^2 \left(\frac{m_\pi^2 - m_e^2}{m_\pi^2 - m_\mu^2}\right)^2 = 1{,}28 \times 10^{-4}$$

Este cociente está de acuerdo con el valor experimental y constituye otro test de la universalidad de la interacción débil. Es interesante observar que $\Gamma(\mu \to e\bar{\nu}\nu)$ y $\Gamma(\pi \to e\bar{\nu})$ tienen comportamientos muy distintos en el límite $m_e \to 0$. Mientras que el primero tiende a un valor finito, el segundo se anula. Este hecho es una manifestación de la estructura quiral de la interacción débil y puede deducirse utilizando el siguiente razonamiento (véase figura 9.15). Al ser $\pi \to e\bar{\nu}$ una desintegración a dos cuerpos, e y $\bar{\nu}$ tienen momentos opuestos. Al ser el pión un mesón pseudoescalar (espín=0), la proyección del momento angular orbital se anula en la dirección de los momentos y, por tanto, el espín de e ha de compensar el espín de $\bar{\nu}$. Como $\bar{\nu}$ tiene necesariamente helicidad positiva, e ha de tener también helicidad positiva, pero la interacción débil produce únicamente electrones de quiralidad negativa. En el límite $m_e \to 0$ la quiralidad coincide con la helicidad y, por tanto, la desintegración $\pi \to e\bar{\nu}$ no puede ocurrir por conservación del momento angular.

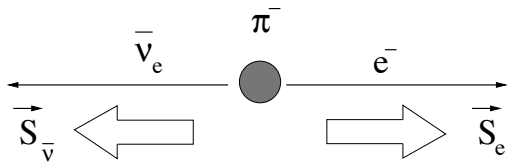


Figura 9.15: Cinemática de la desintegración del pión.

Vida media del neutrón

La desintegración del neutrón, $n \to pe^-\bar{\nu}_e$, aunque aparentemente muy parecida a la del muón, presenta bastantes más complicaciones de cálculo. En efecto, la diferencia de masa Δ entre el neutrón y el protón es muy pequeña y, por tanto, el espacio de fases es muy reducido, dando al neutrón una vida media anormalmente larga de unos 15 minutos. Al no ser la masa del electrón despreciable frente Δ, no se puede tomar el límite $m_e \to 0$ que simplifica considerablemente el cálculo del espacio de fases. El cálculo puede simplificarse sin embargo despreciando el retroceso del protón y se obtiene:

$$\boxed{\Gamma_n = \frac{G_{\rm F}^2 |V_{ud}|^2}{2\pi^3}(C_{\rm V}^2 + 3C_{\rm A}^2) f(x) m_e^5} \qquad (9.10)$$

siendo $x = \Delta/m_e$ y $f(x)$ es la siguiente función:

$$f(x) = \frac{1}{60}\sqrt{x^2-1}(2x^4 - 9x^2 - 8) + \frac{x}{4}\mathrm{Log}(x + \sqrt{x^2-1})$$

que para $m_e \approx 0$, se convierte en $f(x) \approx x^5/30$. Esta aproximación es válida para la desintegración de algunos hiperones, pero no para la del neutrón. Las constantes C_V y C_A son los coeficientes que multiplican la corriente vectorial y axial, respectivamente, en el elemento de matriz hadrónico. Se comentó anteriormente que C_V debe valer 1, pero C_A sólo puede determinarse experimentalmente. Se obtiene

$$C_\mathrm{A}/C_\mathrm{V} = -1{,}267 \pm 0{,}004$$

que conduce a un valor de τ_n de 950 s. Este valor supera el valor experimental $\tau_n = 886 \pm 1$ s en un 7 % ya que las correcciones radiativas son en este caso bastante importantes.

En los cálculos anteriores se ha utilizado el valor $|V_{ud}| = 0{,}973$. Como se explicará más adelante, el hecho de que V_{ud} difiera de 1 tiene gran importancia. Desde el punto de vista experimental, este parámetro se determina a partir de algunas desintegraciones nucleares, concretamente a partir de las llamadas 'desintegraciones de Fermi superpermitidas' ($0^+ \to 0^+$). En este tipo de transiciones sólo interviene la corriente vectorial y el elemento de matriz es fácil de calcular utilizando argumentos de invariancia por isospín. El resultado es

$$ft_{1/2} = \frac{\pi^3\,\mathrm{Log}2}{G_\mathrm{F}^2|V_{ud}|^2 m_e^5} = \frac{2984\,s}{|V_{ud}|^2}$$

donde $t_{1/2}$ es la semivida del isótopo considerado y f, conocida como 'integral de Fermi', incluye las correcciones radiativas integradas sobre el espacio de fases. utilizando todas las desintegraciones tipo $0^+ \to 0^+$ que han sido medidas experimentalmente ($^{10}C \to {}^{10}B$, $^{14}O \to {}^{14}N$, $^{26}Al \to {}^{26}Mg$ etc.) se obtiene un promedio de $ft_{1/2} = 3146 \pm 3$ s, de donde se extrae el siguiente valor:

$$\boxed{|V_{ud}| = 0{,}973 \pm 0{,}001} \tag{9.11}$$

Otros observables

En todos los cálculos anteriores únicamente se ha discutido el cálculo de vidas medias, pero la teoría expuesta permite calcular una gran cantidad de observables experimentales, tales como el espectro de las partículas emitidas, la correlación angular entre la dirección de emisión y la polarización de la partícula que se desintegra, la polarización de las partículas emitidas, etc. Todos estos observables han jugado un papel importante para determinar la estructura de la interacción débil. Como ejemplo, la expresión del espectro de energía de los electrones emitidos en la desintegración de muones polarizados es:

$$\frac{1}{\Gamma_0}\frac{d^2\Gamma}{dx\,d\cos\theta} = x^2\left[(3-2x) \pm |\vec{P}|\cos\theta(2x-1)\right]$$

donde Γ_0 es la anchura total del muón, $x = 2E_e/m_\mu$, $\vec{P}$ es la polarización del muón, y θ es el ángulo entre $\vec{P}$ y el momento del electrón emitido. El vector polarización verifica $0 < |\vec{P}| < 1$ e igualmente $0 < x < 1$. Finalmente el signo $\pm$ se corresponde con la carga eléctrica del muón. Integrando la expresión anterior en el parámetro x, se obtiene la probabilidad de desintegración en función de la dirección de emisión. Para muones negativos totalmente polarizados resulta:

$$\frac{1}{\Gamma_0}\frac{d\Gamma}{d\cos\theta} = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3}\cos\theta)$$

y de la misma forma, integrando sobre $\cos\theta$ se obtiene el espectro de los electrones emitidos:

$$\frac{1}{\Gamma_0}\frac{d\Gamma}{dx} = 2x^2(3 - 2x)$$

Este espectro aparece representado gráficamente en la figura 9.16. El valor $x = 1$ corresponde a $E_e = m_\mu/2$ y no se puede superar por conservación de momento. Sólo es alcanzable si se supone, como es el caso, que $m_e \to 0$.

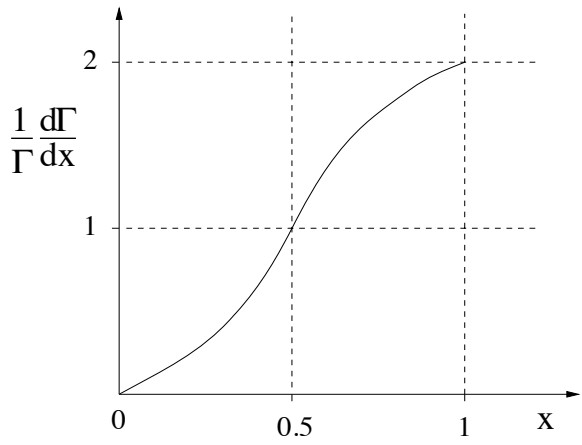


Figura 9.16: Espectro normalizado de los electrones emitidos en la desintegración del muón no polarizado.

9.4.2 Desintegración de partículas extrañas

Las partículas extrañas se desintegran en general por vía débil, en forma leptónica o semileptónica, o bien puramente hadrónica. Algunos ejemplos de desintegración leptónica o semileptónica son $K^+ \to \mu^+\nu_\mu$, $K^+ \to \pi^0 e^+\nu_e$, $\Lambda \to pe^-\bar{\nu}_e$, etc., y para la vía puramente hadrónica se tiene $K^+ \to \pi^+\pi^0$,

$\Lambda \to p\pi^-$, etc. Las vidas medias de las partículas con extrañeza que se desintegran por vía débil son típicamente de $10^{-8}/10^{-10}$ s. Existen también desintegraciones por vía electromagnética para partículas como η, η' o Σ^0 cuyas vidas medias son muy inferiores, entre 10^{-18} y 10^{-21} s. Los diagramas de Feynman de algunas de las desintegraciones mencionadas antes pueden verse en la figura 9.17. Todos estos diagramas pueden construirse añadiendo una nueva corriente débil de tipo hadrónico a las ya conocidas: la corriente $u \leftrightarrow s$. Es interesante observar que la transición $d \leftrightarrow s$ daría lugar a desintegraciones que están muy fuertemente suprimidas como $K^0 \to \mu^+\mu^-$ o bien $K^0 \to \pi^0 e^+ e^-$. Estas transiciones implican cambio de extrañeza sin que haya cambio de carga eléctrica y se conocen como sucesos de tipo FCNC (en inglés *Flavour changing neutral current*), sobre los que se discutirá mas adelante.

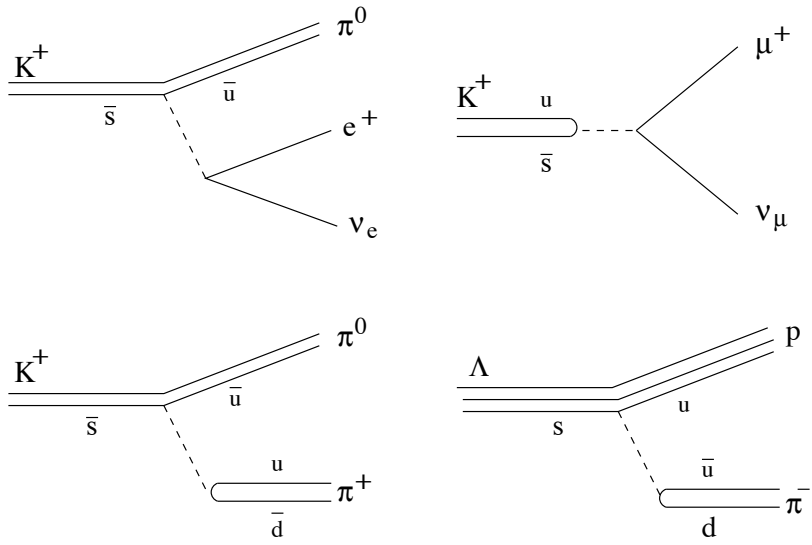


Figura 9.17: Diagramas de Feynman de desintegraciones débiles de partículas con extrañeza.

La teoría de Fermi se puede generalizar fácilmente para incluir las desintegraciones de partículas con extrañeza. Es suficiente añadir una nueva corriente hadrónica débil del tipo:

$$J^\mu_{us} = V_{us}\bar{\psi}_u \gamma^\mu (1-\gamma^5)\psi_s$$

donde se ha introducido un nuevo coeficiente V_{us} cuyo valor se va a tratar de determinar. Para ello se considera en primer lugar la desintegración puramente leptónica $K \to \mu\nu_\mu$ cuya anchura de desintegración puede obtenerse fácilmente por analogía con la desintegración correspondiente del pión. Se obtiene:

$$\boxed{\Gamma(K \to \mu\nu_\mu) = \frac{G_{\rm F}^2 |V_{us}|^2}{8\pi} f_K^2 m_K m_\mu^2 \left(1 - \frac{m_\mu^2}{m_K^2}\right)^2} \qquad (9.12)$$

siendo f_K la constante de desintegración del kaón, análoga a la del pión f_π. Se tiene, por tanto, el cociente:

$$\frac{\Gamma(K \to \mu\nu_\mu)}{\Gamma(\pi \to \mu\nu_\mu)} = 17{,}675 \left(\frac{|V_{us}| f_{\rm K}}{|V_{ud}| f_\pi}\right)^2 = 1{,}335 \pm 0{,}005$$

donde el primer factor numérico, 17,675, depende únicamente de las masas de las partículas que intervienen en las desintegraciones, y el segundo, $1{,}335 \pm 0{,}005$ se obtiene a partir de las vidas medias y cocientes de desintegración del kaón y del pión. Se deduce, por tanto, que $(|V_{us}| f_{\rm K})/(|V_{ud}| f_\pi) = 0{,}275$. Esta relación no permite extraer un valor preciso de $|V_{us}|$ aunque permite concluir que $|V_{us}|$ es bastante inferior a $|V_{ud}|$ ya que, por simetría de isospín, $f_{\rm K}$ no puede diferir demasiado de f_π. Una vez obtenido un valor preciso de $|V_{us}|$ (concretamente $|V_{us}| = 0{,}220$) por el método que se explica a continuación, la relación anterior sirve de hecho para obtener

$$\boxed{f_{\rm K} = 160 \pm 1 \text{ MeV}} \qquad (9.13)$$

Al igual que ocurría para el pión, la desintegración puramente leptónica del kaón en electrón está muy fuertemente suprimida frente al canal del muón. Utilizando la fórmula anterior para la anchura de desintegración se obtiene:

$$\Gamma(K \to e\nu_e)/\Gamma(K \to \mu\nu_\mu) = 2{,}57 \times 10^{-5}$$

en perfecto acuerdo con el valor experimental de $(2{,}44 \pm 0{,}11)10^{-5}$. Este cociente sólo depende de las masas de las partículas y, por tanto, constituye un importante test de la teoría.

Para extraer un valor preciso de $|V_{us}|$, se recurre a las desintegraciones semileptónicas de kaones, conocidas genéricamente como desintegraciones K_{l3}, y más concretamente a las dos siguientes en modo electrónico cuyos cocientes de desintegración son:

$$BR(K^+ \to \pi^0 e^+ \nu_e) = (4{,}9 \pm 0{,}1)\,\%$$

$$BR(K_L^0 \to \pi^\pm e^\mp \nu_e) = (38{,}8 \pm 0{,}3)\,\%$$

Para estudiar estas desintegraciones se necesita el elemento de matriz hadrónico $< \pi | J_{us}^\mu | K >$ que, por simetría de Lorentz, ha de tomar la forma siguiente:

$$< \pi | J_{us}^\mu | K >= f_+ (p_{\rm K} + p_\pi)^\mu + f_- (p_{\rm K} - p_\pi)^\mu$$

siendo $p_{\rm K}$ y p_π los cuadrimomentos del kaón y del pión, respectivamente. En el caso de los modos electrónicos considerados, existe una importante simplificación ya que el término en f_- se anula con la masa del leptón final. Por

tanto es suficiente conocer el valor del factor de forma f_+, que afortunadamente es calculable utilizando la simetría SU(3). Se obtienen los siguientes valores: $f_+ = 1/\sqrt{2}$ para $K^+ \to \pi^0$ y $f_+ = 1$ para $K^0 \to \pi^\pm$. En cuanto a la expresión de la anchura de desintegración semileptónica de kaones, se llega a la expresión:

$$\boxed{(\Gamma_K)_{sl} = \frac{G_F^2 |V_{us}|^2 m_K^5}{192\pi^3} \frac{f_+^2}{4} F\left(\frac{m_\pi}{m_K}\right)} \tag{9.14}$$

donde la función de espacio de fases F es

$$F(x) = 1 - 8x^2 + 8x^6 - x^8 - 12x^4 \mathrm{Log} x^2$$

Esta expresión de $(\Gamma_K)_{sl}$ es formalmente idéntica a la expresión de la anchura de desintegración del muón. La función F es una corrección de espacio de fases que tiene en cuenta la masa no nula del pión (la masa del electrón se ha supuesto nula). La misma función F existe por supuesto en la anchura del muón, pero en ese caso la corrección que introduce es despreciable. Existen unas últimas correcciones a la expresión anterior y que se refieren por una parte a la dependencia en q^2 del factor de forma f_+ (siendo $q = p_K - p_\pi$) y por otra a la radiación emitida por el electrón. Estas correcciones son aproximadamente del 5 %, y una vez aplicadas permiten extraer el siguiente valor promedio de V_{us}:

$$\boxed{|V_{us}| = 0{,}220 \pm 0{,}002} \tag{9.15}$$

También es posible extraer un valor de V_{us}, aunque menos preciso, a partir de las desintegraciones semileptónicas de hiperones.

9.5 La matriz CKM

Los resultados anteriores prueban que se necesitan dos corrientes hadrónicas para explicar las desintegraciones débiles de leptones y hadrones:

$$J^\mu_{ud} = V_{ud}\bar{u}\gamma^\mu(1-\gamma^5)d \qquad \text{siendo} \qquad |V_{ud}| = 0{,}973 \pm 0{,}001$$

$$J^\mu_{us} = V_{us}\bar{u}\gamma^\mu(1-\gamma^5)s \qquad \text{siendo} \qquad |V_{us}| = 0{,}220 \pm 0{,}002$$

donde para simplificar la notación el espinor ψ_q aparece simplemente como q. El hecho de que las constantes V_{ud} y V_{us} no sean iguales a 1 constituye una aparente violación de la universalidad de la interacción débil. Sin embargo estas constantes satisfacen la relación

$$|V_{ud}|^2 + |V_{us}|^2 = 0{,}995 \pm 0{,}002$$

con lo cual se puede hacer la hipótesis (Cabibbo, 1963) de que en realidad $|V_{ud}|^2 + |V_{us}|^2 = 1$ y, por tanto, se puede escribir

$$V_{ud} = \cos\theta_c \qquad \text{y} \qquad V_{us} = \sin\theta_c$$

siendo θ_c el llamado ángulo de Cabibbo. La hipótesis de Cabibbo permite restablecer la universalidad de la interacción. En efecto, se puede definir $d' = \cos\theta_c d + \sin\theta_c s$ y combinar las dos corrientes hadrónicas en una sola cuya expresión

$$J^{\mu}_{ud'} = \bar{u}\gamma^{\mu}(1-\gamma^5)d'$$

ya no contiene ninguna constante. Esta redefinición no es trivial y sólo puede efectuarse al verificarse la importante relación $V_{ud}^2 + V_{us}^2 = 1$. De lo contrario no podrían preservarse las reglas de anticonmutación de los espinores asociados a los quarks. La hipótesis de Cabibbo puede generalizarse a tres generaciones de quarks como se muestra en la figura 9.18.

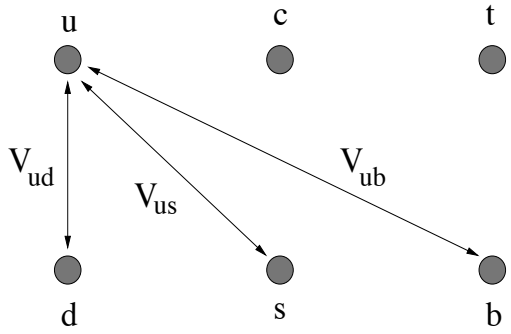


Figura 9.18: Posibles transiciones del quark u asociadas a una corriente débil.

Además de las transiciones $u \leftrightarrow d$ y $u \leftrightarrow s$ se ha añadido una nueva transición $u \leftrightarrow b$, lo cual implica redefinir el estado d' en la forma

$$d' = V_{ud}d + V_{us}s + V_{ub}b \qquad \text{con} \qquad |V_{ud}|^2 + |V_{us}|^2 + |V_{ub}|^2 = 1$$

Esto implica que V_{ub} ha de ser despreciable frente a V_{ud} y V_{us}, y efectivamente así ocurre como se verá más adelante. De la misma forma, se pueden definir transiciones de los quarks c y t hacia estados s' y b' cuyas definiciones son:

$$s' = V_{cd}d + V_{cs}s + V_{cb}b \qquad \text{con} \qquad |V_{cd}|^2 + |V_{cs}|^2 + |V_{cb}|^2 = 1$$

$$b' = V_{td}d + V_{ts}s + V_{tb}b \qquad \text{con} \qquad |V_{td}|^2 + |V_{ts}|^2 + |V_{tb}|^2 = 1$$

Es importante resaltar que únicamente son posibles las transiciones entre un quark de carga $+2/3$ y un quark de carga $-1/3$. En efecto, las transiciones entre quarks de misma carga darían lugar a sucesos tipo FCNC que como se ha comentado están muy suprimidos. La expresión de la corriente hadrónica que incluye todas las transiciones posibles es por tanto

$$J^{\mu}_h = \bar{u}\gamma^{\mu}(1-\gamma^5)d' + \bar{c}\gamma^{\mu}(1-\gamma^5)s' + \bar{t}\gamma^{\mu}(1-\gamma^5)b'$$

que puede expresarse en forma compacta utilizando notación matricial

$$\boxed{J_h^\mu = \overline{Q}_u V_{\text{CKM}} \gamma^\mu (1-\gamma^5) Q_d \quad \text{siendo} \quad Q_u = (u,c,t),\, Q_d = (d,s,b)}$$

y V_{CKM} la llamada matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa. Esta matriz ha de ser una matriz unitaria; es decir, ha de verificar $V^+V = I$ para preservar las reglas de anticonmutación entre espinores. La expresión de la matriz CKM es

$$\boxed{V_{\text{CKM}} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}} \tag{9.16}$$

Llegados a este punto, es relevante preguntarse la razón por la cual no existe nada equivalente a la matriz CKM en el caso leptónico. En efecto, la corriente leptónica puede escribirse igualmente en notación matricial

$$J_l^\mu = \bar{L}_l \gamma^\mu (1-\gamma^5) L_\nu \qquad \text{siendo} \qquad L_l = (e,\mu,\tau) \quad \text{y} \quad L_\nu = (\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau)$$

donde la matriz CKM es simplemente la matriz unidad. En realidad, esto es posible únicamente si se hace la hipótesis de que los neutrinos tienen masa nula. En caso contrario se tiene, al igual que para los quarks de tipo d, dos conjuntos de estados de neutrinos: (ν_1, ν_2, ν_3) y $(\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau)$, que son los análogos de (d, s, b) y (d', s', b'). Si los neutrinos tienen masa nula, la transformación unitaria que pasa de una base de estados a otra deja invariante el resto del lagrangiano (que para neutrinos incluye únicamente el término de energía cinética) y, por tanto, no hay ninguna consecuencia física. Si los neutrinos tienen masa, la redefinición de estados no deja invariante el lagrangiano y, por tanto, los estados $(\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau)$ no coinciden con los estados del lagrangiano libre (ν_1, ν_2, ν_3). La consecuencia física es el fenómeno conocido como oscilaciones de neutrinos.

Más adelante se discutirán en detalle los valores de los coeficientes de la matriz CKM. De momento se puede observar que, en primera aproximación, la matriz (9.16) puede escribirse en la forma

$$V_{\text{CKM}} \approx \begin{pmatrix} \cos\theta_c & \sin\theta_c & \epsilon_1 \\ -\sin\theta_c & \cos\theta_c & \epsilon_2 \\ \epsilon_1 & -\epsilon_2 & 1 \end{pmatrix} \tag{9.17}$$

donde $|\epsilon_1| \ll |\epsilon_2| \ll 1$ de forma que la matriz sea aproximadamente unitaria. Es importante observar que, al ser $|\epsilon_1|$ y $|\epsilon_2|$ pequeños, la matriz correspondiente a las dos primeras generaciones de quarks es también aproximadamente unitaria. Esta matriz se conoce como matriz de Cabibbo y se escribe

$$V_c = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} \\ V_{cd} & V_{cs} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_c & \sin\theta_c \\ -\sin\theta_c & \cos\theta_c \end{pmatrix}$$

La forma de la matriz de Cabibbo permite entender el llamado mecanismo de GIM (Glashow, Iliopoulos, Maiani, 1970), que conduce a postular la existencia del quark c. Dicho mecanismo permite explicar por qué el cociente de la desintegración $K_L \rightarrow \mu^+\mu^-$ está tan suprimido (es del orden de 10^{-8}). Esta desintegración es de tipo FCNC y, por tanto, no puede producirse en primer orden de la teoría de perturbaciones (primer diagrama de la figura 9.19), pero debería producirse en segundo orden (segundo diagrama de la figura 9.19) con lo cual, el cociente de desintegración sería del orden de 10^{-5}, bastante superior al observado experimentalmente. El diagrama de segundo orden contiene el intercambio de un quark u virtual y, por tanto, su amplitud es proporcional a $V_{ud}V_{us}$. Si el quark c existe, puede igualmente intercambiarse y da lugar a una amplitud proporcional a $V_{cd}V_{cs}$. Si se desprecian las masas de los quarks, la amplitud total es por tanto proporcional a $V_{ud}V_{us} + V_{cd}V_{cs}$. Tomando los valores de la matriz de Cabibbo, es fácil comprobar que $V_{ud}V_{us} + V_{cd}V_{cs} = 0$ y, por tanto, la amplitud del diagrama es nula, o en todo caso muy reducida. Este razonamiento permitió postular la existencia del quark c en 1970, antes del descubrimiento del mesón J/ψ en 1973.

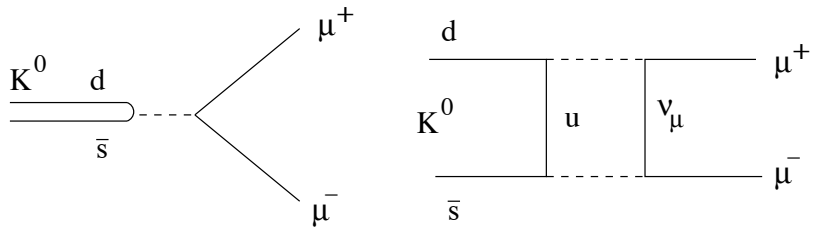


Figura 9.19: Posibles diagramas que explican la desintegración $K_L \rightarrow \mu^+\mu^-$, en primer orden de la teoría de perturbaciones (mediante intercambio de una corriente neutra de tipo FCNC) y en segundo orden de la teoría (mediante intercambio de dos corrientes cargadas).

9.5.1 Desintegración de partículas con encanto

Las partículas con encanto incluyen mesones como $D^{\pm}$, D^0, D_s, etc., y bariones como Λ_c, Σ_c, Ξ_c, etc. Existen igualmente estados ligados $c\bar{c}$ como η_c, J/ψ, etc. Los mesones y bariones se desintegran en general por vía débil con vidas medias del orden de 10^{-12} s. Los estados ligados $c\bar{c}$ se desintegran en general por vía fuerte o electromagnética, y sus vidas medias son muy inferiores. En lo que sigue sólo se discutirán las desintegraciones por vía débil.

Si se comparan las desintegraciones de D^+ y K^+, la primera gran diferencia es la gran multiplicidad de estados finales para D^+. Para K^+ se alcanza casi el 100 % de las desintegraciones con únicamente 6 modos, mientras que para el

D^+ se necesitarían unos 100 modos para sumar cerca del 100 %. Estos modos se llaman modos exclusivos, por oposición a los modos inclusivos que agrupan todos aquellos modos exclusivos de características similares. Se pueden definir los siguientes modos inclusivos para K^+ y D^+:

TABLA 9.1: Modos de desintegración inclusivos de mesones K y D.

partícula	modo inclusivo	BR	denominación
$K^+ \rightarrow$	$l^+\nu_l$	64 %	puramente leptónico
	$\pi l^+\nu_l$	8 %	semileptónico
	$2\pi\,, 3\pi$	28 %	puramente hadrónico
$D^+ \rightarrow$	$l^+\nu_l$	$\approx 10^{-3}$	puramente leptónico
	$Kl^+\nu_l$,...	35 %	semileptónico
	$K\pi$, $K\pi\pi$,...	65 %	puramente hadrónico

donde lo más notable para D^+ es la supresión de los 2 modos puramente leptónicos ($l = e\,, \mu$), así como la importancia que adquieren los modos semileptónicos. Las desintegraciones débiles de los hadrones con encanto se pueden explicar mediante la teoría de Fermi, añadiendo la corriente

$$J^{\mu}_{cs'} = \bar{c}\gamma^{\mu}(1-\gamma^5)s' \qquad \text{siendo} \qquad s' = V_{cd}d + V_{cs}s$$

Utilizando la matriz de Cabibbo se deduce que $V_{cd} = -\sin\theta_c$ y $V_{cs} = \cos\theta_c$, lo cual explica por qué los hadrones con encanto se desintegran preferentemente en hadrones con extrañeza. Se dice que estas desintegraciones están favorecidas por Cabibbo, mientras que las que no contienen extrañeza están suprimidas por Cabibbo. La corriente $J_{cs'}$ permite explicar, al menos a nivel de diagramas de Feynman, todas las desintegraciones débiles de particulas con encanto. La figura 9.20 muestra diagramas de algunas de estas desintegraciones, $D^+ \rightarrow \bar{K}^0 e^+\nu_e$, $D^0 \rightarrow K^-\pi^+$ y $D_s \rightarrow \tau^+\nu_\tau$, que son ejemplos típicos de desintegración semileptónica, puramente hadrónica y puramente leptónica, respectivamente.

En las dos primeras desintegraciones, el quark que acompaña al quark c dentro del hadrón no interviene en la desintegración, mientras que en el tercer caso, se aniquila con el quark c. Los dos primeros diagramas se llaman de tipo 'espectador', mientras que el tercer diagrama es de tipo 'aniquilación'. El llamado modelo espectador es un modelo que predice los modos de desintegración inclusivos del quark c partiendo de la hipótesis de que los modos de desintegración de tipo espectador son dominantes. Esto reduce en la práctica las desintegraciones posibles del quark c a únicamente 3 modos, $c \rightarrow s(d)e^+\nu_e$, $s(d)\mu^+\nu_\mu$ y $s(d)u\bar{d}(\bar{s})$ tal como se muestra en la figura 9.21. Se han indicado entre paréntesis los modos suprimidos por Cabibbo y se han omitido los modos de desintegración en un leptón τ ya que la masa de dicho leptón es superior a la masa del quark c.

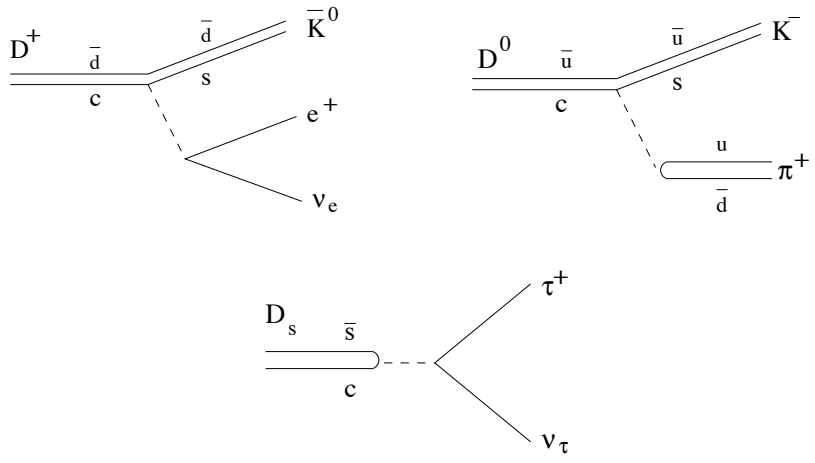


Figura 9.20: Diagramas de Feynman de algunas desintegraciones de hadrones con encanto.

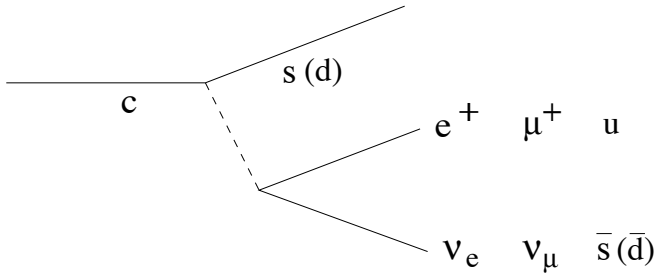


Figura 9.21: Desintegraciones del quark c según el modelo espectador.

Si se supone que todas las partículas en el estado final tienen masas despreciables frente a m_c y no interaccionan, siguiendo la filosofía del modelo de partones, la anchura de desintegración del quark c se puede calcular utilizando la expresión de la desintegración del muón y sumando para todos los modos finales. Se obtiene

$$\Gamma_c = (|V_{cs}|^2 + |V_{cd}|^2)[2 + 3(|V_{ud}|^2 + |V_{us}|^2)]\Gamma_0 = 5\Gamma_0 \tag{9.18}$$

siendo

$$\boxed{\Gamma_0 = \frac{G_F^2 m_c^5}{192\pi^3}} \tag{9.19}$$

donde se ha tenido en cuenta que la matriz de Cabibbo es unitaria, y que los quarks pueden aparecer en tres estados de color. Es interesante observar que esta expresión no contiene factores de forma, al tratarse de un cálculo de modos inclusivos. A partir de esta expresión es fácil obtener el cociente de desintegración semileptónico

$$BR(c \to e) = BR(c \to \mu) = 1/5 = 20\,\%$$

mientras que la vida media del quark c resulta ser de $\tau_c = 1/\Gamma_c = 1{,}9 \cdot 10^{-12}$ s, suponiendo que $m_c = 1{,}25$ GeV. Finalmente, el modelo espectador predice la misma vida media y el mismo BR semileptónico para todos los hadrones con encanto. Experimentalmente se obtienen sin embargo las siguientes medidas para D^+ y D^0:

$$BR(D^+ \to e^+) = (17{,}2 \pm 1{,}9)\,\% \quad \tau(D^+) = (1{,}051 \pm 0{,}013)\,10^{-12}\,s$$

$$BR(D^0 \to e^+) = (6{,}9 \pm 0{,}3)\,\% \quad \tau(D^0) = (0{,}412 \pm 0{,}003)\,10^{-12}\,s$$

Vemos que el modelo espectador predice, al menos de forma cualitativa, las propiedades de D^+ y D^0, aunque se acerca mucho más a los resultados experimentales en el caso de D^+. La explicación se encuentra en la existencia de diagramas adicionales que no son de tipo espectador, y que en el caso de D^+ están suprimidos por Cabibbo, mientras que en el caso de D^0 están favorecidos, tal como muestra la figura 9.22.

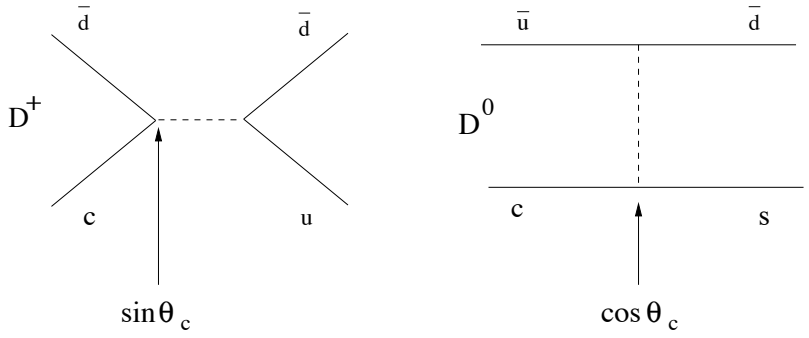


Figura 9.22: Desintegraciones inclusivas de D^+ y D^0 no incluidas en el modelo espectador.

Los mesones D tienen igualmente desintegraciones puramente leptónicas, aunque están muy suprimidas, lo cual es fácil de explicar. En efecto, a partir de

las expresiones utilizadas para los mesones K y π, es fácil expresar por ejemplo la anchura de la desintegración $D^+ \to \mu^+ \nu_\mu$ que resulta ser

$$\Gamma(D^+ \to \mu^+ \nu_\mu) = \frac{G_F^2 |V_{cd}|^2}{8\pi} f_D^2 m_D m_\mu^2 \left(1 - \frac{m_\mu^2}{m_D^2}\right)^2$$

siendo f_D la constante de desintegración del mesón D. Obsérvese que, al tratarse de un modo exclusivo, no se puede evitar la aparición de factores de forma. Actualmente no se dispone de una medida precisa para el cociente de desintegración correspondiente, $BR(D^+ \to \mu^+ \nu_\mu) \approx 8 \cdot 10^{-4}$. Si se supone $f_D \approx 200$ MeV, se obtiene $BR(D^+ \to \mu^+ \nu_\mu) = 4 \cdot 10^{-4}$ que está de acuerdo con el valor experimental. La supresión de los modos puramente leptónicos se debe a que las anchuras de desintegración son proporcionales a m_D mientras que los diagramas de tipo espectador aumentan con la masa del quark en la forma m_c^5. En el caso de las desintegraciones $D_S \to \tau$, la masa del leptón τ hace crecer el BR hasta un valor no despreciable que ha sido medido experimentalmente:

$$BR(D_s \to \tau^+ \nu_\tau) = (6{,}4 \pm 1{,}5)\,\%$$

A partir de la expresión teórica de la anchura de esta desintegración se puede extraer el valor de la constante de desintegración f_{D_s}, cuyo valor resulta ser efectivamente de unos 200 MeV.

En principio, tanto V_{cd} como V_{cs} pueden obtenerse a partir de las desintegraciones semileptónicas $D \to \pi l \nu_l$ y $D \to K l \nu_l$, utilizando cálculos similares a los empleados para extraer V_{us} a partir de $K \to \pi l \nu_l$. En el caso de $D \to \pi l \nu_l$, las medidas no son lo suficientemente precisas para poder extraer un valor interesante de V_{cd}. Por el contrario, se tienen las siguientes medidas experimentales de los modos $D \to K l \nu_l$:

$$BR(D^+ \to \bar{K}^0 l^+ \nu_l) = (6{,}8 \pm 0{,}8)\,\%$$

$$BR(D^0 \to K^- l^+ \nu_l) = (3{,}4 \pm 0{,}2)\,\%$$

Utilizando la siguiente expresión para la anchura de desintegración

$$(\Gamma_D)_{sl} = \frac{G_F^2 |V_{cs}|^2 m_D^5}{192\pi^3} \frac{f_+^2}{4} F\left(\frac{m_K}{m_D}\right)$$

siendo la función de espacio de fases $F(x) \approx 1 - 8x^2 + \ldots$ y el factor de forma $f_+ \approx 0{,}7$, se logra obtener el resultado $|V_{cs}| \approx 1$ con 10 % de error. Al igual que para V_{us}, es necesario hacer correcciones para tener en cuenta la dependencia $f_+(q^2)$. Estas correcciones son en este caso relativamente importantes, del orden del 30 %. Sin embargo, el valor más preciso de V_{us} se obtiene actualmente a partir de la medida de los cocientes de desintegración del bosón W. En efecto, el cociente $BR(W \to had)/BR(W \to l)$ es proporcional a la suma $\sum |V_{ij}|^2$ con $i = u, d$ y $j = c, s, b$. En esta suma todos los coeficientes salvo $|V_{cs}|$ están medidos con precisión o bien son despreciables, lo cual permite extraer el valor

de $|V_{cs}|$. Finalmente, V_{cd} puede extraerse a partir de la sección eficaz de ciertas reacciones de neutrinos, concretamente de la reacción $\nu_\mu d \to \mu^- c \to \mu^- \mu^+ X$, caracterizada por la aparición de dimuones en el estado final.

9.5.2 Desintegración de partículas con belleza

Las partículas con belleza son mesones que contienen el quark b como B^+,B^0, B_s, etc. y bariones como Λ_b, etc. Los estados ligados $b\bar{b}$ como η_b, Υ, χ_b, etc. se desintegran por vía fuerte o electromagnética. Las vida media de los hadrones con belleza es del orden de 10^{-12} s, sin grandes diferencias entre ellos, al contrario de lo que ocurría para los hadrones con encanto. Los hadrones B, al igual que los hadrones D, tienen una gran multiplicidad de estados finales y, por tanto, es conveniente analizar los modos inclusivos. La siguiente tabla permite comparar los modos inclusivos de mesones D y B, que son bastante parecidos:

TABLA 9.2: Modos de desintegración inclusivos de mesones D y B.

partícula	modo inclusivo	BR	denominación
$D \to$	$l\nu_l$	$\approx 0\,\%$	puramente leptónico
	$Kl\nu_l$,...	35 %	semileptónico
	$K\pi$, $K\pi\pi$,...	65 %	puramente hadrónico
$B \to$	$l\nu_l$	$\approx 0\,\%$	puramente leptónico
	$Dl\nu_l$,...	25 %	semileptónico
	$D\pi$, $D\pi\pi$,...	75 %	puramente hadrónico

La teoría de Fermi permite explicar la desintegración de las partículas con belleza introduciendo dos nuevas corrientes hadrónicas:

$$J^\mu_{cb} = V_{cb}\bar{c}\gamma^\mu(1-\gamma^5)b \qquad \text{y} \qquad J^\mu_{ub} = V_{ub}\bar{u}\gamma^\mu(1-\gamma^5)b$$

siendo $|V_{cb}| \approx 0{,}04$ y $|V_{ub}| \approx 0{,}003$. Obsérvese sin embargo que para el quark c se tenía $|V_{cd}|^2 + |V_{cs}|^2 = 1$, mientras que ahora se tiene $|V_{cb}|^2 + |V_{ub}|^2 \ll 1$, dado que el coeficiente dominante es V_{tb}, que no puede intervenir en las desintegraciones del quark b. Este hecho tiene una consecuencia física muy importante, la larga vida media del quark b, no muy distinta de la del quark c, a pesar de ser su masa considerablemente mayor. Al igual que ocurría para los mesones D, los numerosos modos de desintegración exclusivos de los mesones B, tales como $B \to Dl\nu, D^*l\nu, D\pi, D^*\pi, DD_s, D^*D_s$, etc. se pueden explicar fácilmente mediante diagramas de Feynman de tipo espectador. Dado que $|V_{cb}| \gg |V_{ub}|$, en la gran mayoría de las desintegraciones de mesones B se producen mesones D. Las desintegraciones como $B \to \pi\pi, K\pi, K\gamma$, etc. están muy suprimidas y no serán estudiadas aquí.

La herramienta esencial para calcular los modos de desintegración inclusivos del quark b es de nuevo el modelo espectador. En este caso existen 5 modos inclusivos, como muestra la figura 9.23, que son $b \to ce^-\bar{\nu}_e, c\mu^-\bar{\nu}_\mu, c\tau^-\bar{\nu}_\tau, c\bar{u}d$ y $c\bar{c}s$, donde se ha omitido para simplificar los modos suprimidos por Cabibbo.

Si se supone que todas las partículas en el estado final tienen masas despreciables frente a m_b y no interaccionan, la anchura de desintegración total del quark b es

$$\boxed{\Gamma_b = |V_{cb}|^2(1+1+1+3+3)\Gamma_0 = 9|V_{cb}|^2\Gamma_0} \tag{9.20}$$

siendo

$$\boxed{\Gamma_0 = \frac{G_F^2 m_b^5}{192\pi^3}} \tag{9.21}$$

donde de nuevo se ha tenido en cuenta que la matriz de Cabibbo es unitaria y que los quarks aparecen en 3 estados de color.

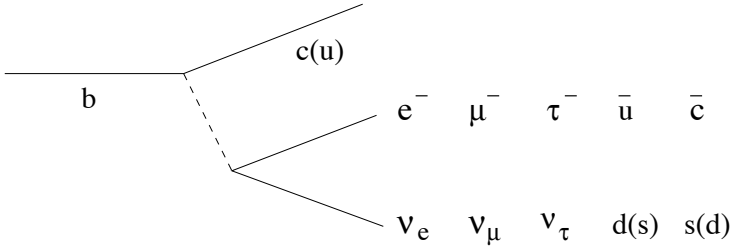


Figura 9.23: Desintegraciones del quark b según el modelo espectador.

A partir de esta expresión de la anchura, se obtiene el cociente de desintegración semileptónico

$$BR(b \to e) = BR(b \to \mu) = 1/9 = 11\,\%$$

mientras que la vida media del quark b resulta ser de $\tau_b = 1/\Gamma_b = 1{,}5 \cdot 10^{-12}$ s, suponiendo que $m_b = 4{,}20$ GeV. El modelo espectador predice igualmente la misma vida media y el mismo BR semileptónico para todos los hadrones con belleza. El acuerdo entre estas predicciones y los resultados experimentales es bastante mejor que para el quark c. Se tienen en efecto las siguientes medidas experimentales:

$$BR(B^+ \to l^+) = 10{,}2 \pm 0{,}9\,\% \qquad \text{y} \qquad BR(B^0 \to l^+) = 10{,}5 \pm 0{,}8\,\%$$

donde se han promediado los BR de e y μ. Se obtienen igualmente valores muy parecidos para las distintas vidas medias:

partícula	B^+	B^0	B_s	Λ_b
τ(ps)	1.67(2)	1.54(2)	1.46(6)	1.23(8)

De la misma forma que para los mesones D, los modos de desintegración puramente leptónicos de los mesones B están fuertemente suprimidos, al no

tratarse de procesos de tipo espectador, sino de procesos de aniquilación. Por ejemplo, la anchura de la desintegración del modo $B^+ \to \mu^+ \nu_\mu$ es

$$\Gamma(B^+ \to \mu^+ \nu_\mu) = \frac{G_F^2 |V_{ub}|^2}{8\pi} f_B^2 m_B m_\mu^2 \left(1 - \frac{m_\mu^2}{m_B^2}\right)^2$$

siendo f_B la constante de desintegración del mesón B. Tomando $|V_{ub}| \approx 0{,}003$ y $f_B \approx 200$ MeV, se obtiene $BR(B^+ \to \mu^+ \nu_\mu) \approx 3 \cdot 10^{-7}$. Experimentalmente sólo se dispone de un límite superior que es $2 \cdot 10^{-5}$. El BR de la desintegración $B \to \tau \nu_\tau$ es mayor pero más difícil de medir y, por tanto, no se dispone en la actualidad de ninguna medida de f_B. Esta constante es importante porque interviene en análisis de violación de CP con mesones B.

Las desintegraciones semileptónicas exclusivas del tipo $B \to D(D^*)\ell\nu_\ell$ y $B \to \pi(\rho)\ell\nu_\ell$ permiten acceder experimentalmente a los coeficientes de la matriz CKM V_{cb} y V_{ub}, aunque en la práctica sólo se dispone de medidas precisas para las de tipo $B \to D(D^*)$ que son las siguientes

TABLA 9.3: Desintegraciones semileptónicas de mesones B^+ y B^0.

partícula	modo exclusivo	BR	precisión
$B^+ \to$	$D^0 \ell^+ \nu_\ell$	$2{,}15 \pm 0{,}22\,\%$	10 %
	$\bar{D}^{*0} \ell^+ \nu_\ell$	$5{,}30 \pm 0{,}80\,\%$	15 %
$B^0 \to$	$D^- \ell^+ \nu_\ell$	$2{,}11 \pm 0{,}14\,\%$	7 %
	$D^{*-} \ell^+ \nu_\ell$	$4{,}60 \pm 0{,}21\,\%$	5 %

Para las desintegraciones tipo $B \to D$, se puede utilizar de nuevo

$$(\Gamma_B)_{sl} = \frac{G_F^2 |V_{cb}|^2 m_B^5}{192\pi^3} \frac{f_+^2}{4} F\left(\frac{m_D}{m_B}\right)$$

siendo la función de espacio de fases $F(x) \approx 1 - 8x^2 + \ldots$ y el factor de forma $f_+ \approx 0{,}7$, con correcciones $f_+(q^2)$ importantes, del orden del 40 %. Sin embargo, como muestra la tabla anterior, las desintegraciones dominantes no son las de tipo $B \to D$ sino las de tipo $B \to D^*$. El cálculo de la anchura de estas desintegraciones es bastante más complejo, ya que dependen de 4 factores de forma en vez de un único factor f_+ en el caso $B \to D$. Sin embargo, es posible encontrar relaciones entre estos factores de forma utilizando la teoría conocida como HQET (*Heavy Quark Effective Theory*) y reducir el problema a la obtención de un único factor, también en el caso de $B \to D^*$. Promediando todas las medidas disponibles, incluyendo las inclusivas ($b \to c l \nu_l$), se obtiene finalmente

$$\boxed{|V_{cb}| = 0{,}041 \pm 0{,}002} \tag{9.22}$$

Aunque las desintegraciones $B \to \pi(\rho) l \nu_l$ sirven para medir V_{ub}, las medidas inclusivas de la desintegración $b \to u l \nu_l$ son en este caso las que permiten

obtener mayor precisión. Sin embargo, la técnica de medida no es nada simple ya que las desintegraciones semileptónicas de b están totalmente dominadas por el modo $b \to c$. El espectro de los electrones emitidos en la desintegración inclusiva $b \to q e^- \bar{\nu}_e$ sigue la ley

$$\frac{d\Gamma}{dx} = A \frac{x^2(\eta - x)^2}{(1-x)^3}[(1-x)(3-2x) + (1-\eta)(3-x)]$$

donde A es una constante de normalización, $\eta = 1-(m_q/m_b)^2$ y la variable x se define como $x = 2E_e/m_b$ (limitada cinemáticamente al intervalo $0 < x < \eta$). Obsérvese que si $q = u$, entonces $m_q = 0$ y $\eta = 1$, con lo cual se obtiene el mismo espectro que para la desintegración semileptónica del muón; es decir, $d\Gamma/dx$ es proporcional a $x^2(3-2x)$ con $0 < x < 1$. Para el caso $q = c$, usando los valores $m_b = 4{,}20$ y $m_c = 1{,}25$, se obtiene $\eta = 0{,}91$ y, por tanto, la variable x no puede alcanzar nunca el valor 1. Los sucesos observados con $x > 0{,}91$ proceden por tanto necesariamente de la desintegración $b \to u$ y de esta forma se pueden aislar sobre el fondo de sucesos $b \to c$ que dominan el resto del espectro. La figura 9.24 muestra los espectros normalizados de los electrones emitidos en las desintegraciones semileptónicas $b \to u e \bar{\nu}_e$ y $b \to c e \bar{\nu}_e$.

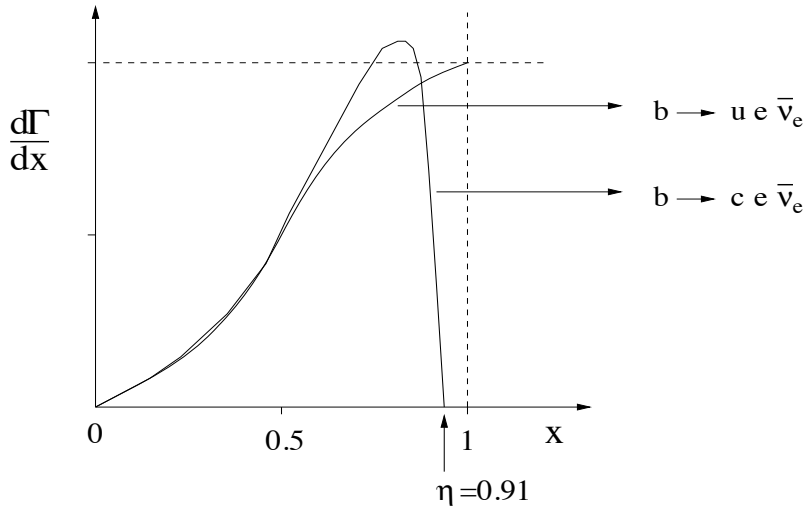


Figura 9.24: Espectros normalizados de los electrones emitidos en las desintegraciones semileptónicas del quark b.

El espectro de los electrones emitidos es, por tanto,

$$d\Gamma/dx \sim |V_{ub}|^2 d\Gamma(b \to u)/dx + |V_{cb}|^2 d\Gamma(b \to c)/dx$$

de donde se llega a la expresión

$$\frac{N_e(\eta < x < 1)}{N_e(0 < x < 1)} \approx \frac{|V_{ub}|^2}{|V_{cb}|^2} \int_\eta^1 \frac{d\Gamma\,(b \to u)}{dx} dx$$

que permite extraer el cociente $|V_{ub}/V_{cb}|$. Utilizando el valor de $|V_{cb}|$ obtenido anteriormente, se llega al siguiente resultado:

$$\boxed{|V_{ub}| = 0{,}0036 \pm 0{,}0007} \tag{9.23}$$

9.6 Violación de CP

En presencia únicamente de dos generaciones de quarks, la matriz CKM toma una forma particularmente simple, la llamada matriz de Cabibbo. En realidad, la forma más general de una matriz unitaria 2×2 contiene además fases complejas y se escribe

$$V_c = \begin{pmatrix} \cos\theta_c e^{i\delta_{11}} & \sin\theta_c e^{i\delta_{12}} \\ -\sin\theta_c e^{i\delta_{21}} & \cos\theta_c e^{i\delta_{22}} \end{pmatrix}$$

La condición de unitariedad implica la relación entre las fases $\delta_{11} + \delta_{22} = \delta_{12} + \delta_{21}$ y, por tanto, la forma más general de la matriz contiene 1 parámetro real y 3 fases complejas. Sin embargo, las fases pueden reabsorberse dentro de los campos asociados a los quarks y finalmente sólo queda el parámetro real. La existencia de fases complejas no triviales tiene una consecuencia física muy importante ya que implica la violación de CP. La violación de CP fue observada experimentalmente en 1964, concretamente en el modo de desintegración $K_L \to \pi^+\pi^-$, pero no puede explicarse con sólo 2 generaciones de quarks. En 1973, Kobayashi y Maskawa observaron que, en caso de existir una nueva generación de quarks, no pueden reabsorberse todas las fases complejas de la matriz CKM ya que queda una fase compleja no trivial. Existe, por tanto, la posibilidad de explicar la violación de CP utilizando esta fase compleja. El quark b fue efectivamente descubierto en 1977 y el quark t en 1995. Actualmente se piensa que toda la violación de CP que se observa en desintegraciones de mesones K y mesones B es explicable mediante la fase compleja no trivial de la matriz CKM para 3 generaciones de quarks.

El razonamiento para probar la existencia de esta fase compleja no trivial es básicamente como se explica a continuación. Una matriz unitaria $N \times N$ tiene en su forma más general N^2 parámetros libres, de los cuales $N(N-1)/2$ son módulos reales y $N(N+1)/2$ son fases complejas. Por otra parte $2N - 1$ fases complejas se pueden reabsober dentro de los campos asociados a los quarks, ya que hay $2N$ campos de quarks pero la interacción es invariante si se multiplican todos ellos por una misma fase. Si se aplican estos resultados a una

matriz 2×2, se obtiene 1 módulo real y 3 fases complejas, pero todas ellas se pueden reabsorber, tal como se ha explicado antes para la matriz de Cabibbo. En cambio, para una matriz 3×3, se obtienen 3 módulos reales y 6 fases complejas, de las cuales únicamente se pueden reabsorber 5. Por tanto, el número mínimo de generaciones de quarks para obtener fases complejas no triviales es de 3.

Para proseguir la discusión sobre la violación de CP asociada a la matriz CKM, es necesario utilizar una parametrización de dicha matriz. Existen varias parametrizaciones posibles. La parametrización de Wolfenstein es particularmente simple y muy útil ya que muestra claramente la jerarquía en el orden de magnitud de los diversos parámetros gracias a la utilización de potencias del parámetro λ:

$$V_{\text{CKM}} \approx \begin{pmatrix} 1-\lambda^2/2 & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1-\lambda^2/2 & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1-\rho-i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} \tag{9.24}$$

Obsérvese que la matriz depende efectivamente de 3 parámetros reales, λ, A y ρ, y una única fase compleja asociada al parámetro real η. Las potencias de λ aumentan a medida que los coeficientes se alejan de la diagonal, tal como se observa experimentalmente. Si se identifica el parámtero λ con $\sin\theta_c$, se obtiene la matriz de Cabibbo para las 2 primeras generaciones de quarks. Finalmente, obsérvese que la matriz CKM según la parametrización de Wolfenstein es unitaria, salvo términos de orden λ^4 que son despreciables. Con objeto de extraer los valores de los parámetros λ, A, ρ y η, se incluye a continuación una tabla con los valores experimentales de los coeficientes de la matriz CKM, así como una breve indicación del método seguido para efectuar la medida.

TABLA 9.4: Valores experimentales de los coeficientes de la matriz CKM.

coeficiente	valor experimental	método de medida
$\|V_{ud}\|$	$0{,}973 \pm 0{,}001$	desintegraciones nucleares $0^+ \to 0^+$
$\|V_{us}\|$	$0{,}220 \pm 0{,}002$	desintegraciones $K \to \pi l \nu$
$\|V_{ub}\|$	$0{,}0036 \pm 0{,}0007$	desintegraciones $b \to u l \nu$
$\|V_{cd}\|$	$0{,}224 \pm 0{,}016$	reacciones de neutrinos
$\|V_{cs}\|$	$0{,}996 \pm 0{,}013$	desintegraciones del bosón W
$\|V_{cb}\|$	$0{,}041 \pm 0{,}002$	desintegraciones $B \to D(D^*) l \nu$
$\|V_{td}\|$	$0{,}0079 \pm 0{,}0015$	oscilaciones $B^0 - \bar{B}^0$
$\|V_{ts}\|$	$> \|V_{td}\|/0{,}25$	oscilaciones $B_s - \bar{B}_s$
$\|V_{tb}\|$	$0{,}94 \pm 0{,}25$	desintegraciones $t \to b l \nu$

Las medidas de la mayoría de estos coeficientes se han discutido anteriormente. El valor de $|V_{tb}|$ también ha sido medido experimentalmente utilizando las desintegraciones semileptónicas del quark t producido en colisionadores hadrónicos, pero el error de esta medida es en la actualidad muy grande, del orden del

25 %. Finalmente, el valor de $|V_{td}|$ puede extraerse, aunque de forma indirecta, a partir de la diferencia de masa entre B^0 y $\bar{B}^0$. Esta diferencia de masa, que da lugar al fenómeno conocido como oscilaciones $B^0 - \bar{B}^0$, es proporcional a $|V_{tb}V_{td}|^2$. En efecto, la figura 9.25 muestra uno de los diagramas que explican esta diferencia de masa, donde puede observarse el intercambio de un quark t virtual. Si se supone que $V_{tb} = 1$, se puede extraer un valor de $|V_{td}|$. De la misma forma, podría extraerse un valor de $|V_{ts}|$ a partir de la oscilación $B_s - \bar{B}_s$, que también ha sido observada experimentalmente, pero al ser demasiado rápida sólo permite actualmente obtener un límite inferior.

Los valores de los parámetros de Wolfenstein se pueden obtener como se explica a continuación. El parámetro λ se puede identificar con $|V_{us}|$ y el parámetro A es simplemente $|V_{cb}|/\lambda^2$ con lo cual

$$\boxed{\lambda = 0{,}220 \pm 0{,}002 \qquad \text{y} \qquad A = 0{,}85 \pm 0{,}04} \tag{9.25}$$

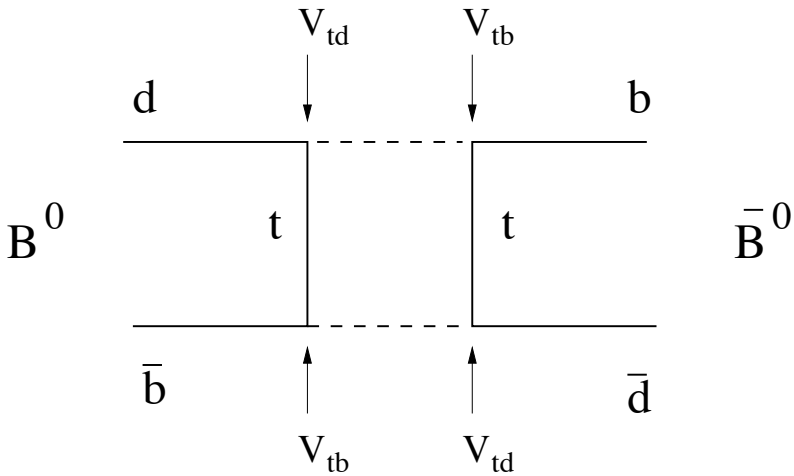


Figura 9.25: Diagrama que explica la diferencia de masa entre B^0 y $\bar{B}^0$.

Para obtener ρ y η, se definen los parámetros

$$r_1 = |\rho - i\eta| = |V_{ub}|/|V_{cb}V_{us}| \quad \text{y} \quad r_2 = |1 - \rho - i\eta| = |V_{td}|/|V_{cb}V_{us}|$$

donde se ha utilizado la relación $|V_{cb}V_{us}| = A\lambda^3$. A partir de r_1 y r_2, que se pueden interpretar como los radios de dos círculos en el plano $\rho - \eta$ tal como muestra la figura 9.26, es fácil deducir

$$\rho = \frac{1}{2}(1 - r_2^2 + r_1^2) = 0{,}20 \pm 0{,}15 \qquad \text{y} \qquad \eta = \sqrt{r_1^2 - \rho^2} = 0{,}35 \pm 0{,}11$$

El parámetro η está a 3 desviaciones estándar del valor nulo lo cual implica que ha de existir violación de CP. Este resultado se ha obtenido sin embargo sin utilizar ninguna medida directa de violación de CP. Existen igualmente medidas directas que prueban la violación de CP en algunas desintegraciones de mesones K y B. A partir de desintegraciones del tipo $K_L \to \pi\pi$ se obtiene

$$\eta(1-\rho) = 0{,}32 \pm 0{,}09$$

y a partir de desintegraciones del tipo $B \to J/\psi K$ se obtiene

$$\sin(2\beta) = 0{,}78 \pm 0{,}08$$

donde el ángulo β se define en la figura 9.26. Estas medidas directas de violación de CP están en perfecto acuerdo con los valores de ρ y η deducidos anteriormente. Utilizando dichos valores, se obtiene en efecto

$$\eta(1-\rho) = 0{,}28 \quad \text{y} \quad \sin(2\beta) = 2\,\sin\beta\,\cos\beta = \frac{2\eta(1-\rho)}{\eta^2 + (1-\rho)^2} = 0{,}73$$

La conclusión es que la matriz CKM explica todas las medidas directas de violación de CP con mesones K y B. Incluyendo estas medidas directas se pueden obtener valores más precisos de ρ y η:

$$\boxed{\rho = 0{,}22 \pm 0{,}10 \qquad \text{y} \qquad \eta = 0{,}35 \pm 0{,}05} \tag{9.26}$$

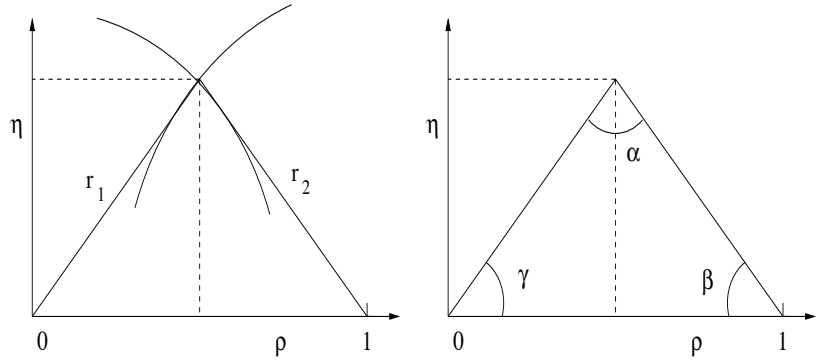


Figura 9.26: Definición de los radios r_1, r_2 y de los ángulos α, β, γ, en el plano de los parámetros $\rho - \eta$.

9.7 Ejercicios

9.1. Violación de paridad en la desintegración $\Lambda \to p\pi^-$.
a) Demostrar que en la desintegración $\Lambda \to p\pi^-$ la presencia de la onda S y de la onda P simultaneamente implica la violación de paridad.
b) Demostrar que la distribución angular del protón emitido respecto al espín del Λ es del tipo $1 - \alpha \cos\theta$ donde $\alpha \neq 0$ sólo si hay interferencia entre la onda S y la onda P.
c) Demostrar que en la reacción $p\pi^- \to \Lambda K^0$ el Λ sólo puede polarizarse en la dirección perpendicular al plano de la reacción.
d) Calcular la asimetría de los protones emitidos en los dos hemisferios definidos por el plano de la reacción.

9.2. Cálculo de la vida media del muón.
a) Consideremos la desintegración del muón en el límite $m_e = 0$. Sabiendo que la amplitud de desintegración del muón es

$$\overline{|T|^2} = \frac{4G_F^2}{m_\mu m_\nu m_e m_\nu}(p_\mu \cdot p_{\nu_e})(p_{\nu_\mu} \cdot p_e)$$

demostrar que la anchura de desintegración se puede escribir en la forma:

$$\Gamma = \frac{G_F^2 m_\mu}{4\pi^3}\int\int dxdy(p_\mu \cdot p_{\nu_e})(p_{\nu_\mu} \cdot p_e)$$

donde $x = 2E_e/m_\mu$ e $y = (p_\mu - p_{\nu_\mu})^2/m_\mu^2 = 1 - 2E_{\nu_\mu}/m_\mu$
b) Demostrar que la energía de los electrones emitidos sigue la ley:

$$\frac{1}{\Gamma_0}\frac{d\Gamma}{dx} = 2x^2(3-2x)$$

siendo $\Gamma_0 = G_F^2 m_\mu^5/(192\pi^3)$ la anchura de desintegración del muón.

9.3. Cálculo de la vida media del pión.
La anchura de desintegración del pión cargado $\pi \to \mu\nu_\mu$ se puede expresar en la forma siguiente tras integrar el espacio de fases:

$$\Gamma_\pi = \frac{m_\mu m_\nu}{2\pi m_\pi^2}|\vec{p}_\mu|\overline{|T|^2}$$

siendo $\overline{|T|^2}$ la amplitud de desintegración:

$$\overline{|T|^2} = \frac{G_F^2 f_\pi^2 |V_{ud}|^2}{m_\mu m_\nu}[2(p_\pi \cdot p_\mu)(p_\pi \cdot p_\nu) - p_\pi^2(p_\mu \cdot p_\nu)]$$

Calcular la vida media del pión y compararla con el valor experimental.

9.4. Desintegración semileptónica del pión.
La anchura de desintegración semileptónica del pión $\pi^+ \to \pi^0 e^+ \nu_e$ se puede expresar en la forma:

$$(\Gamma_\pi)_{sl} = \frac{G_F^2|V_{ud}|^2}{60\pi^3}\Delta^5 f_+^2 C$$

siendo $\Delta = m_{\pi^+} - m_{\pi^0}$, f_+ un factor de forma cuyo valor es igual a $\sqrt{2}$ y C una corrección de espacio de fases cuyo valor es $0{,}785$.
a) Comparar esta fórmula con la anchura del neutrón y comentar las diferencias.
b) Calcular BR($\pi^+ \to \pi^0 e^+ \nu_e$) y compararlo con el valor experimental.

9.5. Desintegración del pión neutro.
La desintegración del π^0 ocurre por vía electromagnética en la forma $\pi^0 \to \gamma\gamma$ y la anchura de desintegración correspondiente es:

$$\Gamma_{\pi^0} = \frac{\alpha^2 m_\pi^3}{32\pi^3 f_\pi^2}$$

Calcular la vida media del π^0 y compararla con el valor experimental.

9.6. Desintegración semileptónica de Λ.
La anchura de la desintegración semileptónica $\Lambda \to pe^-\bar{\nu}_e$ se puede escribir en el límite $m_e = 0$ en la forma:

$$(\Gamma_\Lambda)_{sl} = \frac{G_F^2 |V_{us}|^2}{60\pi^3} \Delta^5 (C_V^2 + 3C_A^2)(1+\delta)$$

siendo $\Delta = m_\Lambda - m_p$ y δ una corrección del espacio de fases.
a) Comparar esta anchura con la del neutrón y comentar las diferencias.
b) Sabiendo que $\delta = -3(m_\Lambda - m_p)/(m_\Lambda + m_p)$, $C_V = 3/\sqrt{6}$ y $C_A/C_V = -0{,}72$, calcular BR($\Lambda \to pe^-\bar{\nu}_e$) y compararlo con el valor experimental.
c) Determinar $|V_{us}|$ a partir del cociente $\Gamma(\Lambda \to pe^-\bar{\nu}_e)/\Gamma(n \to pe^-\bar{\nu}_e)$ y comparar la precision de esta medida con la que se obtiene en desintegraciones semileptónicas de kaones.

9.7. Desintegración hadrónica de Λ.
La desintegración $\Lambda \to p\pi$ se puede describir mediante el hamiltoniano de interacción efectivo:

$$\mathcal{H}_I = G_F m_\pi^2 \bar{\psi}_p (A - B\gamma_5)\psi_\Lambda \phi_\pi$$

donde A y B son constantes.
a) Comentar esta expresión de $\mathcal{H}_I$
b) A partir de este $\mathcal{H}_I$ se obtiene la siguiente distribución angular del protón emitido respecto a la dirección del espín del Λ:

$$\frac{d\Gamma}{d\cos\theta} = \frac{G_F^2 m_\pi^4}{8\pi m_\Lambda} |\vec{p}_p| \left[(E_p + m_p)|A|^2 + (E_p - m_p)|B|^2 + 2Re(AB^*)|\vec{p}_p| \cos\theta \right]$$

Utilizando esta expresión, calcular la vida media de Λ y compararla con el valor experimental, sabiendo que $|A|$=1.45 y $|B|$=10.2
c) Suponiendo que A y B son reales, calcular el parámetro α del problema 1.

9.8. Regla $|\Delta I| = 1/2$ en las desintegraciones débiles.
Aunque el isospín se viola en las desintegraciones hadrónicas de las partículas extrañas, existe la regla empírica llamada 'regla $|\Delta I| = 1/2$' según la cual el isospín total se viola tan sólo en un valor 1/2. A partir de esta regla deducir los siguientes cocientes de anchuras de desintegración:

$$\Gamma(\Lambda \to p\pi^-)/\Gamma(\Lambda \to n\pi^0) = 2$$

$$\Gamma(K_S^0 \to \pi^+\pi^-)/\Gamma(K_S^0 \to \pi^0\pi^0) = 2$$

$$\Gamma(K^+ \to \pi^+\pi^0)/\Gamma(K_S^0 \to \pi^0\pi^0) = 0$$

Comparar estas predicciones con los resultados experimentales.

9.9. Desintegraciones raras de partículas extrañas.
Se tienen los siguientes resultados experimentales:

$$\Gamma(K_L^0 \to \mu^+\mu^-)/\Gamma(K^+ \to \mu^+\nu_\mu) = 3 \cdot 10^{-9}$$

$$\Gamma(\Sigma^+ \to ne^+\nu_e)/\Gamma(\Sigma^- \to ne^-\bar{\nu}_e) < 5 \cdot 10^{-3}$$

$$\Gamma(K^+ \to \pi^+\nu_e\bar{\nu}_e)/\Gamma(K^+ \to \pi^0 e^+\bar{\nu}_e) < 10^{-6}$$

a) Explicar por qué estos cocientes tienen unos valores tan pequeños.
b) Discutir si a pesar de todo existen mecanismos mediante los cuales las desintegraciones que aparecen en los numeradores pueden llegar a producirse.

9.10. Desintegraciones hadrónicas de mesones D.
Experimentalmente se miden los siguientes cocientes de desintegración del D^0:

$$BR(D^0 \to K^-\pi^+) = (3{,}8 \pm 0{,}1)\,\%$$

$$BR(D^0 \to K^-K^+) = (0{,}41 \pm 0{,}01)\,\%$$

$$BR(D^0 \to \pi^-\pi^+) = (0{,}14 \pm 0{,}01)\,\%$$

$$BR(D^0 \to \pi^-K^+) = (0{,}015 \pm 0{,}002)\,\%$$

a) Dibujar los diagramas de Feynman que dan lugar a estas desintegraciones, según el modelo espectador.
b) Calcular las anchuras relativas suponiendo que kaones y piones tienen las mismas masas y factores de forma. Comparar los resultados así obtenidos con los valores experimentales.

9.11. Desintegraciones suprimidas de mesones B.
Explicar mediante qué mecanismos se pueden producir las siguientes desintegraciones:

$$B^0 \to J/\psi\ K_S$$

$$B^0 \to \pi^+\pi^-$$

$$B^0 \to K^+\pi^-$$

$$B^0 \to \pi^+K^-$$

9.12. Desintegraciones del leptón τ.
a) Calcular la vida media del leptón τ sabiendo que BR($\tau \to e$) = 17,8 %.
b) Calcular BR($\tau \to e$) utilizando el modelo espectador.
c) Calcular BR($\tau \to K$) y compararlo con el valor experimental de aproximadamente 3,5 %.

10. La unificación electrodébil

10.1 Interacciones de neutrinos

10.1.1 Haces de neutrinos

Los haces de neutrinos han jugado un papel importante en física de partículas. Uno de los primeros haces fue el de Brookhaven, que permitió demostrar en 1961 que ν_e y ν_μ son partículas distintas. En 1973, las corrientes neutras fueron descubiertas en el CERN también gracias a un haz de neutrinos. En las décadas de los años 1980 y 1990, las haces de neutrinos han servido para efectuar importantes tests de la teoría electrodébil y de QCD. En la actualidad se utilizan para estudiar las oscilaciones de neutrinos.

La figura 10.1 muestra los elementos más importantes de un haz de neutrinos.

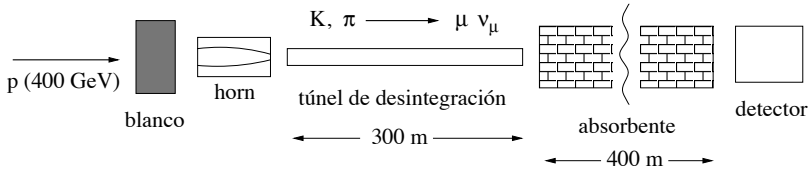


Figura 10.1: Elementos principales de un haz de neutrinos.

Estos elementos son los siguientes:

a) un haz primario muy intenso de protones con una energía de por ejemplo 400 GeV (esta energía determina la energía máxima de los neutrinos),

b) un blanco de material pesado cuya misión es iniciar una cascada hadrónica formada de piones y kaones,

c) un sistema de imanes y colimadores que permita focalizar el haz secundario y, en su caso, seleccionar un rango de momentos, por ejemplo en torno a 200 GeV (este dispositivo se llama en inglés $horn$),

d) un túnel que permita la desintegración de piones y kaones, con longitud típica de 300m,

e) un absorbente formado por un material denso, preferentemente hierro, que absorba todas las partículas cargadas, con longitud típica de 400m,

f) finalmente, el detector de neutrinos.

Los haces de neutrinos contienen esencialmente neutrinos muónicos (ν_μ y $\bar{\nu}_\mu$) ya que piones y kaones se desintegran principalmente en un muón, acompañado de su correspondiente neutrino. Mediante el campo magnético situado detrás del blanco se puede seleccionar la polaridad de las partículas: si la carga es positiva se obtiene un haz de ν_μ y si la carga es negativa se obtiene un haz de $\bar{\nu}_\mu$. Si sólo se selecciona la carga de las partículas, se obtienen haces muy intensos, pero con un espectro muy picado a bajas energías para los neutrinos, como queda ilustrado en la figura 10.2. Estos haces se suelen llamar de 'banda ancha' (o bien WBB, iniciales de *Wide Band Beam*). Si además se selecciona un rango de momentos para las partículas que se desintegran, se obtiene un haz mucho menos intenso, pero de mayor pureza y con un espectro plano para la energía de los neutrinos. Estos haces se suelen llamar de 'banda estrecha' (o bien NBB, iniciales de *Narrow Band Beam*).

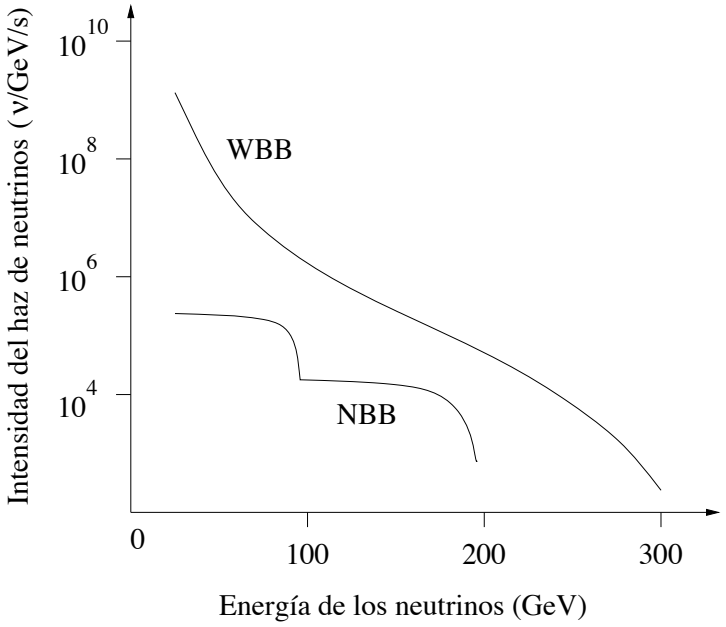


Figura 10.2: Espectro de energía de los neutrinos para haces de tipo WBB y NBB obtenidos con un haz primario de protones de 400 GeV/c cuya intensidad es de 10^{13} s^{-1}. Para el haz de tipo NBB, se han seleccionado partículas secundarias con momento en torno a 200 GeV/c.

Es interesante observar que sólo una pequeña fracción de los piones y

kaones que se producen en el blanco se desintegran en los 300 m del túnel de desintegración. Utilizando la fórmula $L = \gamma\beta c\tau$ para la distancia de desintegración, se llega a la conclusión de que, para momentos de 200 GeV/c, únicamente se desintegran el 3 % de los piones y el 20 % de los kaones. La longitud del absorbente debe de ser suficiente para absorber muones con el momento máximo, o sea 400 GeV/c en nuestro ejemplo. Esta longitud es del orden de 160 m si el absorbente es de hierro, y de unos 500 m si es de roca estándar. Normalmente los absorbentes contienen una mezcla de varios materiales. Otro dato interesante es que, en los haces de tipo NBB, la energía máxima de los neutrinos es

$$(E_\nu)_{max} = E_b(1 - m_\mu/m_b)$$

siendo E_b y m_b la energía y la masa, respectivamente, de las partículas secundarias seleccionadas. Para $E_b = 200$ GeV, $(E_\nu)_{max}$ es igual a 190 GeV para kaones y 86 GeV para piones. La existencia de dos máximos crea una estructura en escalón para el espectro de energía de los neutrinos que puede apreciarse en la figura 10.2. Finalmente, la energía de un neutrino que interacciona en el detector puede deducirse a partir del 'parámetro de impacto', es decir, de la distancia entre el punto de impacto del neutrino y el eje del haz. Se tiene

$$E_\nu = \frac{(E_\nu)_{max}}{1 + a^2} \qquad \text{donde} \qquad a \approx \frac{E_b}{m_b}\frac{r}{L_a + L_d/2}$$

siendo r el parámetro de impacto, L_d la longitud del túnel de desintegración, y L_a la del absorbente. Para que esta fórmula sea útil, ha de conocerse E_b, es decir, el haz ha de ser preferentemente de tipo NBB.

Finalmente, la figura 10.3 muestra un ejemplo de detector de neutrinos.

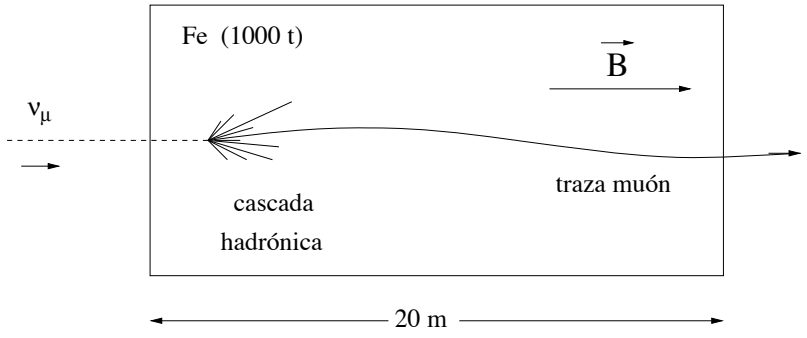


Figura 10.3: Ejemplo de detector de neutrinos con un suceso de interacción neutrino-nucleón.

Como la probabilidad de interacción de los neutrinos es muy pequeña, estos detectores han de ser muy masivos. El ejemplo de la figura es en realidad un

calorímetro hadrónico de 1000 toneladas de hierro magnetizado. En su interior existen cámaras que detectan el paso de las partículas cargadas. La cinemática de la reacción se reconstruye a partir del momento y ángulo del muón emitido, así como de la energía depositada en el calorímetro hadrónico. Suponiendo que el haz de neutrinos tenga una energía de 100 GeV y una intensidad de 10^6 por segundo, se observarían con un detector como este unas 300.000 interacciones por año.

10.1.2 Las corrientes cargadas

Los neutrinos muónicos interaccionan con la materia (es decir, protones y neutrones) de la misma forma que los neutrinos electrónicos. Es decir, se tiene:

$$\nu_\mu n \to p\mu^- \qquad \text{y} \qquad \bar{\nu}_\mu p \to n\mu^+$$

Ambas colisiones requieren una energía umbral cuyo valor, en el sistema del laboratorio del nucleón, es $(E_\nu)_{min} \approx m_\mu(1 + m_\mu/m_N) \approx 112$ MeV. Las energías del neutrino que se van a considerar a continuación son siempre muy superiores a este valor. Los diagramas de Feynman que describen estas colisiones aparecen en la figura 10.4. Se trata de diagramas construidos a base de dos corrientes acopladas, una corriente leptónica y una corriente hadrónica, similares a las utilizadas en las desintegraciones de partículas por interacción débil. Estas corrientes acopladas intercambian siempre entre ellas una unidad de carga eléctrica, y por ello se llaman corrientes cargadas.

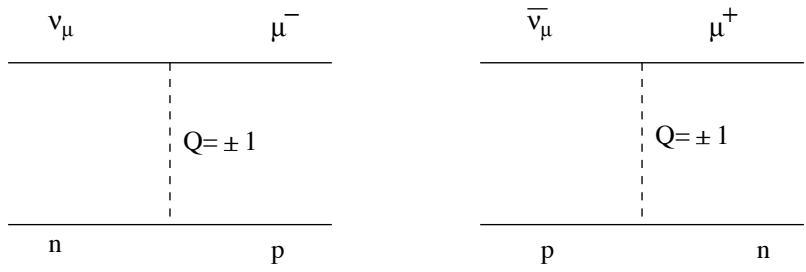


Figura 10.4: Diagramas de Feynman para las interacciones de neutrinos muónicos con la materia mediante corrientes cargadas.

Según la teoría de Fermi, el hamiltoniano de interacción es

$$(\mathcal{H}_I)_{cc} = \frac{G_\mathrm{F}}{\sqrt{2}}[\bar{L}_f\gamma^\mu(1-\gamma^5)L_i]\cdot[\bar{N}_f\gamma_\mu(C_\mathrm{V}-C_\mathrm{A}\gamma^5)N_i]$$

siendo $L_i(N_i)$ el leptón (nucleón) inicial y $L_f(N_f)$ el final. Se ha escogido un convenio de signos de forma que C_A sea positivo. Con este convenio, la sección eficaz resultante es

$$\boxed{\sigma_{cc}^{\nu(\bar{\nu})} = \frac{1}{4}\frac{G_{\rm F}^2}{\pi}s\left[\left(C_{\rm V} \pm C_{\rm A}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(C_{\rm V} \mp C_{\rm A}\right)^2\right]} \qquad (10.1)$$

donde el signo superior se refiere a la interacción del neutrino y el inferior al del antineutrino. Esta fórmula es válida para energías del neutrino por encima del umbral de la colisión. Para energías muy altas (del orden de unos 3000 GeV) tampoco es válida ya que la teoría de Fermi deja de ser correcta. La sección eficaz es proporcional a la cantidad

$$\frac{G_{\rm F}^2}{\pi}s = \frac{2m_N G_{\rm F}^2}{\pi}E_\nu \approx 3{,}2\ 10^{-38}\,{\rm cm}^2 \cdot E_\nu({\rm GeV}) = 3{,}2\ 10^{-2}\,{\rm pb} \cdot E_\nu({\rm GeV})$$

donde E_ν es la energía del neutrino en el sistema del laboratorio del nucleón. De esta expresión se deducen dos características muy importantes de las secciones eficaces de interacción de neutrinos con la materia:

a) las secciones eficaces son extremadamente pequeñas, ya que están en el rango del pb, mientras que para la interacción fuerte o electromagnética se encuentran típicamente en el rango del mb,

b) las secciones eficaces dependen linealmente de la energía del neutrino en el sistema del laboratorio.

Con objeto de evaluar numéricamente las secciones eficaces, se pueden utilizar primero los valores de $C_{\rm V}$ y $C_{\rm A}$ que se deducen de la desintegración del neutrón, es decir, $C_{\rm V} = 1$ y $C_{\rm A} = 1{,}27$. Se obtienen entonces los siguientes resultados para las colisiones de neutrinos contra nucleones:

$$\sigma_{cc}^{\nu N}/E_\nu \approx 2{,}0\ 10^{-38}\,{\rm cm}^2/{\rm GeV} \qquad {\rm y} \qquad \sigma_{cc}^{\bar{\nu} N}/E_\nu \approx 0{,}7\ 10^{-38}\,{\rm cm}^2/{\rm GeV}$$

promediando las secciones eficaces de protones y neutrones. Se ha tenido en cuenta que las secciones eficaces para las colisiones νp y $\bar{\nu} n$ son nulas. Otro parámetro interesante es el cociente

$$r = \sigma^{\bar{\nu} N}/\sigma^{\nu N} = 0{,}35 \qquad (10.2)$$

Los datos experimentales son los que muestra la figura 10.5, para las colisiones de neutrinos contra hierro. Al ser el hierro un material isonuclear (mismo número de protones que de neutrones), estos datos han de compararse justamente con las secciones νN y $\bar{\nu} N$ anteriores. Las secciones eficaces experimentales son efectivamente proporcionales a la energía del neutrino. Sin embargo, los valores experimentales son sensiblemente inferiores a los que se han calculado. La razón es que éstos son válidos únicamente para colisiones elásticas de neutrinos contra nucleones a baja energía (es decir, para $E_\nu < 1$ GeV). Para $E_\nu > 1$ GeV, se producen por un lado colisiones inelásticas que no han sido incluidas en los cálculos anteriores y, por otro lado, los factores de forma $C_{\rm V}$ y $C_{\rm A}$ adquieren dependencia en q^2, siendo q el momento transferido entre las dos corrientes.

A primera vista el problema parece difícil de resolver. Sin embargo, el modelo de partones permite efectuar los cálculos de forma sencilla. Según dicho modelo, la interacción no se produce sobre los nucleones, sino sobre sus constituyentes elementales, es decir, los quarks u y d. Entonces se tienen de nuevo colisiones a dos cuerpos del tipo

$$\nu_\mu d \to u\mu^- \qquad \text{y} \qquad \bar{\nu}_\mu u \to d\mu^+$$

cuyas secciones eficaces son las mismas que para los nucleones, pero con $C_\text{V} = C_\text{A} = 1$. Es decir, se obtiene

$$\sigma_{cc}^{\nu d} = \frac{G_\text{F}^2}{\pi} s \quad , \qquad \sigma_{cc}^{\nu u} = 0 \quad , \qquad \sigma_{cc}^{\bar{\nu} u} = \frac{1}{3}\frac{G_\text{F}^2}{\pi} s \qquad \text{y} \qquad \sigma_{cc}^{\bar{\nu} d} = 0$$

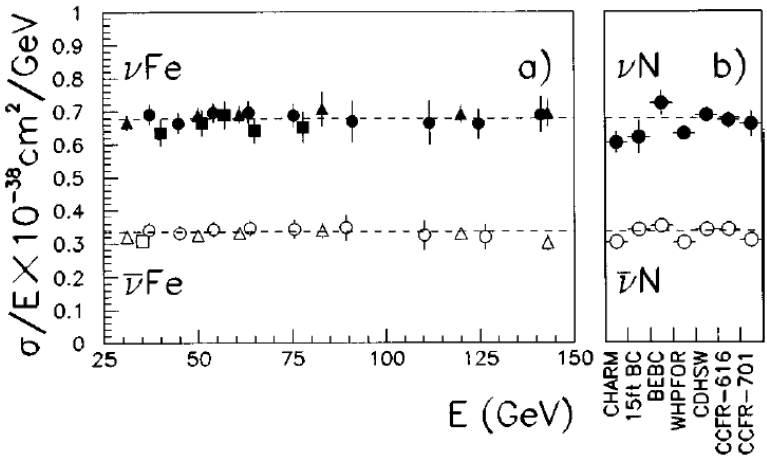


Figura 10.5: Secciones eficaces experimentales de neutrinos contra Fe en función de la energía (a). Los valores experimentales promedio (b) son $0{,}68 \pm 0{,}01$ para νFe, $0{,}33 \pm 0{,}01$ para $\bar{\nu} Fe$, con lo cual $r = 0{,}50 \pm 0{,}01$. *Fuente*: *Rev. Mod. Phys.*, **70** (1998) 1341.

Ahora bien, los quarks que hay dentro de un nucleón sólo poseen una fracción x del momento total del nucleón ($0 < x < 1$). Debido a ello, la energía en centro de masas de la colisión del neutrino contra un quark no es s sino xs. Las secciones eficaces de colisión de neutrinos contra nucleones se obtienen utilizando las llamadas 'funciones de estructura' del protón $q(x)$, cuyo significado físico es la probabilidad de encontrar un quark q con una fracción x del momento total dentro del protón. Las funciones de estructura del neutrón se obtienen a partir de las del protón por simetría de isospín, es decir, intercambiando los

quarks u y d. En realidad el modelo de partones predice la existencia dentro de los nucleones de otros quarks y antiquarks, además de los quarks constituyentes u y d. Las secciones eficaces de los antiquarks se obtienen por simetría: $\sigma^{\nu\bar{q}} = \sigma^{\bar{\nu}q}$ y $\sigma^{\bar{\nu}\bar{q}} = \sigma^{\nu q}$. Omitiendo todos los quarks salvo los constituyentes u y d y sus antiquarks respectivos, $\bar{u}$ y $\bar{d}$, se obtiene el resultado:

$$\sigma_{cc}^{\nu N} = \frac{G_{\mathrm{F}}^2}{2\pi} s \int_0^1 x \left(u + d + \frac{\bar{u}}{3} + \frac{\bar{d}}{3} \right) dx$$

$$\sigma_{cc}^{\bar{\nu} N} = \frac{G_{\mathrm{F}}^2}{2\pi} s \int_0^1 x \left(\frac{u}{3} + \frac{d}{3} + \bar{u} + \bar{d} \right) dx$$

El acuerdo entre estas fórmulas y el modelo de partones es excelente como se comprobará al estudiar dicho modelo más adelante. En todo caso, estas fórmulas confirman la dependencia lineal de la sección eficaz con la energía del neutrino en el sistema del laboratorio, E_ν.

10.1.3 Las corrientes neutras

Los sucesos de interacción de neutrinos con la materia descritos hasta ahora se caracterizan por la aparición de un muón en el estado final, además de un cierto número de hadrones por tratarse en general de colisiones inelásticas. Estos sucesos se llaman sucesos de corriente cargada (CC). Existen igualmente sucesos de interacción sin muón en el estado final, tal como puede apreciarse en la figura 10.6. Estos sucesos, que sólo contienen un estado final hadrónico, se llaman sucesos de corriente neutra (NC) por las razones que se van a explicar.

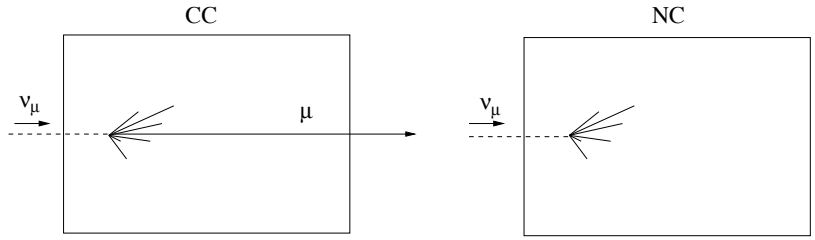


Figura 10.6: Suceso de corriente cargada y sucesos de corriente neutra tal como se observan en un detector de neutrinos.

Los sucesos de corriente neutra fueron observados por primera vez de forma inequívoca gracias a un experimento efectuado en el CERN en 1973. En este experimento, se disponía de haces de neutrinos y antineutrinos muónicos de baja energía (del orden de 2 GeV) y de un detector de neutrinos consistente en una enorme cámara de burbujas de 5 m^3 de volumen bautizada GARGAMELLE. El número de sucesos observados fue el siguiente:

tipo sucesos	haz de ν	haz de $\bar{\nu}$
sucesos con muón	428	148
sucesos sin muón	102	64

A partir de estos datos, pueden calcularse los observables experimentales R^{ν} y $R^{\bar{\nu}}$ que se definen a continuación:

$$R^{\nu} = \sigma^{\nu}_{nc}/\sigma^{\nu}_{cc} = 102/428 = 0{,}24 \pm 0{,}03$$

$$R^{\bar{\nu}} = \sigma^{\bar{\nu}}_{nc}/\sigma^{\bar{\nu}}_{cc} = 64/148 = 0{,}43 \pm 0{,}06$$

además del observable r definido anteriormente en (10.2) y cuyo valor es en este caso $r = \sigma^{\bar{\nu}}_{cc}/\sigma^{\nu}_{cc} = 148/428 = 0{,}35 \pm 0{,}03$.

Los sucesos de corriente cargada pueden interpretarse, como se ha visto visto, como colisiones de neutrinos contra quarks del tipo $\nu_{\mu} q \rightarrow \mu q'$, donde q y q' son el quark inicial y final (que difieren en una unidad de carga eléctrica). De la misma forma, los sucesos de corriente neutra se pueden interpretar como colisiones elásticas de neutrinos contra quarks del tipo $\nu_{\mu} q \rightarrow \nu_{\mu} q$. En este caso no hay intercambio de carga eléctrica en la colisión, tal como puede verse en la figura 10.7, y por este motivo se utiliza el término de 'corriente neutra'. La posibilidad de que el quark inicial y el final tengan la misma carga eléctrica pero sean de distinto sabor está excluida ya que daría lugar a sucesos de tipo FCNC que están muy suprimidos, como se vio en el estudio de las desintegraciones por vía débil.

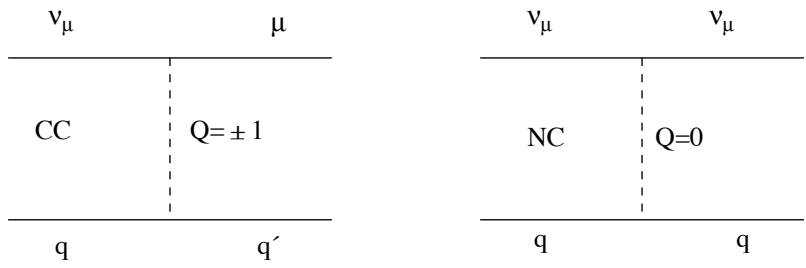


Figura 10.7: Diagramas de Feynman para las interacciones de neutrinos muónicos con quarks mediante corrientes cargadas (CC) y corrientes neutras (NC).

El hamiltoniano de interacción de las corrientes neutras se puede obtener generalizando de la forma más simple posible el hamiltoniano de interacción de las corrientes cargadas. Se obtiene de esta forma

$$(\mathcal{H}_I)_{nc} = \frac{G_{\mathrm{F}}}{\sqrt{2}}[\bar{\nu}\gamma^{\mu}(1-\gamma^5)\nu] \cdot [\bar{f}\gamma_{\mu}(v_f - a_f\gamma^5)f]$$

donde en principio ν es el neutrino muónico y f es un quark, pero esta expresión se puede generalizar para cualquier neutrino ν y cualquier fermión f (quark o leptón). En el caso del neutrino, las corrientes neutras son necesariamente de tipo $V-A$ ya que de lo contrario podrían producirse neutrinos dextrógiros. Para los otros fermiones, se tienen coeficientes v_f y a_f para la parte vectorial y axial de la corriente, cuyo valor es preciso determinar. El 'modelo estándar', que se estudiará a continuación, predice los siguientes valores para estos coeficientes en función de un único $s_w = \sin\theta_w$ (siendo θ_w el llamado ángulo de Weinberg):

f	v_f	a_f	f	v_f	a_f
u	$+\frac{1}{2}-\frac{4}{3}s_w^2$	$+\frac{1}{2}$	ν	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$
d	$-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}s_w^2$	$-\frac{1}{2}$	ℓ	$-\frac{1}{2}+2s_w^2$	$-\frac{1}{2}$

Se puede comprobar que para el neutrino $v_f = a_f$ y, por tanto, la corriente neutra asociada es efectivamente de tipo $V-A$. Dado que el hamiltoniano de interacción de las corrientes neutras tiene la misma estructura que el de las corrientes cargadas, las secciones eficaces que se deducen son también las mismas. Es decir, para energías muy superiores al umbral de la colisión y siempre que la teoría de Fermi de interacción entre corrientes sea aplicable, se obtiene

$$\sigma_{nc}^{\nu f(\bar{\nu}f)} = \frac{1}{4}\frac{G_{\mathrm{F}}^2}{\pi}s[(v_f \pm a_f)^2 + \frac{1}{3}(v_f \mp a_f)^2]$$

donde de nuevo el signo superior se refiere a la interacción del neutrino y el inferior al del antineutrino. Por simetría se deduce igualmente $\sigma^{\nu\bar{f}} = \sigma^{\bar{\nu}f}$ y $\sigma^{\bar{\nu}\bar{f}} = \sigma^{\nu f}$. A partir de estas expresiones se pueden obtener fácilmente las secciones eficaces de colisión entre neutrinos y nucleones utilizando las mismas hipótesis del modelo de partones que han sido utilizadas antes para las corrientes cargadas. El resultado es:

$$\sigma_{nc}^{\nu N} = \frac{G_{\mathrm{F}}^2}{2\pi}s\int_0^1 dx\left[(l_u^2+l_d^2+\frac{r_u^2}{3}+\frac{r_d^2}{3})x(u+d)+(\frac{l_u^2}{3}+\frac{l_d^2}{3}+r_u^2+r_d^2)x(\bar{u}+\bar{d})\right]$$

$$\sigma_{nc}^{\bar{\nu}N} = \frac{G_{\mathrm{F}}^2}{2\pi}s\int_0^1 dx\left[(\frac{l_u^2}{3}+\frac{l_d^2}{3}+r_u^2+r_d^2)x(u+d)+(l_u^2+l_d^2+\frac{r_u^2}{3}+\frac{r_d^2}{3})x(\bar{u}+\bar{d})\right]$$

siendo $l=\frac{1}{2}(v+a)$ y $r=\frac{1}{2}(v-a)$. Es interesante observar que si se impone $v=a=1$, es decir, $l=1$ y $r=0$, se obtiene el resultado de las corrientes cargadas, ya que ν sólo interacciona por CC con d (y, por tanto, $l_u=0$), mientras que $\bar{\nu}$ sólo interacciona con u (y, por tanto, $l_d=0$). Utilizando estas secciones eficaces para corrientes cargadas, se llega a las ecuaciones:

$$\sigma_{nc}^{\nu N} = (l_u^2+l_d^2)\,\sigma_{cc}^{\nu N} + (r_u^2+r_d^2)\,\sigma_{cc}^{\bar{\nu}N}$$

$$\sigma_{nc}^{\bar{\nu}N} = (r_u^2 + r_d^2)\,\sigma_{cc}^{\nu N} + (l_u^2 + l_d^2)\,\sigma_{cc}^{\bar{\nu}N}$$

donde ya no aparecen las funciones de estructura del protón. A partir de estas ecuaciones se pueden calcular fácilmente los observables experimentales R^{ν} y $R^{\bar{\nu}}$ que han sido definidos al principio de esta sección:

$$R^{\nu} = \sigma_{nc}^{\nu N}/\sigma_{cc}^{\nu N} = (l_u^2 + l_d^2) + (r_u^2 + r_d^2)\cdot r$$

$$R^{\bar{\nu}} = \sigma_{nc}^{\bar{\nu}N}/\sigma_{cc}^{\bar{\nu}N} = (l_u^2 + l_d^2) + (r_u^2 + r_d^2)/r$$

donde se recuerda que $r = \sigma_{cc}^{\bar{\nu}N}/\sigma_{cc}^{\nu N}$. Si los parámetros l y r se remplazan por los valores que predice el modelo estándar, se obtienen las llamadas relaciones de Llewellyn-Smith:

$$\boxed{R^{\nu} = \frac{1}{2} - s_w^2 + \frac{5}{9}(1+r)s_w^4 \qquad \text{y} \qquad R^{\bar{\nu}} = \frac{1}{2} - s_w^2 + \frac{5}{9}(1+\frac{1}{r})s_w^4}$$

a partir de las cuales se deduce la relación de Paschos-Wolfenstein:

$$\boxed{R^{*} = \frac{R^{\nu} - rR^{\bar{\nu}}}{1-r} = \frac{\sigma_{nc}^{\nu N} - \sigma_{nc}^{\bar{\nu}N}}{\sigma_{cc}^{\nu N} - \sigma_{cc}^{\bar{\nu}N}} = \frac{1}{2} - s_w^2} \tag{10.3}$$

Es interesante observar que las relación de Paschos-Wolfenstein es válida incluso si se tiene en cuenta el contenido del del protón en quarks s y c. A partir de ella es muy sencillo obtener una medida de s_w^2. Por ejemplo, a partir de los datos de GARGAMELLE se deduce $s_w^2 = 0{,}36 \pm 0{,}05$. Esta medida ha sido efectuada posteriormente en numerosos experimentos (CCFR, CDHS, CHARM, etc...) y el valor obtenido promediando todos los resultados es $s_w^2 = 0{,}226 \pm 0{,}004$. Recientemente (2002), el experimento NUTEV de Fermilab ha obtenido un valor más preciso:

$$s_w^2 = 0{,}228 \pm 0{,}002$$

Los haces de neutrinos no sólo interaccionan con los nucleones, sino que también pueden interaccionar con los electrones atómicos. Sin embargo, las secciones eficaces son proporcionales a la masa del blanco y, por tanto, la probabilidad de interacción con un electrón atómico es unas 2000 veces inferior a la probabilidad de interacción con un nucleón. A pesar de ello, las interacciones con los electrones también han sido estudiadas con detalle ya que, al ser puramente leptónicas, están libres de las incertidumbres asociadas a la interacción hadrónica (en nuestro caso al modelo de partones). Estas interacciones pueden ser por corriente cargada o por corriente neutra. Las interacciones por CC son únicamente del tipo $\nu_\mu e^- \rightarrow \mu^- \nu_e$ ya que $\bar{\nu}_\mu$ no interacciona con los electrones. Estos sucesos de CC permiten verificar la estructura $V-A$ de la corriente débil. En cuanto a las interacciones por NC, pueden darse tanto con neutrinos como con antineutrinos. Un primer suceso $\bar{\nu}_\mu e^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu e^-$ observado por

GARGAMELLE (véase figura 10.8) jugó un papel decisivo en el descubrimiento de las corrientes neutras. Posteriormente, el experimento CHARM ha logrado obtener a partir de este tipo de sucesos otra medida del ángulo de Weinberg, $s_w^2 = 0{,}232 \pm 0{,}008$.

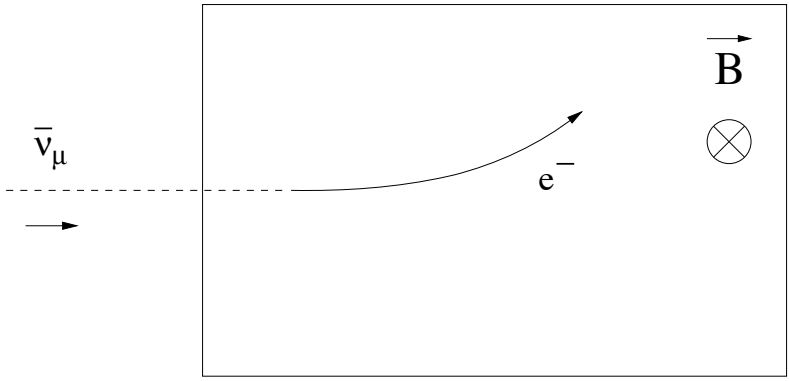


Figura 10.8: Suceso de interacción neutrino-electrón por corriente neutra.

10.2 La simetría $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$

Como se ha visto en el estudio de la interacción débil, la desintegración del muón $\mu^- \to e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$ puede explicarse mediante el hamiltoniano de interacción de Fermi cuya expresión es:

$$\mathcal{H}_I = \frac{G_{\mathrm{F}}}{\sqrt{2}} [\bar{\nu}_\mu \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \mu][\bar{e} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \nu_e] + h.c.$$

donde se ha añadido el hermítico conjugado $(h.c.)$ para describir igualmente el proceso $\mu^+ \to e^+ \nu_e \bar{\nu}_\mu$. Aunque la teoría de Fermi describe de forma satisfactoria las desintegraciones débiles y las interacciones de neutrinos con la materia, presenta ciertos problemas de tipo matemático que obligan a descartarla como teoría fundamental de interacción entre constituyentes elementales. Estos problemas son de dos tipos. En primer lugar, la sección eficaz de interacción de los neutrinos con quarks o leptones crece proporcionalmente al invariante s, pero este crecimiento ha de detenerse a energías muy altas ya que de lo contrario se violaría la propiedad de unitariedad de la matriz de interacción. En segundo lugar, la constante de acoplo G_{F} tiene dimensiones E^d con $d = -2$ y esto implica que la teoría es no renormalizable (en general, una teoría con $d < 0$ no es renormalizable). Esto significa que las correcciones de segundo orden en la serie perturbativa divergen y el cálculo ha de limitarse al primer orden, tal como se ha hecho hasta ahora. Estas dificultades no significan que la teoría de Fermi no sea

válida, sino que es sólo una teoría efectiva con un rango de validez limitado, tal como ocurre con otras interacciones como la gravitatoria.

A partir del hamiltoniano de Fermi puede construirse otro que sea equivalente a bajas energías, pero sin las dificultades que se acaban de señalar. Para ello hay que suponer que la interacción débil no es puntual como se ha supuesto hasta ahora, sino que existe una partícula mediadora de la interacción similar al fotón en QED. Si esta partícula, llamada bosón intermedio W, es muy pesada, la interacción se convierte en una de tipo Fermi para energías tales que $s \ll M_W^2$. Concretamente, el hamiltoniano de esta interacción para cualquier leptón cargado ℓ es:

$$\mathcal{H}_I = g[(J_\ell^+)^\mu W_\mu^- + (J_\ell^-)^\mu W_\mu^+]$$

donde J_ℓ^μ es la corriente débil asociada al leptón ℓ. Por convenio definimos $(J_\ell^+)^\mu = \bar{\nu}_\ell \gamma^\mu (1-\gamma^5) l$, y, por tanto, la corriente conjugada es $(J_\ell^-)^\mu = \bar{l}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\nu_\ell$. Para acoplarse a las corrientes débiles, el bosón W ha de tener espín 1 como el fotón pero, a diferencia de éste, su carga no es nula sino positiva y su masa tampoco es nula sino que ha de ser muy superior a las masas de leptones y hadrones. La constante de acoplo g del hamiltoniano de interacción anterior es adimensional (d=0) lo cual abre la posibilidad de conseguir una interacción renormalizable como en el caso de QED. La razón por la cual el hamiltoniano anterior se reduce al de Fermi para energías muy inferiores a M_W se explica en la figura 10.9. El colapso del propagador para $M_W^2 \gg q^2$, siendo q la transferencia de momento entre dos corrientes débiles, convierte una interacción mediada por el bosón W en una interacción puntual de tipo Fermi.

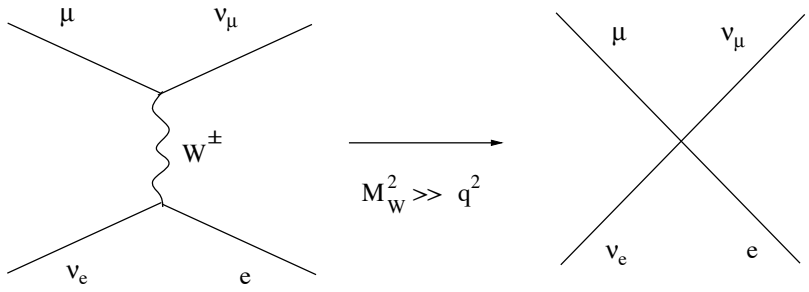


Figura 10.9: Diagrama de Feynman para una interacción débil mediada por el bosón W y su transformación en una interacción de tipo Fermi para pequeños valores del momento transferido.

Esta transformación en los diagramas de Feynman se traduce en lo que respecta a las amplitudes de difusión de la siguiente forma:

$$g^2 (J_\mu^+)^\mu \frac{g_{\mu\nu}}{q^2 - M_W^2} (J_e^-)^\nu \longrightarrow \frac{g^2}{M_W^2} (J_\mu^+)^\mu (J_e^-)_\mu$$

Identificando la amplitud obtenida con el hamiltoniano de Fermi se deduce la siguiente relación entre la constante de acoplo g y la masa del bosón W:

$$\frac{G_{\rm F}}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{M_W^2} \qquad \text{es decir} \qquad M_W^2 = \sqrt{2}\, g^2/G_{\rm F}$$

A partir de aquí, sólo es posible progresar introduciendo una idea básica de la física de partículas, la hipótesis de unificación. Según esta hipótesis, a partir de una cierta escala de energías sólo existe una única interacción que englobaría a todas las ya conocidas (débil, fuerte, etc...). Esto significa que todas ellas tendrían la misma constante de acoplo. Si aplicamos esta hipótesis a la interacción débil y a la interacción electromagnética, para una escala de energías de $s = M_W^2$, se deduce $g = |e|$ siendo e la constante de acoplo de la interacción electromagnética para los leptones ($e < 0$). De ello se deduce inmediatamente $M_W \approx 100$ GeV. El hamiltoniano de la interacción unificada sería simplemente:

$$\mathcal{H}_I = g[(J_\ell^+)^\mu W_\mu^- + (J_\ell^-)^\mu W_\mu^+ - \bar{\ell}\gamma^\mu \ell A_\mu]$$

donde se ha añadido la interacción electromagnética mediada por el fotón cuyo campo es A_μ. Sin embargo, este hamiltoniano no es satisfactorio desde un punto de vista físico ya que no describe el fenómeno de las corrientes neutras. Se trata en lo que sigue de modificarlo para poder incorporarlas.

Es conveniente expresar la corriente débil en la forma

$$J_\ell^\mu = \bar{\nu}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\ell = 2\bar{\nu}_L\gamma^\mu l_L \qquad \text{siendo} \qquad f_{R,L} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5)f$$

donde se han utilizado las propiedades de anticonmutación de las matrices de Dirac. Es interesante observar que la corriente débil se construye únicamente con las componentes levógiras de los espinores de Dirac. Para la corriente electromagnética, por el contrario, se necesitan ambas componentes, y lo mismo ocurre para los términos escalares. En efecto, se tienen igualmente las relaciones $\bar{f}\gamma^\mu f = \bar{f}_R\gamma^\mu f_R + \bar{f}_L\gamma^\mu f_L$ y $\bar{f}f = \bar{f}_R f_L + \bar{f}_L f_R$ para cualquier campo fermiónico f. El hamiltoniano de la interacción débil mediada por el bosón W se puede entonces escribir en la forma

$$\mathcal{H}_I = \frac{g}{\sqrt{2}}(\bar{\nu}_L\gamma^\mu \ell_L W_\mu^- + \bar{\ell}_L\gamma^\mu \nu_L W_\mu^+)$$

donde el factor $\sqrt{2}$ se introduce por convenio. Esta expresión se puede también escribir en forma matricial

$$\mathcal{H}_I = \frac{g}{\sqrt{2}}(\bar{\nu} \quad \bar{\ell})_L\gamma^\mu \begin{pmatrix} 0 & W_\mu^- \\ W_\mu^+ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu \\ \ell \end{pmatrix}_L = g\bar{L}\gamma^\mu W_\mu L$$

siendo L y W_μ matrices definidas en la forma

$$L = \begin{pmatrix} \nu \\ \ell \end{pmatrix}_L \qquad \text{y} \qquad W_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & W_\mu^- \\ W_\mu^+ & 0 \end{pmatrix} = \frac{\sigma_1}{2} W_\mu^1 + \frac{\sigma_2}{2} W_\mu^2$$

donde σ^i son las matrices de Pauli y W^i las componentes reales de los campos $W^\pm$ según la descomposición habitual $W^\pm = (W^1_\mu \pm iW^2_\mu)/\sqrt{2}$. La expresión de L como objeto de dos componentes (ν y l) es formalmente idéntica a la del nucleón como objeto de dos componentes (p y n) y de hecho se emplea igualmente el término de isospín débil para analizar las propiedades de los leptones ante la interacción débil. Los leptones tienen, por tanto, isospín débil $T = 1/2$, siendo el valor de la tercera componente $T_3 = +1/2$ para el neutrino y $T_3 = -1/2$ para el leptón cargado. De la misma forma que la interacción fuerte conserva el isospín fuerte, parece natural imponer que la interacción débil conserve el isospín débil. Para que esto se verifique, basta añadir a la matriz W un campo de espín 1 pero esta vez sin carga eléctrica (es decir, un campo real) que se designa por W^0_μ. Se tiene

$$W_\mu = \frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\vec{W}_\mu = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} W^0_\mu & W^1_\mu - iW^2_\mu \\ W^1_\mu + iW^2_\mu & -W^0_\mu \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} W^0_\mu & \sqrt{2}W^-_\mu \\ \sqrt{2}W^+_\mu & -W^0_\mu \end{pmatrix}$$

donde $\vec{\sigma}$ y $\vec{W}_\mu$ son vectores formados con las tres matrices de Pauli σ^i y con los tres campos reales W^i (adoptando el convenio $W^3 = W^0$). Es fácil verificar que tras esta definición de la matriz W, el hamiltoniano $\mathcal{H}_I$ es invariante ante la siguiente transformación de isospín débil:

$$L \to UL \qquad \bar{L} \to \bar{L}U^+ \qquad W \to UWU^+$$

siendo U una matriz del grupo $SU(2)$, es decir, una matriz 2×2 unitaria y con determinante igual a la unidad. Los dobletes L se transforman, por tanto, en una rotación de isospín débil con la representación fundamental del grupo $SU(2)$, mientas que las matrices W se transforman con la representación adjunta. El grupo de isospín débil se designa habitualmente como $SU(2)_L$ donde el subíndice L recuerda que las transformaciones de isospín débil se aplican únicamente a las componentes L de los campos leptónicos. Podrían igualmente definirse dobletes de isospín para las componentes R en la forma $R = (\nu_R,\, \ell_R)$, pero esto tiene el inconveniente de introducir estados ν_R que son físicamente inexistentes para neutrinos de masa nula. Parece, por tanto, más adecuado definir $R = l_R$ como un singlete de isospín, es decir, un invariante ante rotaciones de $SU(2)_L$.

El campo vectorial W^0_μ está asociado a una partícula neutra que se acopla a leptones cargados como el fotón pero también a los neutrinos. Cabe esperar por otra parte que sus propiedades sean muy parecidas a las de los bosones cargados $W^\pm$ y, por tanto, es un candidato ideal para explicar las corrientes neutras. Sin embargo, un hamiltoniano unificado del tipo

$$\mathcal{H}_I = g\bar{L}\gamma^\mu W_\mu L + e\bar{\ell}\gamma^\mu \ell A_\mu = g(\bar{L}\gamma^\mu W_\mu L - \bar{\ell}_L\gamma^\mu \ell_L A_\mu - \bar{R}\gamma^\mu R A_\mu)$$

donde de nuevo se ha añadido la interacción electromagnética, junto con la hipótesis $g = |e|$, sigue sin ser totalmente satisfactorio. Desde un punto de vista matemático, la interacción electromagnética rompe la simetría $SU(2)_L$. En lo que respecta a las predicciones experimentales, los observables R^ν y $R^{\bar{\nu}}$, definidos anteriormente en las interacciones de neutrinos con la materia, tomarían

valores de $1/2$, mientras que los resultados experimentales se acercan más bien a valores en torno a $0{,}30$. La modificación más sencilla consiste en introducir un campo B_μ, acoplado a las componentes L y R con constantes g_L y g_R, que se determinarán más adelante, de forma que

$$\mathcal{H}_I = g\bar{L}\gamma^\mu W_\mu L + g_L\bar{L}\gamma^\mu L B_\mu + g_R\bar{R}\gamma^\mu R B_\mu$$

donde se recupera la invariancia por rotaciones de $SU(2)_L$. De la misma forma que W^0 no es totalmente identificable con el campo responsable de las corrientes neutras, habitualmente llamado Z, el campo B tampoco es totalmente identificable con el campo A del fotón. Cabe esperar sin embargo que A y Z puedan expresarse como combinaciones lineales de B y W^0. El hamiltoniano $\mathcal{H}_I$ definido de esta forma tiene una nueva simetría, ya que es invariante ante las transformaciones de fase

$$L \to e^{i\alpha} L \qquad y \qquad R \to e^{i\beta} R$$

similares a las transformaciones de fase $U(1)$ que implican en QED la conservación de la carga eléctrica Q. En el caso de la interacción débil, se designa por analogía la cantidad conservada hipercarga débil Y, y el grupo de simetría asociado $U(1)_Y$. Llamando Y_L e Y_R a las hipercargas de los dobletes L y singletes R, respectivamente, se pueden definir los acoplos de B en función de una única constante g' de forma que $g_L = Y_L g'$ y $g_R = Y_R g'$. Estas hipercargas Y_L e Y_R no son arbitrarias. Si el fotón es una combinación lineal de los campos B y W^0, ha de existir necesariamente una relación lineal entre la carga eléctrica Q, la hipercarga Y y la tercera componente del isospín T_3. Es decir, se ha de tener $Q = aT_3 + bY$, siendo a y b coeficientes que pueden determinarse a partir de los valores de la siguiente tabla:

	T	T_3	Y	Q
ν_L	1/2	$+1/2$	Y_L	0
ℓ_L	1/2	$-1/2$	Y_L	-1
ℓ_R	0	0	Y_R	-1

Resultan las relaciones $a = 1, Y_L = Y_R/2$ y $bY_R = -1$. Por tanto, el coeficiente b no queda unívocamente determinado. Adoptando el convenio $b = 1$ se obtiene la relación

$$\boxed{Q = T_3 + Y} \tag{10.4}$$

similar a la llamada relación de Gell-Mann-Nishijima $Q = I_3 + Y/2$ donde I_3 es la tercera componente del isospín fuerte e Y es la hipercarga fuerte, es decir, $Y = B + S$, siendo B el número bariónico y S la extrañeza. Se podría redefinir la hipercarga débil de forma que ambas relaciones fuesen iguales, pero esto no

es necesario ya que no existe ninguna relación entre las cantidades conservadas en la interacción fuerte y en la interacción débil. Una vez fijado el valor de b, Se deduce igualmente $Y_R = -1$ e $Y_L = -1/2$, con lo cual la expresión final de $\mathcal{H}_I$ es

$$\boxed{\mathcal{H}_I = \bar{L}\gamma^\mu (gW_\mu - \frac{1}{2}g' B_\mu) L - g' \bar{R}\gamma^\mu R B_\mu} \tag{10.5}$$

Este hamiltoniano de interacción (Glashow, 1961) describe de forma unificada las interacciones débil y electromagnética de los leptones. Es invariante ante transformaciones de $SU(2)_L$ y $U(1)_Y$ y, por tanto, del producto directo de ambos grupos $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Una vez generalizado a las interacciones de los quarks, constituye una de las piezas esenciales del llamado modelo estándar de las interacciones entre constituyentes elementales de la materia. Como se discutirá más adelante, este modelo no sólo describe de forma correcta los resultados sobre corrientes neutras, sino en general todos los resultados experimentales existentes actualmente.

10.3 Los bosones intermediarios

A continuación, se determinarán los acoplos de los bosones intermediarios y a partir de los mismos sus anchuras y cocientes de desintegración. Desarrollando el hamiltoniano de interacción $\mathcal{H}_I$ en función de los campos $W^\pm$, W^0 y B Se llega a la siguiente expresión

$$\mathcal{H}_I = (\mathcal{H}_I)_c + (\mathcal{H}_I)_n \quad \text{donde} \quad (\mathcal{H}_I)_c = \frac{g}{\sqrt{2}}(\bar{\nu}_L \gamma^\mu \ell_L W_\mu^- + \bar{\ell}_L \gamma^\mu \nu_L W_\mu^+) \quad \text{y}$$

$$(\mathcal{H}_I)_n = \bar{\nu}_L \gamma^\mu \frac{1}{2}(gW_\mu^0 - g' B_\mu)\nu_L - \bar{\ell}_L \gamma^\mu \frac{1}{2}(gW_\mu^0 + g' B_\mu)\ell_L - \bar{\ell}_R \gamma^\mu g' B_\mu \ell_R$$

Utilizando las definiciones de las componentes L, la parte correspondiente a las corrientes cargadas se puede también expresar en la forma

$$(\mathcal{H}_I)_c = g_w[\bar{\nu}\gamma^\mu (v_\ell - a_\ell \gamma^5)\ell W_\mu^- + \bar{\ell}\gamma^\mu (v_\ell - a_\ell \gamma^5)\nu W_\mu^+]$$

a partir de la cual se obtienen inmediatamente los acoplos leptónicos del bosón W cargado (que se identifica normalmente con W^+, siendo W^- la antipartícula):

$$g_w = g/\sqrt{2} \qquad \text{y} \qquad v_\ell = a_\ell = 1/2$$

La constante de acoplo g se puede relacionar con la constante de Fermi G_F. En efecto, como se explicó en la sección anterior, el colapso del propagador del W conduce a una interacción de tipo Fermi en la cual

$$\boxed{G_\text{F}/\sqrt{2} = g^2/(8M_W^2)} \tag{10.6}$$

siendo el factor 8 adicional consecuencia de la redefinición de g.

En lo que respecta a $(\mathcal{H}_I)_n$, aparecen tres términos correspondientes a las interacciones de ν_L, ℓ_L y ℓ_R. Por otra parte, los campos del fotón y del bosón Z han de obtenerse como combinaciones lineales de B y W^0. Para poder preservar la reglas de conmutación de estos campos, la transformación que pasa de unos a otros ha de ser ortogonal, es decir,

$$\boxed{\begin{pmatrix} A \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_w & \sin\theta_w \\ -\sin\theta_w & \cos\theta_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ W^0 \end{pmatrix}} \tag{10.7}$$

donde el ángulo θ_w se llama ángulo de Weinberg. Invirtiendo la matriz de transformación se pueden expresar igualmente los campos B y W^0 en función A y Z y a partir de las relaciones obtenidas se llega a una expresión de $(\mathcal{H}_I)_n$ en función de los campos A y Z. Puede observarse en primer lugar que el fotón no puede acoplarse al neutrino y, por tanto, el campo asociado a la interacción del neutrino en $(\mathcal{H}_I)_n$ es necesariamente el campo del Z, mientras que la combinación ortogonal está asociada al fotón. Esta simple observación permite identificar los coeficientes de la transformación ortogonal $\cos\theta_w$ y $\sin\theta_w$ con las constantes g y g', salvo un factor de normalización. Se llega así al resultado

$$\cos\theta_w = g/\sqrt{g^2+g'^2} \qquad \text{y} \qquad \sin\theta_w = g'/\sqrt{g^2+g'^2}$$

y consecuentemente al siguiente desarrollo del hamiltoniano:

$$(\mathcal{H}_I)_n = a_\gamma(\bar{\ell}_L\gamma^\mu\ell_L+\bar{\ell}_R\gamma^\mu\ell_R)A_\mu+(a_\nu\bar{\nu}_L\gamma^\mu\nu_L+a_L\bar{\ell}_L\gamma^\mu\ell_L+a_R\bar{\ell}_R\gamma^\mu\ell_R)Z_\mu$$

donde los diversos coeficientes a_γ, a_ν, a_L y a_R pueden expresarse en función de las constantes de acoplo g y g'. Dado que $\bar{\ell}_L\gamma^\mu\ell_L + \bar{\ell}_R\gamma^\mu\ell_R$ es simplemente la corriente electromagnética $\bar{\ell}\gamma^\mu\ell$, el coeficiente a_γ se puede identificar con la carga eléctrica del leptón ℓ. Se tiene, por tanto, $a_\gamma = -gg'/\sqrt{g^2+g'^2} = e$ de donde

$$\boxed{|e| = g\,\sin\theta_w = g'\cos\theta_w} \tag{10.8}$$

y de la misma forma, los acoplos del bosón Z se pueden expresar en función de g y el ángulo θ_w

$$a_\nu = \frac{1}{2}\frac{g}{\cos\theta_w}, \quad a_L = \frac{g}{\cos\theta_w}(\sin^2\theta_w - \frac{1}{2}) \quad \text{y} \quad a_R = \frac{g}{\cos\theta_w}\sin^2\theta_w$$

con lo cual se llega finalmente al hamiltoniano

$$(\mathcal{H}_I)_n = e\bar{\ell}\gamma^\mu\ell A_\mu + g_z[\bar{\nu}\gamma^\mu(v_\nu - a_\nu\gamma^5)\nu + \bar{\ell}\gamma^\mu(v_\ell - a_\ell\gamma^5)\ell]Z_\mu$$

con los siguientes valores para los acoplos del bosón Z con leptones

$$g_z = \frac{1}{2}\frac{g}{\cos\theta_w}, \quad v_\nu = a_\nu = +\frac{1}{2}, \quad v_\ell = -\frac{1}{2} + 2\sin^2\theta_w \quad \text{y} \quad a_\ell = -\frac{1}{2}$$

La constante de acoplo g interviene tanto en la parte de las corrientes cargadas como en la de las corrientes neutras. Esto permite relacionarla, por una parte, con la constante de Fermi $G_{\rm F}$ y, por otra parte, con la carga eléctrica e y el ángulo de Weinberg θ_w. Estas relaciones son

$$G_{\rm F}/\sqrt{2} = g^2/(8M_W^2) \qquad \text{y} \qquad |e| = g\,\sin\theta_w$$

Eliminado g entre ambas y recordando la definición de la constante de estructura fina $\alpha = e^2/4\pi$, se llega a la importante relación

$$\boxed{M_W^2 = \pi\alpha/(\sqrt{2}\,G_{\rm F}\,\sin^2\theta_w)} \tag{10.9}$$

que permite determinar la masa del bosón W. Utilizando el valor experimental $\sin^2\theta_w \approx 0{,}22$ obtenido a partir de las interacciones de neutrinos, y recordando que $G_{\rm F} = 1{,}17\,10^{-5}$ GeV^{-2} y $\alpha = 1/137$ se llega al resultado $M_W \approx 80$ GeV. Por otra parte, diagonalizando la matriz de masas de los bosones B y W^0 se demuestra que

$$\boxed{M_Z = M_W/\cos\theta_w} \tag{10.10}$$

y, por tanto, puede deducirse igualmente que la masa del Z es $M_Z \approx 91$ GeV. El descubrimiento de los bosones W y Z en el CERN en 1983 y 1984, respectivamente, con masas de 80 y 91 GeV, coincidentes con los valores calculados, constituye un test espectacular del modelo estándar.

Todos los resultados obtenidos hasta ahora se refieren únicamente a leptones pero no resulta difícil generalizar el modelo para incluir igualmente las interacciones de los quarks. En efecto, de la misma forma que los leptones se pueden agrupar en dobletes de isospín L y singletes R, los quarks se pueden agrupar en dobletes $(u\ d)_L$ y singletes u_R y d_R (obsérvese que para quarks existen dos singletes y no uno sólo como para leptones). El hamiltoniano de interacción, incluyendo cualquier fermión f (leptón o quark), sería

$$\boxed{\mathcal{H}_I = \sum_f [\bar{L}_f\gamma^\mu(gW_\mu + Y_L^f g' B_\mu)L_f + Y_R^f g'\bar{R}_f\gamma^\mu R_f B_\mu]} \tag{10.11}$$

donde las hipercargas Y se pueden calcular a partir de la relación $Q = T_3 + Y$. Esta relación implica $Y_R^f = Q_f$ y $Y_L^f = (Q_1 + Q_2)/2$, siendo Q_1 y Q_2 las cargas eléctricas de los dos elementos del doblete L. Se obtiene de esta forma un valor de Y_L igual a $-1/2$ para leptones y $+1/6$ para quarks. Es interesante observar que si se incluyen neutrinos dextrógiros, como se verifica $Y_R = Q_\nu = 0$, no hay interacción posible de ν_R con el campo B. En otras palabras, los estados ν_R pudieran existir (y, por tanto, dar masa a los neutrinos) pero sin interaccionar con

las otras partículas. El hamiltoniano anterior se puede desarrollar para obtener una expresión donde aparezcan explícitamente los acoplos de los fermiones f con los bosones $W^{\pm}$, A y Z. Procediendo como para los leptones, se llega a una expresión del tipo $\mathcal{H}_I = (\mathcal{H}_I)_c + (\mathcal{H}_I)_n$. La parte de las corrientes cargadas es

$$\boxed{(\mathcal{H}_I)_c = \sum_f g_w \bar{f}\gamma^\mu (v_f - a_f\gamma^5) f' W_\mu^- \quad + h.c.} \tag{10.12}$$

$$\text{siendo} \quad g_w = g/\sqrt{2} \quad \text{y} \quad v_f = a_f = +1/2$$

con lo cual las corrientes cargadas son de tipo $V - A$. En esta expresión, f es la primera componente del doblete de isospín y f' la segunda. En realidad f' es una mezcla de estados cuyos coeficientes están determinados por la matriz CKM. En lo que respecta a la parte neutra se llega a

$$\boxed{(\mathcal{H}_I)_n = \sum_f \left[Q_f |e| \bar{f}\gamma^\mu f A_\mu + g_z \bar{f}\gamma^\mu (v_f - a_f\gamma^5) f Z_\mu \right]} \tag{10.13}$$

$$\text{siendo} \quad g_z = g/2\cos\theta_w, \quad v_f = T_3 - 2Q_f \sin^2\theta_w \quad \text{y} \quad a_f = T_3$$

con lo cual únicamente la corriente neutra del neutrino es de tipo $V - A$. Más explícitamente se obtiene la siguiente tabla de coeficientes para los acoplos vectorial y axial del bosón Z, que ya fue utilizada en el estudio de las corrientes neutras

f	v_f	a_f	f	v_f	a_f
u	$+\frac{1}{2} - \frac{4}{3}\sin^2\theta_w$	$+\frac{1}{2}$	ν	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$
d	$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\sin^2\theta_w$	$-\frac{1}{2}$	ℓ	$-\frac{1}{2} + 2\sin^2\theta_w$	$-\frac{1}{2}$

Una vez obtenidos los acoplos de los bosones W y Z, se puede proceder a determinar sus anchuras y cocientes de desintegración. El bosón W puede desintegrarse en cualquier par fermiónico $f\bar{f}'$ con tal de que la suma de las masas de f y f' sea inferior a la masa del W. Esto elimina únicamente el modo $t\bar{b}$ ya que la masa del quark t es superior a la del bosón W. Existen, por tanto, 5 modos posibles de desintegración, tal como muestra la figura 10.10.
El bosón Z puede desintegrarse en cualquier par fermiónico $f\bar{f}$ con tal de que el doble de la masa de f sea inferior a la masa del Z. Esto elimina únicamente el modo $t\bar{t}$. El el caso del bosón Z, existen 11 modos de desintegración tal como muestra la figura 10.11.

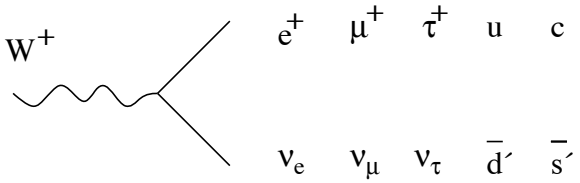


Figura 10.10: Modos de desintegración del bosón W^+.

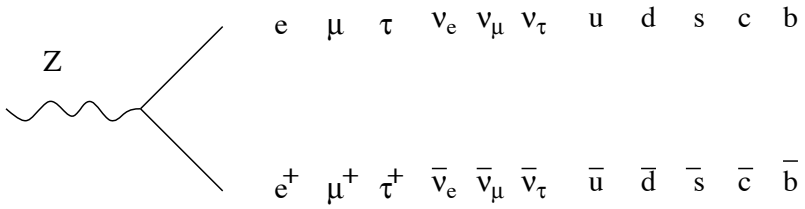


Figura 10.11: Modos de desintegración del bosón Z.

Las anchuras de desintegración de bosones b de espín 1 en pares de fermiones $\bar{f}f$ se pueden calcular utilizando la fórmula

$$\boxed{\Gamma_b = \sum_f \frac{g_b^2 M_b}{12\pi}(v_f + a_f)} \tag{10.14}$$

donde g_b es la constante de acoplo (g_w o bien g_z), M_b es la masa del bosón que se desintegra y finalmente v_f y a_f son las constantes de acoplo vectorial y axial, respectivamente. En esta expresión de la anchura se han despreciado las masas de los fermiones frente a las masas de W y Z, lo cual es una excelente aproximación incluso para el quark b. El caso del bosón W es particularmente sencillo ya que $v_f = a_f = 1/2$ cualquiera que sea el fermión y únicamente hay que tener en cuenta un factor 3 adicional para los quarks, dado que estos se pueden producir en tres estados de color. De esto se deduce inmediatamente $BR(W \to e) = 1/9 \approx 11\,\%$ y $BR(W \to had) = 1/3 \approx 67\,\%$, siendo had la suma de todos los estados hadrónicos. El caso del Z es más complicado ya que v_f y a_f dependen del fermión f y del parámetro $\sin^2\theta_w$ cuyo valor se tomará igual a $0{,}2315$ por las razones que se discutirán más adelante. Esto conduce a valores aproximados para los cocientes de desintegración del Z de $BR(Z \to e) \approx 3{,}3\,\%$, $BR(Z \to \nu) \approx 6{,}7\,\%$ y $BR(Z \to had) = 70\,\%$. Los valores exactos de los modos de desintegración de W y Z aparecen en la tabla 10.1. Dado que estos cocientes han sido medidos con gran precisión, se ha incluido en el cálculo la corrección de QCD igual a un factor $1 + \alpha_s/\pi$ para los modos hadrónicos, siendo $\alpha_s \approx 0{,}12$ la constante de la interacción fuerte entre quarks. Esta corrección supone un pequeño incremento de $3{,}8\,\%$ en las anchuras hadrónicas.

TABLA 10.1: Cocientes de desintegración de bosones W y Z.

modo	BR	modo	BR
$BR(W \to \ell\nu)$	10,8 %	$BR(Z \to \ell\ell)$	3,36 %
		$BR(Z \to \nu\bar{\nu})$	6,67 %
$BR(W \to had)$	67,5 %	$BR(Z \to had)$	69,9 %

En cuanto al cálculo de las anchuras, es conveniente expresar las constantes g_w y g_z en función de de la constante de Fermi $G_{\rm F}$ y la masa de los bosones respectivos. Se llega así a los siguientes valores

$$g_w^2 = 2\sqrt{2} G_{\rm F} M_W^2 \qquad \text{y} \qquad g_z^2 = \sqrt{2} G_{\rm F} M_Z^2$$

y seguidamente a valores de las anchuras totales de desintegración de

$$\Gamma_W = 9{,}228\, \Gamma_W^0, \quad \text{y} \quad \Gamma_Z = 7{,}493\, \Gamma_Z^0 \quad \text{siendo} \quad \Gamma^0 = G_{\rm F} M^3/(6\pi\sqrt{2})$$

donde el valor $1/2$ de las constantes de acoplo vectorial y axial se ha incluido dentro de la definición de Γ^0 en el caso del W, para que coincida con la que se obtiene en el caso del Z. Utilizando los siguientes valores precisos de $G_{\rm F}$, M_W y M_Z, obtenidos experimentalmente,

$$G_{\rm F} = 1{,}1664\, 10^{-5}\ \text{GeV}^{-2}, \quad M_W = 84{,}426\ \text{GeV} \quad \text{y} \quad M_Z = 91{,}187\ \text{GeV}$$

se llega a los siguientes valores para la anchuras totales de desintegración

$$\Gamma_W = 2{,}100\ \text{GeV} \quad \text{y} \quad \Gamma_Z = 2{,}486\ \text{GeV}$$

La comparación de estos cálculos con los valores experimentales constituye un importante test del modelo estándar.

10.4 Teorías *gauge* no abelianas

El modelo estándar se basa en varias piezas importantes. La primera es que las interacciones débil y electromagnética se pueden describir de forma unificada y tienen como grupo de simetría $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. La segunda pieza importante es que esta simetría es una simetría de tipo *gauge* local. En realidad todas las interacciones fundamentales entre constituyentes elementales, incluso la interacción gravitacional, se pueden describir mediante teorías de tipo *gauge* local. Las simetrías globales, como la de isospín $SU(2)$ o la simetría de sabor $SU(3)$, resultan ser a la postre sólo aproximadas. No se dispone de ninguna explicación para este hecho fundamental, pero lo cierto es que la hipótesis de simetría local juega un papel fundamental, al igual que la hipótesis de unificación, en las teorías actuales sobre partículas elementales. Por otra parte, las teorías *gauge* locales no abelianas implican propiedades tan importantes como la universalidad de la interacción o la libertad asintótica, tal como se discutirá más adelante.

El ejemplo más simple de teoría *gauge* local es QED. El lagrangiano de interacción entre un campo ψ de espín 1/2 y masa m, y el campo electromagnético A_μ es

$$\boxed{\mathcal{L}_{em} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}} \tag{10.15}$$

donde D_μ es la derivada covariante y $F_{\mu\nu}$ el tensor electromagnético,

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \qquad \text{y} \qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

definidos de esta forma para una partícula de carga eléctrica e como el electrón (siguiendo el convenio $e < 0$) aunque el formalismo es idéntico para cualquier otro fermión elemental con carga eléctrica. Este lagrangiano es invariante ante transformaciones de fase del tipo $\psi \to e^{-i\alpha}\psi$. Esta simetría es la simetría global $U(1)$ que, al ser una simetría continua, implica según el teorema de Noether la conservación de la carga eléctrica. Sin embargo, el lagrangiano anterior es igualmente invariante ante la transformación de fase local

$$\boxed{\psi \to e^{-i\alpha(x)}\psi \qquad A_\mu \to A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha(x)} \tag{10.16}$$

que lleva asociada una variación del campo A_μ. Esta nueva simetría no implica ninguna ley de conservación adicional, pero indica que el campo A_μ no queda definido de forma única, puesto que si A_μ es una solución, $A_\mu + \partial_\mu f(x)$ también lo es, cualquiera que sea la función $f(x)$. Para fijar el campo A_μ se necesita imponer alguna condición adicional, por ejemplo $\partial_\mu A^\mu = 0$. Esta libertad de elección para fijar el campo puede crear dificultades en algunos casos, por ejemplo en la cuantificación del campo, pero por otra parte la existencia de simetría *gauge* local define de forma única las posibles interacciones de A_μ.

La simetría *gauge* local del campo electromagnético se llama abeliana ya que $U(1)$ es un grupo abeliano. En 1954, Yang y Mills lograron construir un lagrangiano de interacción con simetría $SU(2)$ local. Dado que $SU(2)$ es un grupo no abeliano, se habla de simetría *gauge* no abeliana. Esta generalización de la simetría *gauge* a $SU(2)$ es no trivial y el campo resultante, también llamado campo de Yang-Mills, tiene propiedades peculiares de las cuales carece el campo electromagnético. Para construir un lagrangiano con simetría local $SU(2)$, es conveniente partir de un lagrangiano con simetría $SU(2)$ global calcado del de QED, es decir, del tipo

$$\boxed{\mathcal{L}_{SU(2)} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{2}Tr(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu})} \tag{10.17}$$

donde D_μ y $F_{\mu\nu}$ se definen por analogía con QED en la forma

$$D_\mu = \partial_\mu + igW_\mu \qquad \text{y} \qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu$$

siendo g la constante de acoplo, pero esta vez ψ es un doblete $\psi = (\psi_1 \ \psi_2)$ y W_μ es una matriz 2×2. La matriz W_μ se puede expresar como una suma de los generadores T_a del grupo $SU(2)$ en la forma

$$W_\mu = \sum_a W_\mu^a T_a$$

y este desarrollo hace aparecer los campos *gauge* W_μ^a. Se trata de campos reales de espín 1 y hay tantos como generadores del grupo. Esta definición asegura que el lagrangiano libre de los campos W_μ^a es idéntico al de un campo con simetría abeliana. En efecto, los generadores del grupo verifican el álgebra del grupo y la condición de normalización siguientes

$$[T_a, T_b] = iC_{abc}T_c \qquad \text{y} \qquad Tr(T_a \cdot T_b) = \frac{1}{2}\delta_{ab}$$

siendo $= C_{abc}$ las constantes de estructura del grupo. Para el grupo $SU(2)$, se tiene simplemente $T_a = \sigma_a/2$ donde σ_a es una matriz de Pauli, y $C_{abc} = \epsilon_{abc}$. Existen, por tanto, 3 generadores y 3 campos *gauge* asociados, pero estas definiciones son válidas no sólo para $SU(2)$ sino en general para cualquier grupo de Lie. El lagrangiano libre de los campos W_μ^a es, por tanto,

$$\mathcal{L}_0(W) = -\frac{1}{2}Tr(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}) \qquad \text{donde} \qquad F_{\mu\nu} = \sum_a (\partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a)T_a$$

y aplicando la condición de normalización de los generadores se obtiene

$$\mathcal{L}_0(W) = -\frac{1}{4}\sum_a F_a^{\mu\nu}F_{\mu\nu}^a \qquad \text{donde} \qquad F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a$$

que es idéntico al lagrangiano libre de los campos abelianos.

Para que el lagrangiano $\mathcal{L}_{SU(2)}$ posea una simetría global $SU(2)$, basta imponer que ante una transformación de ψ, la matriz W_μ se transforme con la representación adjunta, es decir,

$$\psi \to U\psi \qquad W_\mu \to UW_\mu U^+$$

siendo U cualquier elemento del grupo $SU(2)$. A partir de las relaciones anteriores se pueden determinar las ecuaciones de transformación de los campos W_μ^a, pero en cualquier caso es fácil comprobar que $\mathcal{L}_{SU(2)}$ permanece invariante. En lo que respecta al lagrangiano libre, se puede observar que la matriz $F_{\mu\nu}$ se transforma igualmente con la representación adjunta, $F_{\mu\nu} \to UF_{\mu\nu}U^+$, y la invariancia de $\mathcal{L}_0(W)$ resulta de la propiedad cíclica de la traza de un producto de matrices. Para que $\mathcal{L}_{SU(2)}$ sea igualmente invariante ante una transformación local de $SU(2)$, es necesario modificar las ecuaciones de la transformación de la misma forma que para el caso abeliano. En el caso no abeliano se tiene

$$\boxed{\psi \to U(x)\psi \qquad W_\mu \to UW_\mu U^+ + \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^+} \tag{10.18}$$

donde el término adicional en la transformación de W_μ es idéntico al del caso abeliano si U es una simple transformación de fase. Ocurre sin embargo, y esta es la gran diferencia con el caso abeliano, que la transformación anterior no deja invariante $\mathcal{L}_{SU(2)}$. Más concretamente, $\mathcal{L}_{SU(2)}$ es invariante salvo la parte del lagrangiano libre del campo *gauge* o sea $\mathcal{L}_0(W)$. La solución nada trivial de este problema consiste en modificar la definición de $F_{\mu\nu}$. Se puede demostrar, en efecto, que utilizando la siguiente definición

$$\boxed{F_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu + ig[W_\mu, W_\nu]} \tag{10.19}$$

se recupera la invariancia de $\mathcal{L}_0(W)$. Para demostrarlo basta probar antes las siguientes propiedades de la derivada covariante en el caso no abeliano

$$[D_\mu, D_\nu] = igF_{\mu\nu} \qquad \text{y} \qquad D_\mu \to UD_\mu U^+$$

que permiten recuperar la ley de transformación $F_{\mu\nu} \to UF_{\mu\nu}U^+$ y consecuentemente la invariancia de $\mathcal{L}_0(W)$. Si el grupo es abeliano, el conmutador $[W_\mu, W_\nu]$ se anula y no aparecen términos adicionales en $\mathcal{L}_0(W)$. Estos términos adicionales confieren a los campos *gauge* no abelianos una serie de propiedades muy peculiares con consecuencias físicas trascendentales. Estas consecuencias se discuten a continuación.

- La interacción de los campos *gauge* no abelianos es una interacción universal, es decir, todos los multipletes de espinores ψ se acoplan con los campos *gauge* W_μ con una misma constante g. Esto se debe a que g aparece igualmente en el lagrangiano libre de los campos W_μ. De esta forma se logra explicar la universalidad de la interacción débil.

- Los campos W_μ tienen autoacoplos incluso dentro de $\mathcal{L}_0(W)$ y, por tanto, no existen realmente en estado libre. Estos acoplos pueden ser triples o cuádruples, como se muestra en la figura 10.12, y están en el origen de propiedades tan importantes de QCD como la libertad asintótica y, posiblemente, el confinamiento de los quarks.

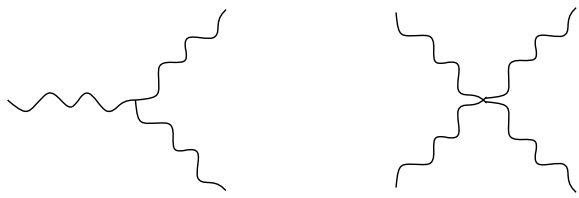


Figura 10.12: Autoacoplos de los campos *gauge* no abelianos.

Los campos *gauge* poseen otra propiedad fundamental, pero esta vez válida también en el caso abeliano. Esta propiedad es que un campo con simetría

gauge local tiene necesariamente una masa nula. Es fácil comprobar en efecto que, por ejemplo en el caso de QED, un término de masa en el lagrangiano del tipo

$$\mathcal{L}_m(A) = \frac{1}{2}M^2(A^\mu A_\mu)$$

no es invariante ante una transformación *gauge* local. Esto explica por qué partículas como el fotón o el gluón tienen masa nula. Los bosones intermediarios, por el contrario, no tienen masa nula, pero ello es posible debido al peculiar mecanismo mediante el cual adquieren masa, que se discutirá más adelante.

Finalmente, todos los resultados anteriores son aplicables al campo *gauge* con simetría local $SU(3)$ que describe las interacciones entre quarks, tal como se discutirá en el siguiente capítulo. Los quarks pueden, en efecto, asociarse en tripletes de color $q = (q_1\ q_2\ q_3)$ y el lagrangiano de interacción es entonces

$$\boxed{\mathcal{L}_{SU(3)} = \sum_q \bar{q}(i\gamma^\mu D_\mu - m_q)q - \frac{1}{2}Tr(G^{\mu\nu}G_{\mu\nu})} \qquad (10.20)$$

donde D_μ y $G_{\mu\nu}$ se definen en la forma

$$D_\mu = \partial_\mu + igG_\mu \qquad \text{y} \qquad G_{\mu\nu} = \partial_\mu G_\nu - \partial_\nu G_\mu + ig[G_\mu, G_\nu]$$

La matriz G_μ es en este caso 3×3 y puede desarrollarse como suma de los generadores de $SU(3)$, $G_\mu = \sum G_\mu^a \lambda_a/2$, donde las matrices λ_a se conocen como matrices de Gell-Mann. Existen 8 generadores para $SU(3)$ y, por tanto, 8 campos vectoriales reales asociados a la interacción entre quarks. Estos campos se llaman gluones y la teoría resultante cromodinámica cuántica (QCD). La constante de acoplo de quarks y gluones se define por analogía con QED en la forma $\alpha_s = g^2/4\pi$.

10.5 El mecanismo de Higgs

Juntando las diversas piezas del modelo estándar que han sido discutidas hasta el momento, se tiene una teoría unificada de las interacciones débil y electromagnética descrita por un lagrangiano con simetría *gauge* local $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. De esta forma se describe el fenómeno de las corrientes neutras y algunas propiedades básicas de la interacción débil como la universalidad de los acoplos. Esta teoría tiene sin embargo serias dificultades a la hora de introducir las masas de las partículas. En efecto, los campos con simetría *gauge* local tienen masa nula, mientras que los bosones W y Z son muy masivos. En lo que respecta a los fermiones, los términos de masa en el lagrangiano son del tipo

$$\mathcal{L}_m(f) = -m_f \bar{f}f = -m_f(\bar{f}_R f_L + \bar{f}_L f_R)$$

y, por tanto, mezclan las componentes R y L. Esto significa que los términos de masa rompen la simetría $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ y la teoría deja de ser renormalizable, al estar acoplados los campos vectoriales con corrientes no conservadas. Se pierde de esta forma una de las hipótesis de partida en la construcción del modelo. Pero más grave que esto es que la ruptura de simetría se acompaña de la aparición de bosones escalares de masa nula, llamados bosones de Goldstone. Como estas partículas se pueden descartar experimentalmente, el modelo se hace inviable.

En 1967, Weinberg y Salam propusieron un modelo modificado que sorprendentemente permite solventar todas las dificultades que se acaban de mencionar. Según este modelo, la ruptura de simetría no se produce directamente en el lagrangiano, sino a través del vacío. Este mecanismo, estudiado inicialmente por Higgs y otros a partir de 1964, se conoce como ruptura espontánea de simetría o mecanismo de Higgs, y constituye la última pieza esencial del modelo estándar. La idea básica es que todas las partículas (bosones y fermiones) tienen inicialmente masa nula, pero están acopladas a un campo escalar respetando la simetría $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Este campo es muy peculiar puesto que su valor medio en el vacío no es nulo, produciéndose de esta forma una ruptura de simetría en el vacío. Al fijarse el valor del campo en el vacío se generan las masas de todas las partículas. Como en el lagrangiano inicial las partículas tienen masa nula, el lagrangiano es en principio renormalizable. Además, en el caso de ser los campos vectoriales campos *gauge* y únicamente en ese caso, no aparecen bosones de Goldstone. Este mecanismo constituye la última pieza fundamental del modelo estándar, y también la única que no ha podido ser todavía verificada experimentalmente. En efecto, el modelo predice la existencia de una partícula neutra de espín 0 y masa no nula llamada bosón de Higgs, que no ha sido observada hasta el momento. En este modelo la masa del bosón de Higgs es un parámetro libre. Se tienen sin embargo los siguientes límites experimentales

$$114 \text{ GeV} < M_H < 220 \text{ GeV}$$

donde el límite inferior procede de la búsqueda directa en el colisionador LEP y el límite superior es menos sólido, ya que se obtiene únicamente de forma indirecta, tras estudiar las correcciones radiativas en algunos de los observables medidos en LEP. Acogida al principio con escepticismo, esta teoría pronto empezó a cosechar éxitos notables, entre ellos el espectacular descubrimiento de las corrientes neutras en 1973. Desde el punto de vista matemático, un resultado crucial fue la demostración efectuada en 1971 por 't Hooft y Veltman de que el modelo es efectivamente renormalizable. Desde entonces no han cesado de suceder las confirmaciones experimentales del modelo. Cabe citar en primer lugar el descubrimiento en el CERN en 1983 y 1984 de los bosones W y Z con exactamente las masas predichas de 80 y 91 GeV, respectivamente. Posteriormente la estructura en dobletes de isospín de los fermiones ha sido confirmada cada vez que se ha descubierto una nueva partícula como el leptón τ, acompañado del neutrino ν_τ, o el quark b, acompañado del t. Los acoplos del bosón Z se han verificado con gran precisión en LEP, y finalmente los autoacoplos del

bosón W característicos de la estructura *gauge* también se han podido poner de manifiesto.

A pesar de todos estos éxitos, el mecanismo de Higgs no deja de ser insatisfactorio desde un punto de vista teórico. En efecto, las correcciones radiativas introducen modificaciones en las masas de las partículas. En el caso de los fermiones, estas modificaciones dependen de $\mathrm{Log}\Lambda$, siendo Λ la escala de energía a partir de la cual el modelo deja de ser válido. Incluso si Λ es una escala muy grande (escala de la gran unificación o escala de Planck), las correcciones a las masas de los fermiones permanecen pequeñas. Para bosones como la partícula de Higgs, por el contrario, estas correcciones son del tipo $M_H^2 \to M_H^2 + a\Lambda^2$ y esto implica que la masa natural del bosón de Higgs es la escala Λ. Incluso si esta escala es tan baja como 1 TeV, es difícil explicar el límite experimental superior de 220 GeV.

Según el modelo estándar, el bosón de Higgs está acoplado a todas las partículas con masa; es decir, los bosones intermediarios W y Z y cualquier fermión f salvo tal vez los neutrinos. El Hamiltoniano de esta interacción es

$$\mathcal{H}_I(H) = -\frac{2}{v}[M_W^2 (W^+)^\mu (W^-)_\mu + \frac{1}{2} M_Z^2 Z^\mu Z_\mu]H + \sum_f \frac{m_f}{v} \bar{f} f H$$

donde H es el campo escalar real asociado al bosón de Higgs y v es la llamada escala de Fermi que toma el valor $v = (\sqrt{2}G_\mathrm{F})^{-1/2} = 246$ GeV. Existen además términos cuadráticos que han sido omitidos. A partir de esta expresión de $\mathcal{H}_I(H)$ pueden deducirse los acoplos de H y sus modos de desintegración. Los diagramas de Feynman de estas desintegraciones aparecen en la figura 10.13. Naturalmente, para que una de estas desintegraciones pueda producirse, ha de verificarse $M_H > 2m$ siendo m la masa de las partículas finales.

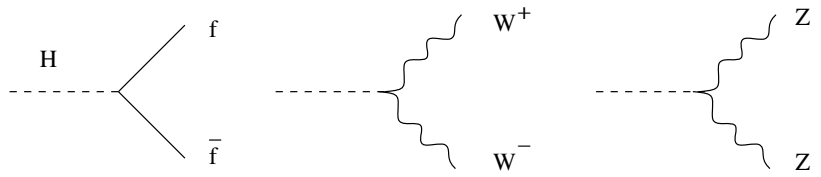


Figura 10.13: Diagramas de Feynman para las desintegraciones del bosón de Higgs, siendo f cualquier fermión con masa no nula.

A partir de estos diagramas de Feynman se deducen las siguientes anchuras de desintegración en pares de fermiones f y bosones b

$$\Gamma_H(f) = \frac{G_\mathrm{F} M_H^3}{4\pi\sqrt{2}} \left(\frac{m_f}{M_H}\right)^2 \left(1 - 4\frac{m_f^2}{M_H^2}\right)^{3/2} C_f$$

$$\Gamma_H(b) = \frac{G_F M_H^3}{8\pi\sqrt{2}}\left(1 - 4\frac{m_b^2}{M_H^2}\right)^{1/2}\left(1 - 4\frac{m_b^2}{M_H^2} + 12\frac{m_b^4}{M_H^4}\right)C_b$$

siendo C_f un factor de color (igual a 1 para leptones y a 3 para quarks) y C_b un factor igual a 1 para el W y 1/2 para el Z. A partir de estas expresiones se deduce que, para para $M_H < 2M_W$, donde únicamente los modos fermiónicos son posibles, el modo dominante es $H \to \bar{b}b$, por ser b el fermión de mayor masa (se supone $M_H > 2m_b$). Para $M_H > 2M_W$ los modos bosónicos se hacen dominantes, incluso por encima del umbral de producción de pares $t\bar{t}$. La figura 10.14 muestra los principales modos de desintegración de H en función de M_H.

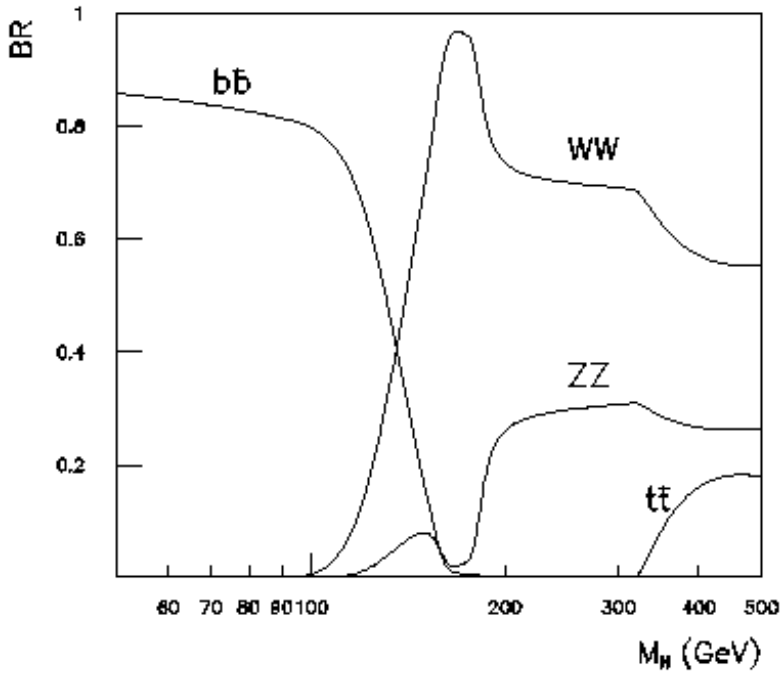


Figura 10.14: Principales modos de desintegración del bosón de Higgs con los cocientes respectivos en función de su masa.

En esta figura se han incluido también los modos $H \to WW^*$ y $H \to ZZ^*$, siendo W^* y Z^* estados virtuales, que modifican las anchuras en WW y ZZ por debajo de los umbrales de producción respectivos. Las búsquedas experimentales del bosón de Higgs dependen naturalmente de forma decisiva en los modos dominantes. Es interesante mencionar que, aunque el bosón de Higgs no se acopla directamente a partículas de masa nula como el fotón o el gluón, los acoplos aparecen al considerar términos de orden superior en la serie pertur-

bativa. De esta forma se hace posible el modo $H \to \gamma\gamma$ cuyo cociente es muy pequeño pero que podría jugar un papel importante en las búsquedas experimentales de H si M_H está en torno a los 120 GeV. Igualmente, la fusión de gluones $gg \to H$ resulta ser el modo de producción dominante en colisiones hadrónicas a alta energía.

Es interesante examinar igualmente la anchura total Γ_H. Por debajo del umbral de producción de los bosones W y Z, Γ_H se mantiene por debajo de los 10 MeV, pero al superarse dicho umbral, Γ_H crece proporcionalmente a M_H^3 y se convierte rápidamente en una resonancia muy ancha. Para $M_H \approx 500$ GeV, la anchura es del mismo orden de magnitud que la masa y resulta difícil considerar H como una partícula elemental. Existen, por otra parte, argumentos teóricos para descartar valores de M_H muy grandes, del orden de 1 TeV o superiores. En efecto, unos valores tan grandes de M_H acabarían desestabilizando los acoplos de H a muy alta energía. Por las mismas razones teóricas, existen límites inferiores para M_H, pero los valores pequeños están de todas formas descartados experimentalmente.

10.6 Aniquilación e^+e^-

10.6.1 Las colisiones e^+e^- para $\sqrt{s} < M_Z$

Los primeros tests del modelo estándar se efectuaron utilizando haces de neutrinos, a partir del experimento GARGAMELLE en 1973. En 1983 y 1984, los bosones intermediarios W y Z fueron descubiertos en el CERN en colisiones $p\bar{p}$. Los tests más precisos del modelo estándar proceden sin embargo de experimentos realizados en anillos de colisiones e^+e^-. Los primeros anillos de este tipo (SPEAR, DORIS, etc...) se construyeron a principio de los años 1970, pero su energía era insuficiente para observar efectos debidos a los bosones intermediarios. A final de los años 1970 se consiguió superar la energía en centro de masas de $\sqrt{s} = 20$ GeV en dos anillos de colisiones, PETRA (en el laboratorio DESY de Hamburgo) y SPEAR (en el laboratorio SLAC de la Universidad de Stanford en California). Fueron los experimentos efectuados en estos anillos los primeros en observar desviaciones en las secciones eficaces debidas al bosón Z (este efecto se conoce como 'interferencia electrodébil') confirmando de esta forma la validez del modelo estándar. Los tests de mayor precisión se han efectuado posteriormente con el anillo de colisiones LEP (en el laboratorio CERN de Ginebra) a partir de 1989, a una energía en centro de masas de $\sqrt{s} \approx 90$ GeV, que se ha ido incrementando posteriormente hasta alcanzar un valor máximo de 209 GeV en el año 2000. Los resultados obtenidos en LEP se discutirán posteriormente.

Para $\sqrt{s} < M_Z$, las secciones eficaces de colisión e^+e^- están dominadas por procesos de QED. Se supone en lo que sigue una energía en centro de masas superior al umbral de producción de pares $b\bar{b}$, es decir, $\sqrt{s} > 10$ GeV, de forma que sean despreciables todos los efectos debidos a las resonancias hadrónicas y

el modelo de partones con quarks de masa nula sea plenamente aplicable. Existen básicamente 3 tipos de procesos, $e^+e^- \to \bar{f}f$, donde f es cualquier fermión elemental (leptón o quark) salvo el electrón, y los procesos $e^+e^- \to e^+e^-$ y $e^+e^- \to \gamma\gamma$ que requieren un tratamiento especial. El proceso $e^+e^- \to f\bar{f}$ se describe en QED mediante un único diagrama de Feynman llamado 'diagrama de aniquilación' o diagrama de la vía s (véase figura 10.15).

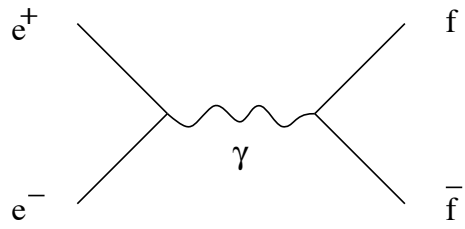


Figura 10.15: Diagrama de Feynman para la aniquilación $e^+e^- \to f\bar{f}$, donde f es cualquier fermión elemental salvo el electrón.

La sección eficaz de este proceso es la llamada 'sección eficaz puntual' y sirve de referencia para todas las demás secciones eficaces. Su valor es

$$\boxed{\sigma_{pt} = \frac{4}{3}\pi\frac{\alpha^2}{s} = \frac{86{,}8 \ \text{nb}}{s\ (\text{GeV}^2)}} \tag{10.21}$$

donde α es la constante de estructura fina de QED. Se han despreciado tanto la masa de f como los efectos de interferencia electrodébil que se estudiarán mas adelante. Es interesante observar la dependencia de σ en $1/s$, característica de las colisiones e^+e^-. En realidad σ_{pt} es únicamente válida si f es un muón o un leptón τ. Si f es un quark, hay que incluir la carga del mismo y los tres estados de color posibles. Por tanto, la sección eficaz para quarks es $\sigma(e^+e^- \to q\bar{q}) = N_c Q_q^2\, \sigma_{pt}$ donde $N_c = 3$. Dado que los procesos con distintos tipos de quarks en el estado final son normalmente indistinguibles, es útil definir el siguiente observable

$$\boxed{R_{had} = \frac{\sigma(e^+e^- \to had)}{\sigma_{pt}} = N_c \sum_q Q_q^2 (1 + \frac{\alpha_s}{\pi})} \tag{10.22}$$

donde had es la suma de todos los estados hadrónicos, es decir, todos los quarks posibles en el estado final. Se ha incluido también una pequeña corrección de QCD que depende de la constante de acoplo de los quarks α_s. En la zona de

energías que se está considerando, se tiene $\alpha_s \approx 0{,}15$, con lo cual resulta $R_{had} \approx 3{,}8$, ya que únicamente pueden producirse los 5 primeros quarks.

Además de la sección eficaz, existe otro observable importante que es la asimetría FB (en inglés *forward-backward*) que depende de la distribución angular de f. La distribución angular tiene la forma siguiente

$$\frac{d\sigma}{dy} = \frac{3}{8}\sigma_{pt}(1+y^2) \qquad \text{siendo} \qquad y = \cos\theta$$

donde θ es el ángulo de difusión de f respecto a la dirección de e^- en el referencial del centro de masas (figura 10.16).

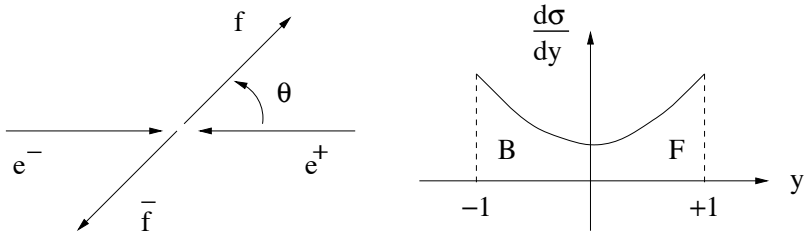


Figura 10.16: Definición del ángulo de difusión y distribución angular para el proceso $e^+e^- \to f\bar{f}$.

En esta distribución angular se define la región F para valores del ángulo de difusión tales que $0 < y < 1$ y la región B para $-1 < y < 0$. La asimetría FB se define entonces como

$$\boxed{A_{FB} = \frac{\sigma_{\mathrm{F}} - \sigma_B}{\sigma_{\mathrm{F}} + \sigma_B}} \tag{10.23}$$

y resulta ser nula para la distribución de la figura anterior, por ser ésta simétrica. El interés de este observable radica en que es muy sensible a las interferencias de procesos distintos de QED y en particular al bosón Z.

Los procesos $e^+e^- \to e^+e^-$ (llamado difusión de Bhabha) y $e^+e^- \to \gamma\gamma$ requieren un tratamiento especial porque existen en ambos casos 2 diagramas, como muestra la figura 10.17. En el caso de $e^+e^- \to e^+e^-$, además de la vía s existe la vía t, y en el caso de $e^+e^- \to \gamma\gamma$, además de la vía t existe la vía u por intercambio de los fotones.

Las secciones eficaces diferenciales para estos dos procesos son respectivamente

$$\frac{d\sigma}{dy} = \frac{3}{8}\sigma_{pt}\left(\frac{3+y^2}{1-y}\right)^2 \qquad \text{y} \qquad \frac{d\sigma}{dy} = \frac{3}{2}\sigma_{pt}\left(\frac{1+y^2}{1-y^2}\right)$$

En el primer caso, la distribución presenta una fuerte asimetría hacia $y = +1$, es decir, hacia pequeños valores del ángulo de difusión, y de hecho la sección eficaz

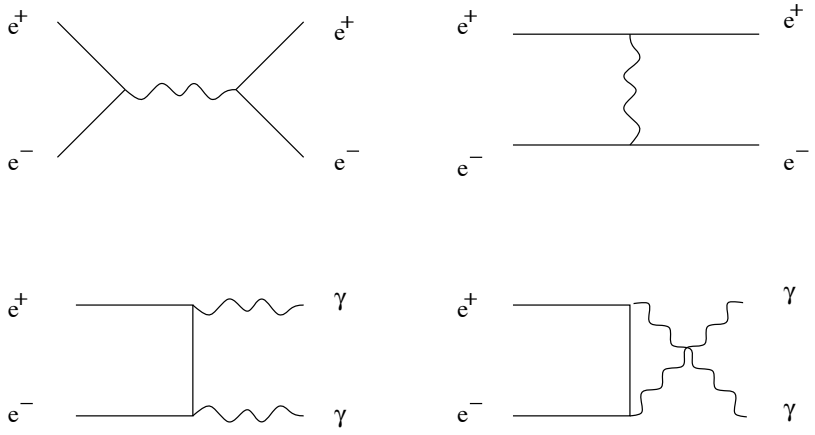


Figura 10.17: Diagramas de Feynman para $e^+e^- \to e^+e^-$ y $e^+e^- \to \gamma\gamma$.

diferencial se hace infinita para $y = +1$ (véase figura 10.18). En el segundo caso, la distribución es simétrica, pero de nuevo infinita para $y = \pm 1$.

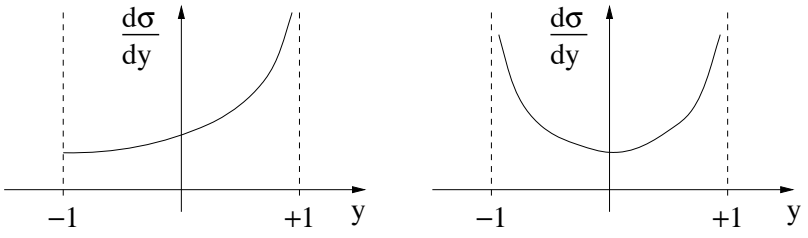


Figura 10.18: Distribuciones angulares para $e^+e^- \to e^+e^-$ y $e^+e^- \to \gamma\gamma$.

En ambos casos la sección eficaz total es infinita. En el caso de $e^+e^- \to \gamma\gamma$, esto se debe simplemente al hecho de haber despreciado la masa del electrón. Si se tiene en cuenta ésta, el resultado es

$$\sigma(e^+e^- \to \gamma\gamma) \approx \frac{3}{2}\sigma_{pt}\left(\mathrm{Log}\frac{s}{m_e^2} - 1\right)$$

En el caso de $e^+e^- \to e^+e^-$, la singularidad es esencial y no se puede eliminar, aunque no es físicamente observable. La sección eficaz para $-1 < y < y_m$, donde y_m está determinado por la cobertura máxima del detector a pequeños ángulos, es

$$\sigma(e^+e^- \to e^+e^-) = 3\sigma_{pt}\Big[\frac{4y_m}{1-y_m^2} - 2\mathrm{Log}\Big(\frac{1+y_m}{1-y_m}\Big) + \frac{9}{4}y_m + \frac{1}{12}y_m^3\Big]$$

Desde un punto de vista experimental, el enorme crecimiento de la difusión de Bhabha a pequeño ángulo encuentra una aplicación inmediata en la medida de la

luminosidad. Todos los detectores de colisiones e^+e^- disponen de contadores de electrones difundidos a bajo ángulo que permiten calcular la luminosidad del experimento a partir de la relación $\mathcal{L} = N_e/\sigma_e$, siendo N_e el número de electrones observados en el contador y σ_e la sección eficaz correspondiente, cuya expresión es

$$\sigma_e \approx 12\sigma_{pt}\left(1/\theta^2_{min} - 1/\theta^2_{max}\right)$$

donde θ_{min} y θ_{max} son los ángulos que definen la cobertura geométrica del detector, tal como se ilustra en la figura 10.19.

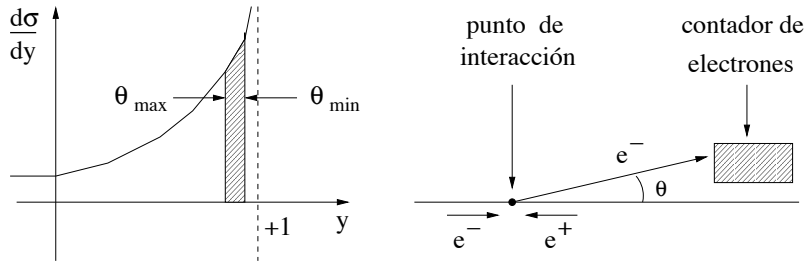


Figura 10.19: Sección eficaz diferencial de la difusión Bhabha, indicando la región de cobertura de un detector de luminosidad.

10.6.2 Las colisiones e^+e^- para $\sqrt{s} \approx M_Z$

Considérese de nuevo el proceso $e^+e^- \to \bar{f}f$, pero esta vez para $\sqrt{s}$ cerca de la masa del bosón Z. En este caso, hay que añadir un diagrama de Feynman con intercambio de un bosón Z, tal como muestra la figura 10.20.

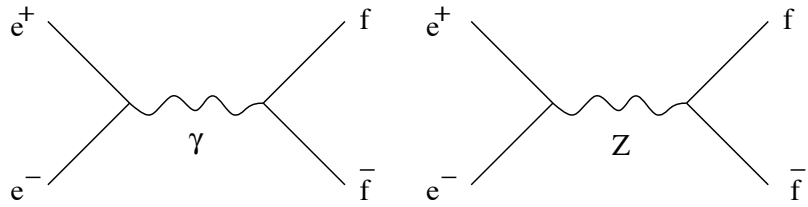


Figura 10.20: Diagramas de Feynman para la aniquilación $e^+e^- \to f\bar{f}$ en la zona de energías $\sqrt{s} \approx M_Z$.

A partir de estos diagramas se deduce una amplitud $T = T_\gamma + T_Z$ y, por tanto,

una sección eficaz proporcional a

$$|T|^2 = |T_\gamma + T_Z|^2 = |T_\gamma|^2 + |T_Z|^2 + 2\,Re(T_\gamma^* T_Z)$$

Para obtener esta sección eficaz se requiere el uso de las técnicas habituales empleadas en el cálculo de diagramas de Feynman, pero es posible determinar la dependencia en energía, es decir, en el parámetro s, a partir de argumentos simples que se presentan a continuación. En el caso del proceso mediado por el fotón γ, el propagador contribuye a la amplitud con un factor $1/s$ y, por tanto, con $1/s^2$ a la sección eficaz. Como la sección eficaz puntual depende de $1/s$, esto significa que el resto del diagrama y el espacio de fases contribuyen con un factor s adicional. En el caso del proceso mediado por el bosón Z, el propagador contribuye a la amplitud con un factor $1/(s - M_Z^2)$ y siguiendo el mismo razonamiento que para el fotón, la contribución a la sección eficaz ha de ser de la forma $s/(s-M_Z^2)^2$. Esta expresión de la sección eficaz no es sin embargo válida para $s \approx M_Z^2$ (en cuyo caso se hace infinita) porque el bosón Z es una partícula inestable con una anchura finita Γ_Z. Esta anchura se puede introducir de forma simple observando que una partícula con masa compleja $M = M_0 - i\Gamma/2$ se desintegra justamente con una vida media Γ. En efecto, en el referencial propio de esta partícula,

$$\psi(t) = e^{-iEt}\psi(0) = e^{-iMt}\psi(0) = e^{-iM_0 t}e^{-\frac{\Gamma}{2}t}\psi(0)$$

luego $|\psi(t)|^2 = |\psi(0)|^2 exp(-\Gamma t)$. Si se aplica esta regla al propagador del bosón Z, resulta la siguiente amplitud

$$|T_Z|^2 \sim \frac{1}{|s - (M_Z - i\Gamma_Z/2)^2|^2} \approx \frac{1}{(s - M_Z^2)^2 + M_Z^2\Gamma_Z^2}$$

que ahora si es finita para $s \approx M_Z^2$. Para obtener esta expresión se ha supuesto que la anchura de Z es muy inferior a su masa. La contribución del bosón Z a la sección eficaz total es, por tanto,

$$\boxed{\sigma_Z(s) = \frac{a_z s}{(s - M_Z^2)^2 + M_Z^2\Gamma_Z^2}} \qquad (10.24)$$

donde a_z es una constante independiente de la energía. La curva que describe $\sigma_Z(s)$ es una curva de Breit-Wigner. Esta función describe en general la curva de excitación de cualquier resonancia en física de partículas. La sección eficaz total es, por tanto,

$$\sigma(s) \approx \sigma_\gamma(s) + \sigma_Z(s) = \frac{a_\gamma}{s} + \frac{a_z s}{(s - M_Z^2)^2 + M_Z^2\Gamma_Z^2}$$

donde $a_\gamma = 4/3\pi\alpha^2 Q_f^2$ por comparación con el valor de la sección eficaz puntual. Se ha despreciado el término de interferencia ya que éste no contribuye de forma significativa a la sección eficaz total (pero en cambio es decisivo para la asimetría). La figura 10.21 muestra estas secciones eficaces.

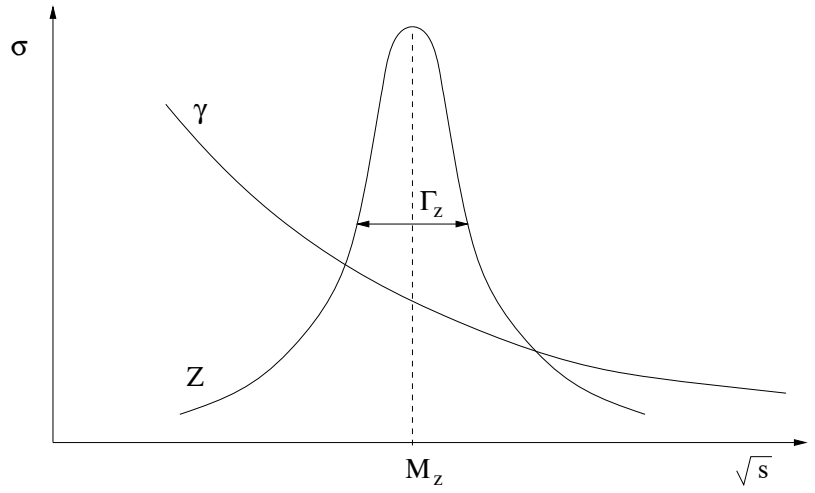


Figura 10.21: Secciones eficaces σ_γ y σ_Z en función de s.

El cálculo exacto de los 2 diagramas de Feynman de la figura 10.20 conduce al siguiente resultado para la sección eficaz diferencial

$$\boxed{\frac{d\sigma}{dy} = \frac{3}{8}\sigma_{pt}[f_s(s)(1+y^2) + f_a(s)y]} \tag{10.25}$$

que es la suma de un término simétrico y un término antisimétrico. Las funciones $f_s(s)$ y $f_a(a)$ adoptan las siguientes expresiones

$$f_s(s) = Q_f^2 - 8Q_f(Re\,\chi)v_e v_f + 16|\chi|^2(v_e^2+a_e^2)(v_f^2+a_f^2)$$

$$f_a(s) = \qquad -8Q_f(Re\,\chi)a_e a_f + 16|\chi|^2(2a_e v_e)(2a_f v_f)$$

siendo v_f y a_f las constantes de acoplo vectorial y axial de Z con el fermión f, y $\chi(s)$ el siguiente parámetro complejo

$$\chi(s) = \frac{G_F M_Z^2}{8\pi\alpha\sqrt{2}}\Big(\frac{s}{s - M_Z^2 + i\Gamma_Z M_Z}\Big)$$

Para $f_s = Q_f^2$ y $f_a = 0$ se recupera la expresión obtenida con únicamente el intercambio fotónico del primer diagrama. Es fácil comprobar que los términos en $Re\,\chi$ proceden de la interferencia γZ mientras que el término en $|\chi|^2$ es la contribución del diagrama con intercambio de Z. El término antisimétrico no contribuye a a la sección eficaz total, mientras que el término simétrico no contribuye a la asimetría, de forma que

$$\boxed{\sigma_f(s) = \sigma_{pt} f_s(s) \qquad \text{y} \qquad A_{FB}^f(s) = \frac{3}{4}\frac{f_a(s)}{f_s(s)}} \tag{10.26}$$

La variación de estos observables con la energía en centro de masas $\sqrt{s}$ aparece en la figura 10.22. La asimetría A_{FB} crece al principio considerablemente con la energía, pero cerca de M_Z es muy reducida. En realidad esto es puramente accidental ya que para $\sqrt{s} \approx M_Z$, A_{FB} es proporcional a v_e y $v_e \approx 0$ (v_e es nulo exactamente para $\sin^2\theta_w = 1/4$).

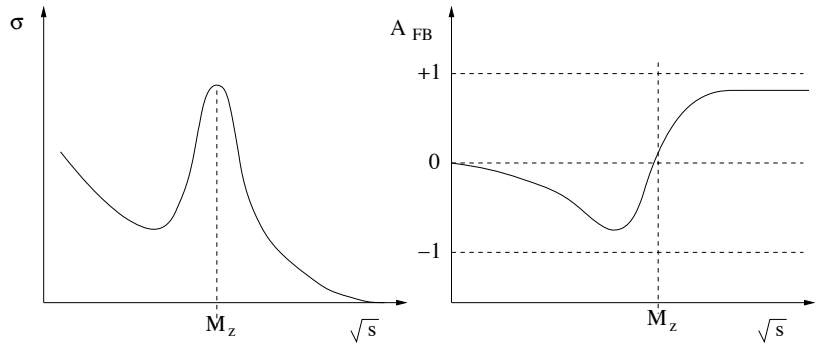


Figura 10.22: Variación de los observables σ_f y A_{FB}^f con $\sqrt{s}$.

A continuación se considera con detalle el caso $\sqrt{s} \approx M_Z$, relevante para la comparación con los datos experimentales de LEP. Como para este valor de $\sqrt{s}$ el parámetro χ es puramente imaginario, $Re\,\chi = 0$ y el término de interferencia se anula, con lo cual

$$f_s(s) = 16|\chi|^2(v_e^2 + a_e^2)(v_f^2 + a_f^2) \quad \text{y} \qquad f_a(s) = 16|\chi|^2(2a_e v_e)(2a_f v_f)$$

siendo $|\chi| = G_{\rm F} M_Z^3/(8\sqrt{2}\pi\alpha\Gamma_Z)$. Recordando la expresión de los cocientes de desintegración del bosón Z en pares de fermiones:

$$BR(Z \to f) = \frac{\Gamma_f}{\Gamma_Z} = \frac{G_{\rm F} M_Z^3}{6\pi\sqrt{2}\Gamma_Z}(v_f^2 + a_f^2) = \frac{4}{3}\alpha|\chi|(v_f^2 + a_f^2)$$

resulta un valor de la sección eficaz en el pico del Z de

$$\boxed{\sigma_f^0 = \frac{9}{\alpha^2}\sigma_{pt}\, BR(Z \to e)\, BR(Z \to f) = \frac{12\pi}{M_Z^2}\, BR(Z \to e)\, BR(Z \to f)} \tag{10.27}$$

Para $f = \mu$, por ejemplo, $BR(Z \to \mu) = 3{,}35\,\%$, luego $\sigma_f^0/\sigma_{pt} \approx 190$, es decir, en el pico del Z el término fotónico es despreciable (incluso para la difusión Bhabha con tal de excluir la difusión a ángulos pequeños). De la misma forma, en el pico del Z se obtiene

$$\boxed{A_{FB}^0(f) = \frac{3}{4}A_e A_f \qquad \text{siendo} \qquad A = \frac{2av}{a^2 + v^2}} \tag{10.28}$$

que únicamente depende de las constantes de acoplo v y a, es decir, de $\sin^2\theta_w$.

En realidad no todos los σ_f^0 y $A_{FB}^0(f)$ son observables experimentales. En efecto, si f es un neutrino, el estado final no es observable, y si f es un quark, sólo es observable si se trata de c o b. Esto reduce de hecho el número de observables a los 9 siguientes (prescindiendo de aquellos que dependen de la polarización que no se consideran aquí):

$$M_Z\,,\Gamma_Z\,,\ \sigma_{had}^0,\ \sigma_\ell^0,\ \sigma_b^0,\ \sigma_c^0,\ A_{FB}^0(\ell),\ A_{FB}^0(b)\ \text{y}\ A_{FB}^0(c),$$

siendo had la suma de los quarks y ℓ la media de los leptones e, μ y τ. Por razones experimentales, es más conveniente definir los cocientes

$$R_\ell = \sigma_{had}^0/\sigma_\ell^0, \quad R_b = \sigma_b^0/\sigma_{had}^0 \quad \text{y} \quad R_c = \sigma_c^0/\sigma_{had}^0$$

con lo cual, tras simplificar ligeramente la notación, se llega a la lista

$$M_Z\,,\Gamma_Z\,,\ \sigma_h\,,\ R_\ell,\ R_b,\ R_c,\ A_{FB}^\ell,\ A_{FB}^b\ \text{y}\ A_{FB}^c.$$

Para obtener los valores teóricos se necesitan los valores experimentales

$$G_{\rm F} = 1{,}1664\,10^{-5}\ \text{GeV}^{-2}, \quad M_Z = 91{,}187\ \text{GeV} \quad \text{y} \quad \sin^2\theta_w = 0{,}2315$$

a partir de los cuales se obtienen los valores de la tabla 10.2.

TABLA 10.2: Valores teóricos de observables en el pico del Z.

$\Gamma_Z = 2{,}486$ GeV	$R_\ell = 20{,}84$	$A_{FB}^\ell = 0{,}016$
$\sigma_h^0 = 41{,}42$ nb	$R_b = 0{,}220$	$A_{FB}^b = 0{,}103$
	$R_c = 0{,}170$	$A_{FB}^c = 0{,}074$

La concordancia de estos cálculos con los valores experimentales constituye un importante test del modelo estándar.

10.6.3 Las colisiones e^+e^- para $\sqrt{s} > M_Z$

Para $\sqrt{s} > M_Z$, la sección eficaz es $\sigma_f(s) = \sigma_{pt} f_s$, donde f_s tiende de forma asintótica al valor constante

$$f_s = Q_f^2 - 8Q_f|\chi|v_e v_f + 16|\chi|^2(v_e^2+a_e^2)(v_f^2+a_f^2) \quad \text{siendo} \quad |\chi| = \frac{G_{\rm F}M_Z^2}{8\pi\alpha\sqrt{2}}$$

Para leptones, por ejemplo, $f_s \approx 0{,}15$, luego parece que el bosón Z sólo modifica sustancialmente la sección eficaz muy cerca de $\sqrt{s} = M_Z$. La realidad es sin embargo distinta, ya que los efectos de radiación en el estado inicial modifican la sección eficaz de forma muy significativa, tanto en el propio pico del Z como por encima del mismo.

Existen 2 posibles tipos de radiación: la radiación en el estado inicial (ISR) debida a los electrones que colisionan y la radiación en el estado final (FSR) debida a los fermiones producidos en la colisión (figura 10.23).

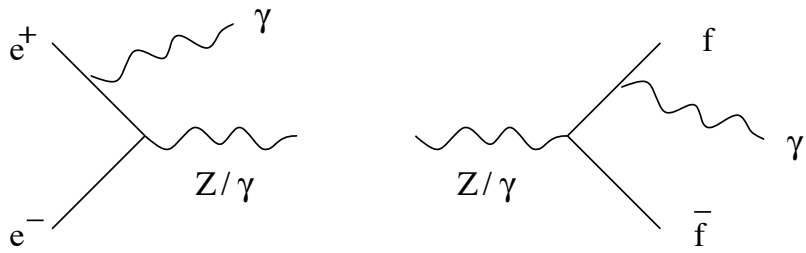


Figura 10.23: Diagramas de Feynman para la radiación en el estado inicial (ISR) y para la radiación en el estado final (FSR).

El tratamiento matemático es muy distinto para la radiación inicial y final. En efecto, en el primer caso la radiación disminuye de forma efectiva la energía en centro de masas de la colisión y la sección eficaz se calcula como una integral sobre la sección eficaz en primer orden σ_f. En el segundo caso, al no modificarse la energía en centro de masas de la colisión, la corrección a σ_0 es un simple factor multiplicativo. Se obtienen las expresiones

$$\boxed{\sigma_{f\gamma}(s) = \int_0^1 G(x)\sigma_f(xs)dx \quad \text{y} \quad \sigma_{f\gamma}(s) = \sigma_f(s)\left(1 + \frac{3}{4}Q_f^2\frac{\alpha}{\pi}\right)} \quad (10.29)$$

para ISR y FSR respectivamente. La función $G(x)$ se puede interpretar como la probabilidad de que un electrón emita un fotón y reduzca su energía por un factor x (la fracción de energía transferida al fotón sería, por tanto, $1-x$). La expresión de $G(x)$ es

$$G(x) = \beta(1-x)^{\beta-1} - \frac{\beta}{2}(1+x) + \mathcal{O}(\beta^2) \quad \text{siendo} \quad \beta \approx \frac{2\alpha}{\pi}\text{Log}\frac{s}{m_e^2}$$

La radiación final introduce correcciones muy pequeñas en las secciones eficaces, del orden de $0{,}2\,\%$. La radiación inicial, por el contrario, introduce correcciones muy sustanciales como puede comprobarse en la figura 10.24. La altura del pico se ve reducida por un factor de aproximadamente

$$(\Gamma_Z/M_Z)^\beta(1+3\beta/4) \approx 0{,}72$$

y la posición del máximo se ve desplazada igualmente en

$$-M_Z(\Gamma_Z/M_Z)^2/4 \approx -17 \text{ MeV}$$

Puede parecer sorprendente que los efectos radiativos, que son correcciones proporcionales a $\alpha = 1/137$, puedan modificar la sección eficaz de forma tan notable.

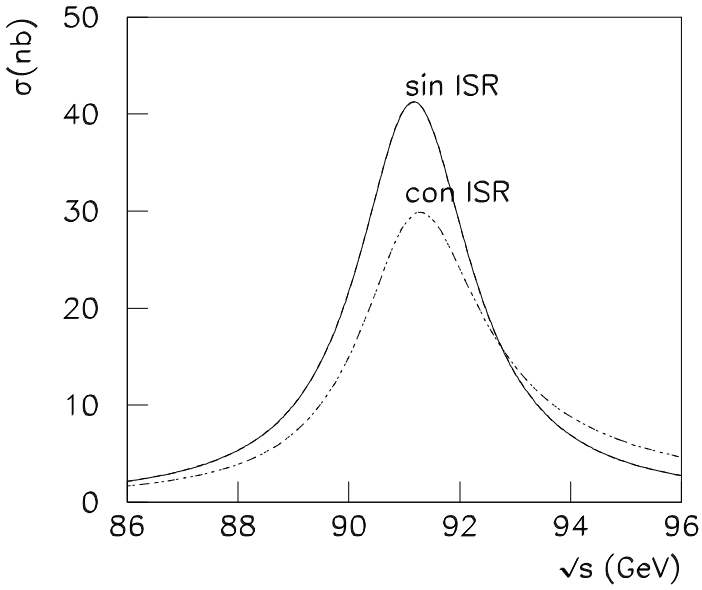


Figura 10.24: Sección eficaz para el proceso $e^+e^- \to had$ con y sin radiación en el estado inicial (ISR), en torno al pico del Z.

Sin embargo hay que observar que las correcciones en el estado inicial aparecen como una serie en el parámetro β que contiene un factor de incremento logarítmico respecto a α, de forma que para $s \approx M_Z^2$ se tiene $\beta \approx 0{,}11$. La función $G(x)$ puede desarrollarse en el parámetro β de la forma siguiente

$$G(x) = \beta\frac{(1-x)^\beta}{1-x} - \frac{\beta}{2}(1+x) \approx \beta\frac{1}{1-x}[1+\beta\text{Log}(1-x)+...] - \frac{\beta}{2}(1+x)$$
$$= \frac{\beta}{2}\Big(\frac{1+x^2}{1-x}\Big) + \mathcal{O}(\beta^2)$$

Pero este desarrollo no es evidentemente válido para $x \to 1$ (fotones blandos) sino únicamente para $x \to 0$ (fotones duros). Se llega de esta forma a una sección eficaz para emisión de fotones duros de

$$\sigma_{f\gamma}(s) \approx \frac{\beta}{2}\int_\epsilon^1 dx\Big(\frac{1+x^2}{1-x}\Big)\sigma_f(xs) \quad \text{con} \quad \epsilon > 0$$

Para $s \gg M_Z^2$, la sección eficaz $\sigma_f(s)$ se puede tomar igual a una δ de Dirac centrada en M_Z, es decir,

$$\sigma_f(s) \approx \frac{\sigma_f^0 M_Z^2\Gamma_Z^2}{(s-M_Z^2)^2 + M_Z^2\Gamma_Z^2} \approx \pi\sigma_f^0 M_Z\Gamma_Z\delta(s-M_Z^2)$$

donde σ_f^0 es la sección eficaz en el pico del Z y la normalización de la δ de Dirac se ha escogido de forma que su integral coincida con la de la función de Breit-Wigner. Tras integrar, la sección eficaz es

$$\sigma_{f\gamma}(s) \approx \sigma_f^0 M_Z \Gamma_Z \Big(\frac{1+x_z^2}{1-x_z}\Big)\frac{\alpha}{s}\mathrm{Log}\frac{s}{m_e^2} \quad \text{siendo} \quad x_z = \frac{M_Z^2}{s} \ll 1$$

Recordando que $\sigma_f^0 = 12\pi\Gamma_e\Gamma_f/(M_Z\Gamma_Z)^2$, la sección eficaz de emisión de fotones duros se puede expresar igualmente en la forma

$$\boxed{\sigma_{f\gamma}(s) = \frac{3}{4}\sigma_{pt}\frac{1+(1-4s_w^2)^2}{4s_w^2c_w^2}\Big(\frac{1+x_z^2}{1-x_z}\Big)\mathrm{Log}\frac{s}{m_e^2}BR(Z\to f)} \qquad (10.30)$$

siendo $s_w = \sin\theta_w$ y $c_w = \cos\theta_w$. Resulta fácil comparar esta sección eficaz con la sección eficaz puntual. Para $s = 2M_Z^2$ por ejemplo, $\sigma_{f\gamma}(s) \approx \sigma_{pt}$. Esto significa que hay tantos sucesos con fotones duros como pares $f\bar{f}$. Estos sucesos se llaman sucesos de retorno radiativo ya que la masa invariante del par $f\bar{f}$ es justamente la masa de Z y no $\sqrt{s}$ como cabría esperar. Desde el punto de vista experimental esto sucesos tienen interés para calibrar el detector, pero no para calcular, por ejemplo, las asimetrías A_{FB}.

Además de los procesos $e^+e^- \to f\bar{f}$ y $f\bar{f}\gamma$ que se acaban de discutir, tienen interés en esta zona de energías los procesos $e^+e^- \to W^+W^-$ y $e^+e^- \to ZZ$, que pueden producirse por encima de sus umbrales de producción respectivos de $2M_W$ y $2M_Z$. Los diagramas de Feynman asociados a estos procesos aparecen en la figura 10.25. Para $e^+e^- \to W^+W^-$ el primer diagrama tiene un interés muy especial ya que incluye los acoplos triples característicos de los campos *gauge* y abre, por tanto, la posibilidad de su verificación experimental. En cuanto a $e^+e^- \to ZZ$, los diagramas son idénticos a los del proceso $e^+e^- \to \gamma\gamma$. Para W^+W^- se obtiene

$$\boxed{\sigma_{WW}(s) = \frac{3}{8}\frac{\beta_w}{s_w^4}\sigma_{pt}\Big[F_{\nu\gamma}(x_w) + F_{\nu\gamma Z}(x_w)\Big(\frac{M_Z^2}{s-M_Z^2}\Big) + F_Z(x_w)\Big(\frac{M_Z^2}{s-M_Z^2}\Big)^2\Big]} \qquad (10.31)$$

siendo $x_w = M_W^2/s$. Esta expresión está ordenada en función de las contribuciones del bosón Z, cuyo propagador es fácilmente identificable. Las funciones $F(x_w)$ son las siguientes

$$F_{\nu\gamma}(x_w) = (1+2x_w+2x_w^2)\frac{1}{\beta_w}\mathrm{Log}\Big(\frac{1+\beta_w}{1-\beta_w}\Big) - \frac{5}{4} \quad ,$$

$$F_{\nu\gamma Z}(x_w) = (1-2s_w^2)\Big[(x_w^2+2x_w)\frac{2}{\beta_w}\mathrm{Log}\Big(\frac{1+\beta_w}{1-\beta_w}\Big) - \Big(\frac{1}{12x_w}+\frac{5}{3}+x_w\Big)\Big]$$

$$\text{y} \quad F_Z(x_w) = (8s_w^4 - 4s_w^2 + 1)\Big(\frac{1}{x_w^2}+\frac{20}{x_w}+12\Big)\frac{\beta_w^2}{48} \quad ,$$

siendo $\beta_w = \sqrt{1-4x_w}$ la velocidad del bosón W en el centro de masas. Es interesante analizar el comportamiento de esta sección eficaz. Cerca del umbral, es decir, para $\sqrt{s} \approx 2M_W$, únicamente contribuye el diagrama de la vía t (intercambio de neutrino) y se obtiene

$$\sigma_{WW}(s) \approx \frac{3}{4}\frac{\beta_w}{s_w^4}\sigma_{pt} + \mathcal{O}(\beta_w^3)$$

Sin embargo el diagrama de la vía t crece linealmente con la energía, violando unitariedad. Este crecimiento se cancela con la interferencia $\nu\gamma$ de forma que para $\sqrt{s} \gg M_W^2$ la sección eficaz decrece con la energía en la forma

$$\sigma_{WW}(s) \approx \frac{3}{8}\frac{1}{s_w^4}\sigma_{pt}\mathrm{Log}\frac{s}{M_W^2}$$

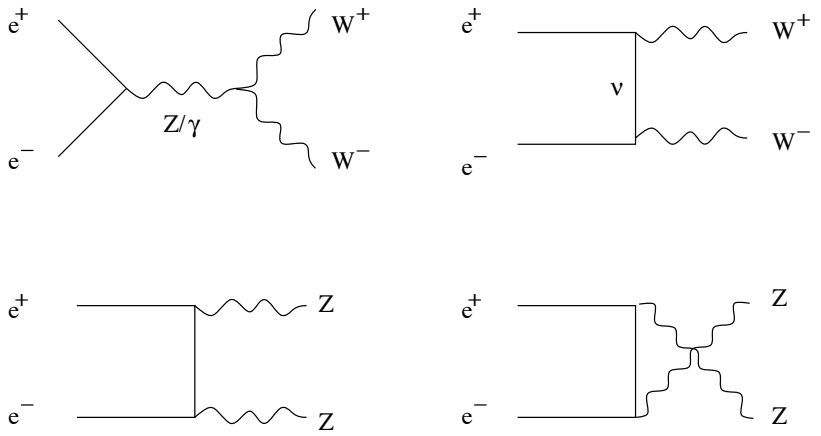


Figura 10.25: Diagramas de Feynman para $e^+e^- \to W^+W^-$ y $e^+e^- \to ZZ$.

Para la producción de ZZ, la sección eficaz es

$$\boxed{\sigma_{ZZ}(s) = \frac{3}{4}\sigma_{pt}\frac{1+6(1-4s_w^2)^2+(1-4s_w^2)^4}{64s_w^4\,c_w^4}\left[\frac{1+4x_z^2}{1-2x_z}\mathrm{Log}\left(\frac{1+\beta_z}{1-\beta_z}\right)-\beta_z\right]} \tag{10.32}$$

siendo $x_z = M_Z^2/s$ y $\beta_z = \sqrt{1-4x_z}$. El comportamiento de esta sección eficaz en el umbral de producción de pares ZZ y para $s \gg M_Z^2$ coincide con el de la producción de pares WW. La figura 10.26 muestra las secciones eficaces de colisión e^+e^- para diversos procesos por encima de $\sqrt{s} = M_Z$.

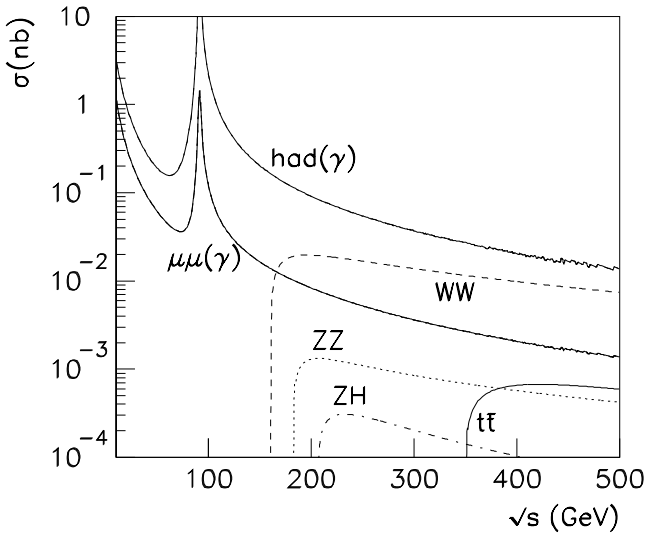


Figura 10.26: Secciones eficaces para diversos procesos de colisión e^+e^- por encima del pico del bosón Z. Para la producción de ZH se ha supuesto $M_H = 115$ GeV.

El bosón de Higgs puede igualmente producirse en asociación con un bosón Z según el mecanismo representado en la figura 10.27. El umbral de este proceso es $\sqrt{s} = M_Z + M_H$ y la sección eficaz

$$\boxed{\sigma_{ZH}(s) = \frac{1}{4}\sigma_{pt}\frac{1+(1-4s_w^2)^2}{64 s_w^4 c_w^4}\left[\frac{\sqrt{\lambda}(\lambda+12x_z)}{(1-x_z)^2}\right]} \qquad (10.33)$$

siendo $\lambda = (1-x_z-x_h)^2 - 4x_z x_h$, donde $x_z = M_Z^2/s$ y $x_h = M_H^2/s$. Para $M_H = 115$ GeV, que es el límite máximo accesible en LEP, esta sección eficaz es muy pequeña como puede apreciarse en la figura 10.26.

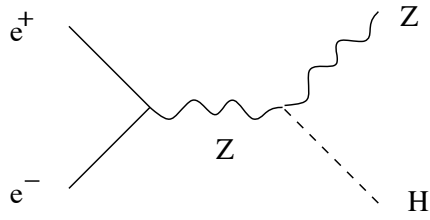


Figura 10.27: Diagrama de Feynman para la aniquilación $e^+e^- \to ZH$.

10.7 Resultados experimentales de LEP

10.7.1 Resultados experimentales de LEP1

A continuación se presenta un resumen de los principales resultados experimentales obtenidos por los 4 experimentos de LEP (ALEPH, DELPHI, OPAL y L3) en la primera fase de la toma de datos (1989-1995), conocida como la fase LEP1. Durante esta fase cada experimento acumuló una luminosidad integrada de 200 pb^{-1}, de los cuales aproximadamente 3/4 en el pico del Z y 1/4 en torno al mismo. Es de justicia mencionar que el experimento SLD acumuló simultáneamente (1992-1998) en el SLC (colisionador lineal de SLAC) y en la misma zona de energías, unos 13 pb^{-1}. Las medidas de SLD tienen el interés de haberse efectuado con haces polarizados, pero no se incluyen en este resumen.

El número de sucesos esperado en LEP se puede estimar a partir de las secciones eficaces y la luminosidad. Dado que la sección eficaz hadrónica en el pico del Z es $\sigma_h^0 \approx 30\ nb$ (tras corregir por efectos radiativos) y que $\sigma_h^0/\sigma_\ell^0 \approx 20$, se esperan del orden de 4 500 000 sucesos hadrónicos y 225 000 leptónicos (para cada especie e, μ y τ) en el pico del Z. La identificación del suceso producido en cada colisión no presenta demasiadas dificultades en LEP y aparece brevemente explicada en las figuras 10.28 y 10.29. La sección eficaz para cada proceso se determina mediante una expresión del tipo

$$\boxed{\sigma_i = \frac{N_i - N_i(bkg)}{\epsilon_i \mathcal{L}}} \tag{10.34}$$

donde N_i es el número de sucesos observados en el canal i, $N_i(bkg)$ el número de sucesos de contaminación (en inglés *background*), ϵ_i la eficacia para detectar los sucesos y finalmente $\mathcal{L}$ la luminosidad integrada. Tanto $N_i(bkg)$ como ϵ_i se obtienen mediante simulaciones del detector por el método de Monte Carlo, mientras que $\mathcal{L}$ se mide con un contador de luminosidad tal como se explicó anteriormente. A continuación las secciones eficaces en función de la energía se ajustan a curvas de Breit-Wigner del tipo

$$\boxed{\sigma_i(s) \approx \frac{\sigma_i^0 s \Gamma_Z^2}{(s - M_Z^2)^2 + M_Z^2 \Gamma_Z^2}} \tag{10.35}$$

tras sustraer la pequeña contribución de los términos fotónico y de interferencia $Z\gamma$, y corregir los efectos de radiación en el estado inicial. La figura 10.30 muestra uno de estos ajustes, en el caso de la sección eficaz hadrónica. Como resultado del ajuste se obtienen los parámetros σ_i^0 (sección eficaz en el pico), M_Z y Γ_Z. La sección eficaz σ_ℓ se obtiene promediando sobre los 3 tipos de leptones y permite calcular el cociente $R_\ell = \sigma_h^0/\sigma_\ell^0$. Tras promediar los resultados de los 4 experimentos se obtiene

$$M_Z = 91{,}187(2)\ \text{GeV},\quad \Gamma_Z = 2{,}495(2)\ \text{GeV},$$
$$\sigma_h^0 = 41{,}54(4)\ \text{nb}\quad \text{y}\quad R_\ell = 20{,}77(3).$$

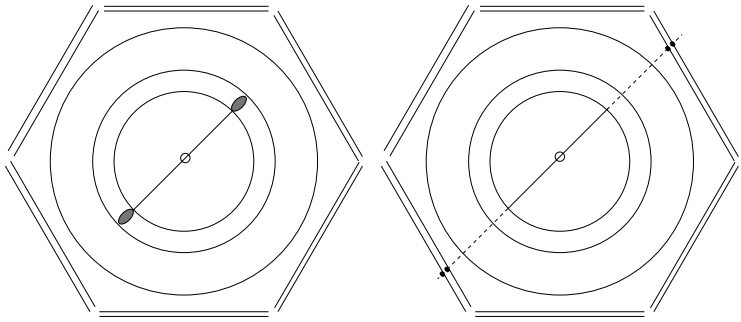


Figura 10.28: Sucesos de colisión $e^+e^- \to e^+e^-$ y $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ visualizados en el plano transverso a los haces. En el dibujo se representan de forma esquemática las principales componentes de un detector típico de LEP (desde el punto de colisión: tubo de vacío, detector de trazas, calorímetro electromagnético, calorímetro hadrónico y cámaras de muones). El primer suceso contiene electrones ya que la energía es absorbida íntegramente en el calorímetro electromagnético. El segundo suceso contiene muones que atraviesan los calorímetros sin dejar señal apreciable, pero son detectados en las cámaras de muones.

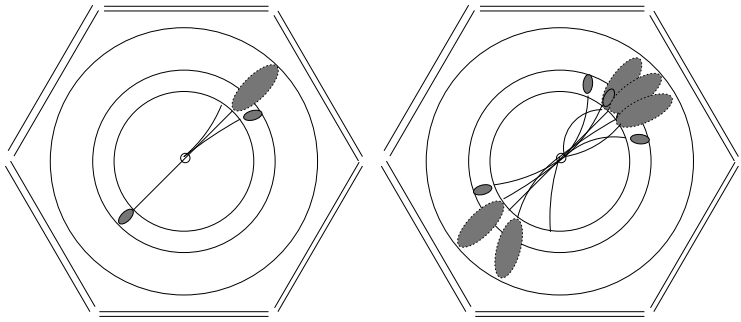


Figura 10.29: Sucesos de colisión $e^+e^- \to \tau^+\tau^-$ y $e^+e^- \to had$ visualizados en el plano transverso a los haces. En el primer suceso se puede apreciar que uno de los dos leptones τ se ha desintegrado en electrón mientras que el otro se ha desintegrado hadrónicamente en 3 piones que depositan su energía en el calorímetro hadrónico. La energía visible ha de ser inferior a la energía de la colisión ya que los neutrinos no pueden detectarse. El segundo suceso es un suceso hadrónico debido a la proliferación de señales tanto en el detector de trazas como en los calorímetros. Es interesante observar cómo las trazas de menor momento se curvan en el campo magnético paralelo a los haces, así como la estructura en *jets* del suceso.

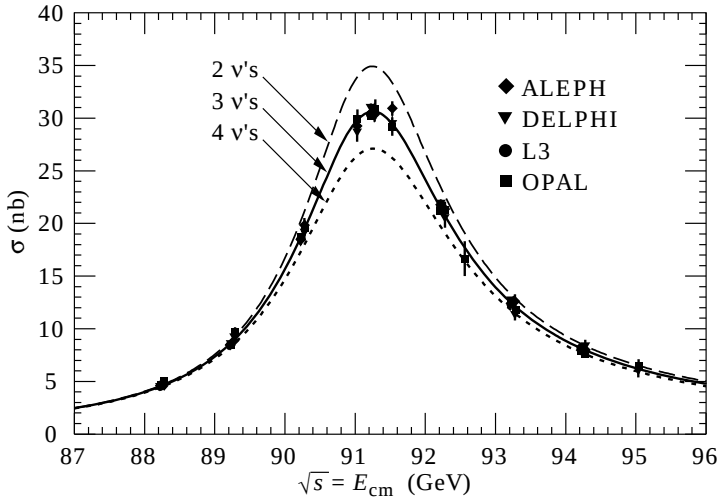


Figura 10.30: Medidas experimentales de la sección eficaz del proceso $e^+e^- \to had$, efectuadas por los experimentos de LEP en torno al pico del bosón Z. *Fuente*: PDG2002, *Phys. Rev.*, **D66** (2002) 010001.

La precisión de estas medidas es muy notable. Para M_Z y Γ_Z el error es sólo de 2 MeV, mientras que para σ_h^0 y R_ℓ es del orden de $0{,}1\,\%$. Es fácil comprobar que ninguna de estas medidas está dominada por el error estadístico. Para M_Z, por ejemplo, el error estadístico esperado es del orden de $\Gamma_Z/\sqrt{N_{had}} \approx 0{,}5$ MeV. La precisión en la medida de M_Z está de hecho limitada por la precisión en la medida de la energía de LEP. Esta medida se ha conseguido efectuar con enorme precisión utilizando la técnica conocida como 'despolarización resonante' que hace uso de la polarización transversa de los electrones en los anillos de colisiones.

Como se ha comentado anteriormente, en general no es posible identificar el tipo de quark producido en un suceso hadrónico. La identificación sólo es posible para una fracción pequeña de sucesos y a condición de que el quark producido sea de tipo b o c. La identificación del quark b se basa en el recorrido medio de los mesones B antes de desintegrarse, que es de unos 3 mm a partir del punto de interacción. El vértice secundario producido en la desintegración se puede reconstruir utilizando detectores de vértices (basados en tecnologías del silicio) situados en torno al tubo de vacío. Todos los experimentos de LEP incorporaron este tipo de detectores a partir de 1990. La figura 10.31 ilustra esta técnica de identificación del quark b, con la cual se logran aislar muestras de quarks de tipo b con una pureza típica de 96 %, siendo la eficacia en la selección de alrededor de 20 %. La identificación del quark c es más compleja. Uno de

los métodos más utilizados consiste en identificar la cadena de desintegración $c \to D^{*+} \to D^0 \pi^+ \to K^- \pi^+ \pi^+$, apoyándose en su cinemática característica (el π^+ producido en la desintegración de D^{*+} está casi en reposo en el sistema propio del D^{*+}). Sin embargo la probabilidad de esta cadena es muy reducida y no se logran eficacias superiores al 2 %. Existe además contaminación de las muestras obtenidas debida a mesones D^{*+} producidos en desintegraciones de hadrones B. Se obtienen a pesar de todo interesantes medidas de R_b y R_c:

$$R_b = 0{,}216(1) \quad \text{y} \quad R_c = 0{,}172(3).$$

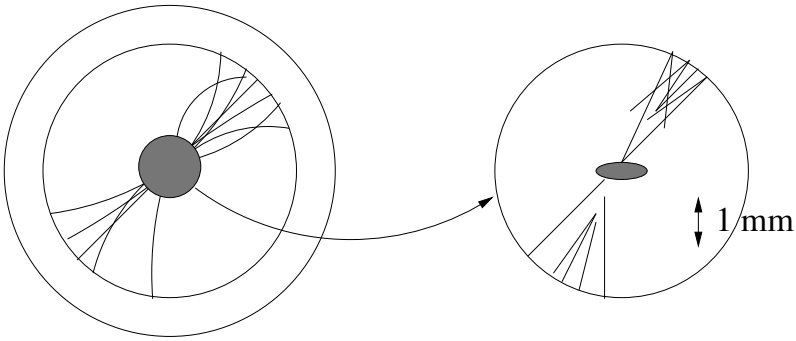


Figura 10.31: Identificación de un suceso hadrónico como suceso $b\bar{b}$ mediante la técnica de los vértices secundarios.

En el caso de las asimetrías A_{FB}, la situación es bien distinta ya que dominan los errores estadísticos. En el caso del quark b hay que mencionar que la técnica de identificación de los vértices secundarios pierde gran parte de su efectividad, ya que la medida de la asimetría requiere el conocimiento de la carga del quark y no sólo su identificación. De hecho, la medida de A_{FB} para el quark b se basa principalmente en una técnica distinta, menos eficiente, consistente en la identificación de leptones con momento transverso elevado respecto al eje del jet. Tras promediar los resultados, se obtiene

$$A^l_{FB} = 0{,}017(1), \; A^b_{FB} = 0{,}100(2) \quad \text{y} \quad A^c_{FB} = 0{,}071(4).$$

Dado que las asimetrías sólo dependen de $\sin^2 \theta_w$, a partir de los resultados anteriores y otros que no se mencionan aquí (como el de SLD), puede obtenerse el siguiente valor de $\sin^2 \theta_w$:

$$\boxed{\sin^2 \theta_w = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{v_e}{a_e}\right) = 0{,}2315 \pm 0{,}0002} \qquad (10.36)$$

Según se discutirá más adelante, el valor de $\sin^2\theta_w$ depende de su definición. Para recordar que esta medida se ha obtenido utilizando los acoplos del bosón Z, se ha redefinido $\sin^2\theta_w$ en función de v_e y a_e.

Todos los resultados anteriores se muestran tabulados a continuación. La tabla permite también compararlos con las predicciones teóricas en primer orden y segundo orden de la teoría de perturbaciones. Los cálculos de segundo orden son necesarios para obtener buen acuerdo para aquellos observables que han sido medidos con mayor precisión. El parámetro utilizado para comparar los datos con la teoría es el 'número de desviaciones estándar' definido para cualquier medida $A \pm \Delta A$ en la forma

$$N_\sigma = (A_{medido} - A_{calculado})/\Delta A$$

La tabla 10.3 incluye igualmente la precisión $\delta = \Delta A/A$ de las medidas. Como ya se explicó, los cálculos teóricos a primer orden utilizan las medidas de $G_{\rm F}$, M_Z y $\sin^2\theta_w$, y de α_s debido a la corrección hadrónica. Los cálculos a órdenes superiores requieren nuevos parámetros como α y m_t. El acuerdo entre los datos y los cálculos a segundo orden es excelente.

TABLA 10.3: Comparación entre resultados experimentales y predicciones teóricas para los observables de LEP.

observable	medida	$\delta(\%)$	cálculo 1^{er} orden	N_σ	cálculo 2^{ndo} orden	N_σ
M_Z(GeV)	91.187(2)	0.002	–	–	–	–
Γ_Z(GeV)	2.495(2)	0.1	2.486	$+4{,}5$	2.496	$-0{,}5$
σ_h^0(nb)	41.54(4)	0.1	41.42	$+3{,}0$	41.48	$+1{,}5$
R_ℓ	20.77(3)	0.1	20.84	$-2{,}3$	20.74	$+1{,}0$
R_b	0.216(1)	0.5	0.220	$-4{,}0$	0.216	$+0{,}0$
R_c	0.172(3)	1.7	0.170	$+0{,}7$	0.172	$-0{,}0$
A_{FB}^ℓ	0.017(1)	5.9	0.016	$+1{,}0$	0.016	$+1{,}0$
A_{FB}^b	0.100(2)	2.0	0.103	$-1{,}5$	0.104	$-2{,}0$
A_{FB}^c	0.071(4)	5.6	0.074	$-0{,}8$	0.074	$-0{,}8$

El modo de desintegración $Z \to \nu\bar{\nu}$ no es directamente observable, pero sí lo es indirectamente, como bien lo muestra la figura 10.30. En efecto, todos los modos contribuyen a la anchura de la resonancia Γ_Z y esta anchura total es la que se observa en la curva del excitación del Z cualquiera que sea el estado final elegido. Esta simple observación conduce a un resultado inesperado pero de consecuencias insospechadas. Se define la anchura invisible del bosón Z como

$$\Gamma_{inv} = \Gamma_Z - \Gamma_h - 3\Gamma_\ell$$

Las anchuras parciales Γ_h y Γ_ℓ se pueden obtener a partir de los observables

$$\Gamma_h = \left(\frac{\sigma_h^0}{12\pi R_\ell}\right)^{1/2} M_Z\Gamma_Z \qquad \text{y} \qquad \Gamma_\ell = \left(\frac{\sigma_h^0 R_\ell}{12\pi}\right)^{1/2} M_Z\Gamma_Z$$

y a partir de Γ_{inv} se puede deducir el número de generaciones de neutrinos (introduciendo Γ_ℓ para minimizar las correcciones teóricas)

$$\boxed{N_\nu = \frac{\Gamma_{inv}}{\Gamma_\ell}\left(\frac{\Gamma_\ell}{\Gamma_\nu}\right)_{calculado} = 2{,}984 \pm 0{,}008} \qquad (10.37)$$

es decir, no puede existir un nuevo tipo de neutrino con masa inferior a $M_Z/2$. Este resultado, uno de los más importantes de LEP, hace improbable la existencia de nuevas generaciones de leptones e incluso de quarks.

10.7.2 Resultados experimentales de LEP2

Durante la segunda fase de LEP (1989-2000) cada experimento acumuló una luminosidad integrada de 700 pb^{-1} en el rango de energías entre el umbral de producción de pares WW de 161 GeV y la energía máxima alcanzable de 209 GeV, dado el número de cavidades de RF disponibles. A esta luminosidad corresponden unos 10 000 sucesos de pares WW por experimento. Las colisiones tipo $e^+e^- \to f\bar{f}$ han sido estudiadas en detalle, resultando de nuevo en perfecto acuerdo con el modelo estándar. En lo que sigue se presenta únicamente un resumen de los resultados más relevantes referentes a la producción de WW, ZZ y ZH.

Los estados finales de las colisiones $e^+e^- \to WW$ y $e^+e^- \to ZZ$ se caracterizan por la presencia de 4 fermiones en el estado final. Los sucesos más abundantes contienen 4 *jets* y representan aproximadamente el 50 % de las muestras de sucesos. La figura 10.32 recoge las medidas de las secciones eficaces. El acuerdo con las curvas teóricas es excelente, una vez incluidos efectos como la radiación en el estado inicial, las anchuras de los bosones *gauge* y la producción de estados virtuales WW^* y ZZ^*, que permite obtener sucesos por debajo del umbral de producción.

El estudio de los sucesos WW permite obtener los cocientes de desintegración, masa y anchura del bosón W. Los cocientes de desintegración medidos, tras promediar los 3 canales leptónicos, son

$$BR(W \to \ell\nu) = 0{,}107(1) \quad \text{y} \quad BR(W \to had) = 0{,}678(3),$$

a partir de los cuales se puede deducir el coeficiente $|V_{cs}|$ de la matriz CKM, o bien efectuar un interesante test de la universalidad de los acoplos leptónicos del W. En lo que respecta a la masa y la anchura, los resultados obtenidos en el TEVATRON (Fermilab) son competitivos con los de LEP2 y aparecen promediados en la tabla 10.4.

El error de LEP2 en la masa del W es de 42 MeV, muy superior al error de 2 MeV en la masa del Z. En LEP2, la masa del W se obtiene por reconstrucción directa de la masa invariante a partir de los *jets* y leptones que resultan de la desintegración. Imponiendo conservación de energía y momento mediante un ajuste cinemático, esta masa invariante mejora considerablemente. La medida con sucesos a 4 *jets* (46 % de la muestra) está sin embargo plagada por

incertidumbres en el proceso de fragmentación hadrónica (reconexión de color, correlaciones de Bose-Einstein) y contribuye poco al resultado final. Este resultado final está dominado por los sucesos que contienen 2 *jets*, 1 leptón y energía invisible, que puede reconstruirse mediante el ajuste cinemático (véase figura 10.33). Estos sucesos representan el 44 % de la muestra. De esta forma resulta en LEP2 un error total de 42 MeV, siendo la parte estadística de 29 MeV y la sistemática de 31 MeV, de los cuales 17 MeV proceden de la incertidumbre en la energía de los haces. En LEP2 es difícil medir la anchura del W ya que la resolución experimental en masa invariante es comparable con dicha anchura.

TABLA 10.4: Medidas de la masa y anchura del bosón W.

	M_W(GeV)	Γ_W(GeV)
TEVATRON	$80{,}454(59)$	$2{,}115(105)$
LEP2	$80{,}412(42)$	$2{,}150(91)$
media	$80{,}426(34)$	$2{,}139(69)$

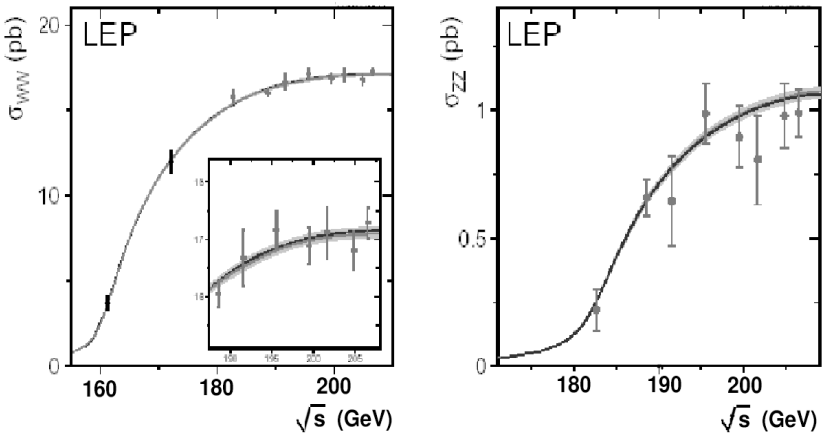


Figura 10.32: Secciones eficaces de los procesos $e^+e^- \to WW$ y $e^+e^- \to ZZ$. Las curvas teóricas aparecen superpuestas sobre los datos experimentales. *Fuente*: LEP *Electroweak Working Group*.

Los resultados anteriores se pueden comparar con las predicciones teóricas, de la misma forma que para el bosón Z, aunque en este caso el cálculo en primer orden es suficiente para obtener buen acuerdo con el experimento, tal como puede apreciarse en la tabla 10.5.

TABLA 10.5: Comparación entre resultados experimentales y predicciones teóricas para los observables asociados al bosón W.

observable	medida	$\delta(\%)$	cálculo 1^{er} orden	N_σ
M_W (GeV)	$80{,}426(34)$	$0{,}04$	–	–
Γ_W (GeV)	$2{,}139(69)$	$3{,}2$	$2{,}100$	$+0{,}6$
$BR(W \to l\nu)$	$0{,}107(1)$	$0{,}9$	$0{,}108$	$-1{,}0$
$BR(W \to had)$	$0{,}678(3)$	$0{,}4$	$0{,}675$	$+1{,}0$

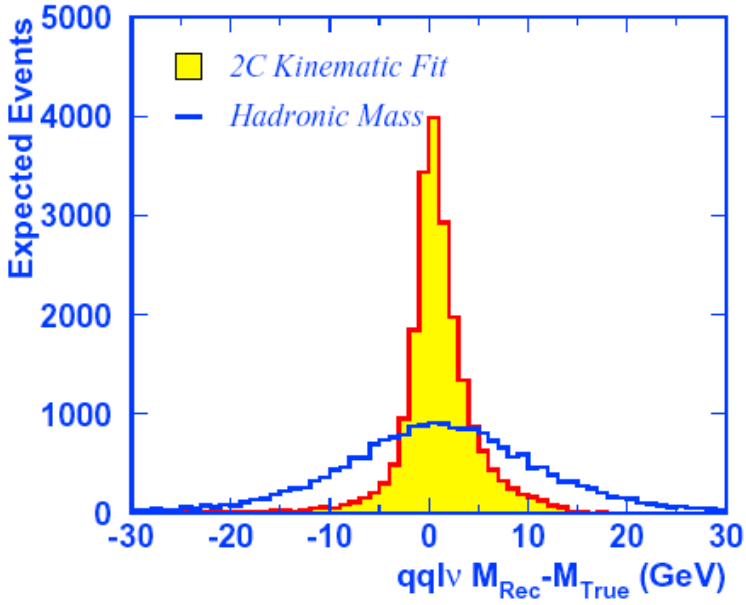


Figura 10.33: Distribución típica de masa invariante para sucesos de 2 *jets*, 1 leptón y energía invisible procedentes de desintegraciones de pares WW. La distribución se muestra antes y después del ajuste cinemático.

El bosón de Higgs puede producirse en el proceso de colisión $e^+e^- \to ZH$, a condición de que su masa sea inferior a $\sqrt{s} - M_Z$, o sea, 118 GeV para el valor máximo de $\sqrt{s} = 209$ GeV alcanzado en LEP2. En realidad, la masa máxima accesible es algo inferior, ya que la sección eficaz decrece rápidamente cerca del límite cinemático. En LEP2, se acumularon durante el año 2000 alrededor de 200 pb^{-1} por experimento, entre 205 y 209 GeV en centro de masas, de los cuales unos 8 pb^{-1} a una energía superior a 208 GeV. En caso de producirse, los sucesos ZH aparecen principalmente como sucesos a 4 *jets*, de los cuales al

menos 2 proceden de un quark b, ya que en la región de masas considerada el modo de desintegración dominante del bosón de Higgs es $H \to b\bar{b}$. El principal fondo de sucesos procede, por tanto, de $e^+e^- \to ZZ$, donde al menos uno de los dos bosones Z se desintegra en $b\bar{b}$. La única diferencia entre los sucesos ZH y ZZ es que en el primer caso la masa invariante de los *jets* identificados como b se acumula en torno a M_H, mientras que en el segundo caso se acumula en torno a M_Z. La figura 10.34 muestra la distribución de masa invariante obtenida tras combinar los 4 experimentos de LEP. Se aprecia claramente el pico del Z y tal vez un ligero exceso de sucesos para $M_H = 115$ GeV, considerado insuficiente para concluir sobre una posible señal procedente del bosón de Higgs. A partir de estos datos se obtiene un límite inferior a M_H de 114 GeV.

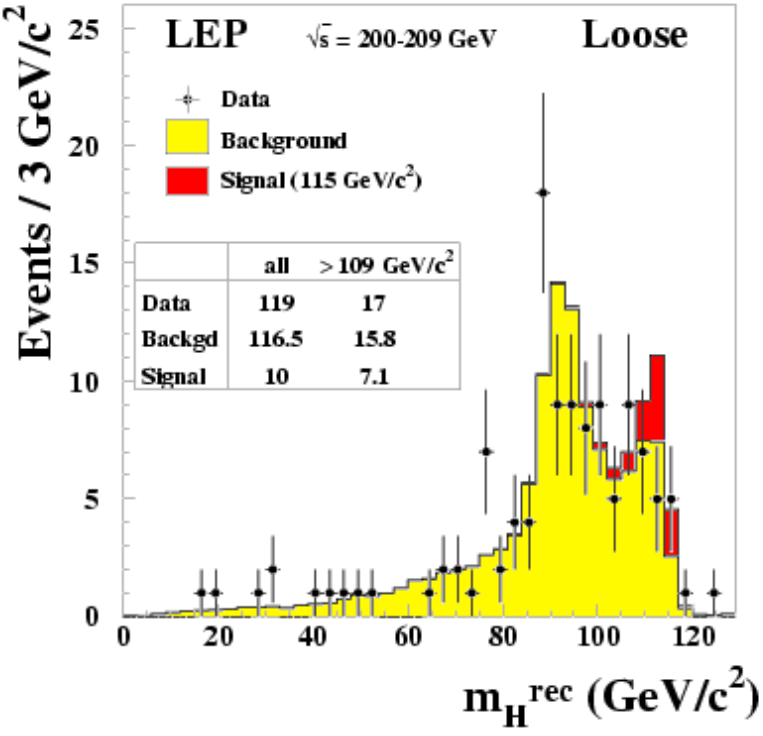


Figura 10.34: Distribución de masa invariante para sucesos de 4 *jets* con al menos 2 identificados como procedentes de quarks de tipo b. Las curvas teóricas aparecen superpuestas, incluyendo en color oscuro la señal esperada para un bosón de Higgs con una masa de 115 GeV. *Fuente*: LEP *Working Group for Higgs Boson Searches*.

Los datos de LEP permiten también obtener, aunque de forma indirecta, un límite superior a M_H. En efecto, una vez medida la masa del bosón W, el

parámetro $\sin^2\theta_w$ se puede determinar de 3 maneras distintas resumidas en la tabla 10.6.

TABLA 10.6: Definiciones posibles del ángulo de Weinberg.

	definición	valor numérico
$(\sin^2\theta_w)_1$	$\pi\alpha/(\sqrt{2}G_{\rm F}M_W^2)$	$0{,}2149(2)$
$(\sin^2\theta_w)_2$	$1-(M_W/M_Z)^2$	$0{,}2221(7)$
$(\sin^2\theta_w)_3$	$(1-v_e/a_e)/4$	$0{,}2315(2)$

El error en los 2 primeros valores está dominado por el error en M_W, mientras que el tercer valor es la medida experimental que resulta de las asimetrías en el pico del Z. Puede comprobarse que los valores no coinciden y ello se debe a las correcciones de segundo orden. Estas correcciones han sido calculadas con gran precisión. Los principales factores correctivos son

$$(\sin^2\theta_w)_2=(\sin^2\theta_w)_1(1+\Delta\alpha-3{,}5\epsilon_t+\ldots)=(\sin^2\theta_w)_3(1-4{,}9\epsilon_t+\ldots)$$

siendo $\Delta\alpha\approx 0{,}06$ la corrección de los bucles fermiónicos al propagador del fotón y $\epsilon_t\approx 0{,}027\,G_{\rm F}m_t^2\approx 0{,}01$ la corrección de los bucles fermiónicos al propagador del W, dominados por el bucle tb. Tras aplicar estas correcciones, los tres valores de $\sin^2\theta_w$ están en buen acuerdo. El interés de calcular estas correcciones con gran precisión se debe a que existe entre los factores correctivos un término que depende de $\mathrm{Log}(M_H/M_W)$ que impediría el acuerdo de los 3 valores en caso de ser M_H arbitrariamente grande. El límite superior a M_H que se obtiene de esta forma, muy sensible a los valores de $\Delta\alpha$ y m_t utilizados, es de 220 GeV. En definitiva, se obtiene

$$\boxed{114\ \text{GeV}<M_H<220\ \text{GeV}} \tag{10.38}$$

siendo el límite superior menos sólido que el inferior ya que al calcular las correcciones de segundo orden se ha ignorado cualquier posible desviación del modelo estándar a muy alta energía. Incidentalmente, los cálculos anteriores demuestran que la constante de estructura fina efectiva en el pico del Z no toma su valor habitual $1/\alpha_0=137$, sino que se tiene más bien

$$1/\alpha(M_Z)=(1-\Delta\alpha)/\alpha_0\approx 129$$

un resultado sobre el que se volverá en el siguiente capítulo.

10.8 Ejercicios

10.1. Haces de neutrinos.

a) Demostrar que la energía máxima de los neutrinos en un haz NBB es:

$$(E_\nu)_{max} = E_b(1 - m_\mu^2/m_b^2)$$

siendo E_b y m_b la energía y la masa de las partículas del haz secundario (piones, kaones). Calcular $(E_\nu)_{max}$ para piones y kaones.

b) Demostrar que, conociendo el parámetro de impacto en el detector, se puede deducir la energía del neutrino incidente. Como aplicación calcular E_ν para un parámetro de impacto de $r = 56$ cm.

Datos: $E_b = 200$ GeV, longitud del túnel de desintegración: $L_d = 300$ m, longitud del absorbente: $L_a = 400$ m.

10.2. Detectores de neutrinos.

Un detector de neutrinos está formado por 20 m de Fe. Suponiendo que el flujo incidente de neutrinos es $\Phi_\nu \approx 10^6$ s^{-1}, calcular el número de interacciones que se producen en un año, para los siguientes casos:

a) el haz de neutrinos es monocromático y $E_\nu = 100$ GeV.

b) el haz es de tipo NBB con $(E_\nu)_{max} = 100$ GeV.

c) Se define la luminosidad de un experimento L mediante la fórmula: $N = L \cdot \sigma$ siendo N el número de sucesos de colisión y σ la sección eficaz correspondiente. Calcular la luminosidad instantánea de este experimento y la luminosidad integrada al cabo de un año de toma de datos.

Datos: La densidad del hierro es $\rho = 8$ g/cm^3. Se considerará una toma de datos ininterrumpida.

10.3. Cinemática de las colisiones de neutrinos.

Se considera una colisión de tipo CC entre un neutrino y un núcleo con emisión de un muón.

a) Demostrar que la energía del neutrino incidente puede deducirse a partir del momento y del ángulo del muón emitido.

b) Demostrar que a partir de las dos variables anteriores puede igualmente deducirse la energía y la dirección del sistema hadrónico producido por el retroceso del núcleo. Aplicación: calcular E_ν, E_h y $\cos\theta_h$ suponiendo $E_\mu = 1{,}96$ GeV y $\theta_\mu = 45°$.

10.4. El experimento GARGAMELLE.

En el experimento GARGAMELLE del CERN efectuado en 1973 se observaron los siguientes sucesos:

tipo sucesos	haz de ν	haz de $\bar{\nu}$
sucesos con muón	428	148
sucesos sin muón	102	63

a) Suponiendo que no hay contaminación en las muestras de sucesos y que la eficacia en la detección es idéntica para ν y $\bar{\nu}$, calcular los observables R^ν, $R^{\bar{\nu}}$ y r.

b) Demostrar la fórmula de Paschos-Wolfenstein:

$$R^* = \frac{R^\nu - rR^{\bar{\nu}}}{1 - r} = \frac{1}{2} - \sin^2\theta_w$$

y utilizarla para calcular $\sin^2\theta_w$ con su correspondiente error estadístico.
¿Es compatible este valor con las medidas actuales?
c) ¿En qué factor se necesitaría aumentar la muestra de sucesos para obtener una medida de $\sin^2\theta_w$ con una precisión comparable a la obtenida en LEP donde el error es de $0{,}0002$?

10.5. Cálculo teórico de los observables de LEP.
Calcular numéricamente los siguientes observables de LEP para $\sqrt{s} = M_Z$:
Γ_Z, σ^0_{had}, R_l, R_b, R_c, A^l_{FB}, A^b_{FB} y A^c_{FB}.
Datos: $G_F = 1{,}1664\ 10^{-5}$ GeV^{-2}, $M_Z = 91{,}187$ GeV, $\sin^2\theta_w = 0{,}2315$.

10.6. Las corrientes neutras en el límite $\sin^2\theta_w = 0$.
a) Calcular los BR del Z, así como los observables experimentales que se miden en los experimentos de neutrinos R^ν, $R^{\bar{\nu}}$ y R^*, en el límite $\sin^2\theta_w$=0.
b) Discutir el significado de dicho límite en el hamiltoniano de interacción del modelo estándar.

10.7. Los acoplos fermiónicos en el modelo estándar.
Demostrar que los acoplos de cualquier fermión con el bosón Z son de la forma: $v = T_3 - 2Q \cdot \sin^2\theta_w$ y $a = T_3$, siendo T_3 la tercera componente del isospín débil y Q la carga eléctrica del fermión considerado.

10.8. Las masas bosónicas en el modelo estándar.
Demostrar que si la transformación que pasa de W_0 y B a los campos físicamente observables Z y A diagonaliza la matriz de masas, entonces se ha de cumplir la relación:

$$M_W = M_Z \cdot \cos\theta_W$$

Se supondrá que la matriz de masas es cuadrática en la masa de los campos bosónicos, y que las masas de W^0 y $W^\pm$ son idénticas.

10.9. Medida de la anchura y de la masa del bosón Z.
Se pretende medir la masa del bosón Z a partir de la masa invariante de los pares e^+e^- y $\mu^+\mu^-$ obtenidos en colisiones e^+e^- a una energía en centro de masas de $\sqrt{s} = 91$ GeV. Calcular la resolución en masa invariante para los siguientes tipos de detectores:
a) Una TPC cuya resolución en momento es $\Delta p/p^2 = 10^{-3}$ (p en GeV).
b) Un calorímetro formado por cristales de BGO cuya resolución en energía es $\Delta E/E$=1 %.
c) Un calorímetro de muestreo formado por plomo y cámaras de gas con una resolución en energía de $\Delta E/E = 20\,\%/\sqrt{E}$ (E en GeV).
d) Suponiendo que se disponen de sendas muestras de 300 000 sucesos e^+e^- y $\mu^+\mu^-$, calcular el error estadístico en la medida de la masa del Z para cada uno de los casos considerados en los apartados **a)**, **b)** y **c)**.

10.10. Medidas de los observables de LEP.
En un experimento de LEP se han observado 17 222 000 electrones en su contador de luminosidad y 5 253 000 sucesos hadrónicos en todo el detector. Todos estos sucesos se han observado a una energía en centro de masas de $\sqrt{s} = M_Z$.
a) Sabiendo que el contador de luminosidad está situado a 2 m del punto de impacto de los haces y que mide 6 cm de radio interior y 16 cm de radio exterior, calcular la luminosidad integrada del experimento (se supondrá una eficacia del 96 % en la detección de electrones y una contaminación de la muestra despreciable).

b) Suponiendo una eficacia de 85 % y una contaminación del 3 % en la muestra de sucesos hadrónicos, calcular la sección eficaz $e^+e^- \to$ hadrones a $\sqrt{s} = 91$ GeV, con su correspondiente error estadístico.

10.11. Medida de R_b en LEP.
Un detector de LEP dispone de 3 321 300 sucesos hadrónicos en el pico del Z y dentro de la cobertura angular de su detector de vértices. En esta muestra de sucesos, hay 299 469 *jets* identificados como b y 28 743 sucesos con al menos 2 *jets* identificados como b. Mediante una simulación por Monte Carlo se calcula que la eficacia de esta identificación es $\epsilon_b = 0{,}20$, siendo los factores de supresión para *jets* de tipo c y u de $r_c = 200$ y $r_u = 800$ respectivamente (se define $r = 1/\epsilon$). Se estima el error de estos cálculos por MC en 5 %.
a) Calcular la pureza de las muestras de sucesos identificados como b.
b) Calcular R_b con su error estdístico y sistemático, utilizando únicamente la muestra total de *jets* identificados.
c) Repetir el cálculo utilizando las dos muestras (método de la doble identificación).

10.12. Error en la medida de observables de LEP.
Hacer una estimación del error estadístico en todos los observables de LEP, utilizando cuando sea necesario los resultados de los problemas anteriores.

10.13. Resultados de LEP y nuevas generaciones de fermiones.
a) Demostrar que N_ν es igual a 3 utilizando los resultados experimentales de LEP.
b) Demostrar que la medida de Γ_Z efectuada en LEP excluye la existencia de nuevos quarks y leptones con masa inferior a $M_Z/2$.

10.14. Radiación inicial y final.
a) Calcular analíticamente la curva de excitación del bosón Z teniendo en cuenta la radiación en el estado inicial. Para la sección eficaz en primer orden, considerar únicamente la curva de Breit-Wigner del bosón Z.
b) Estimar el desplazamiento del pico de la curva y el valor máximo de la sección eficaz producidos por la radiación en el estado inicial.
c) Estimar cómo aumenta la anchura de una resonancia debido a la radiación en el estado final.

10.15. Comportamiento asintótico de σ_{WW} y σ_{ZZ}.
a) Calcular el comportamiento asintótico de σ_{WW} y σ_{ZZ} en el umbral de producción y para energías muy superiores a las masas de los bosones Gauge.
b) Calcular las correcciones por radiación en el estado inicial a σ_{WW} y σ_{ZZ} en el umbral de producción y comparar con los datos experimentales.

10.16. Producción del bosón de Higgs en LEP2.
a) Calcular las correcciones por radiación en el estado inicial a σ_{ZH} suponiendo $M_H = 115$ GeV.
b) Calcular el número de sucesos ZH esperados en LEP2 teniendo en cuenta los siguientes valores de la luminosidad: 110 pb^{-1} para $\sqrt{s} = 207$ GeV y 10 pb^{-1} para $\sqrt{s} = 208$ GeV.

11. El modelo de partones y QCD

11.1 La interacción hadrónica a alta energía

Los estudios de espectroscopía hadrónica sugieren una estructura de los hadrones formada por entes más pequeños, de espín 1/2 y carga fraccionaria. Esta es la idea básica del modelo quark de Gell-Mann y Zweig, basado en la simetría de sabor SU(3). Sin embargo los quarks no son visibles en estado libre, lo cual sólo es posible si existen entre ellos fuerzas de ligadura muy intensas. Esta propiedad de las fuerzas de ligadura entre quarks se conoce como confinamiento. Las reacciones a alta energía ofrecen una imagen muy distinta de los hadrones, incluso contradictoria con la anterior. En efecto, las colisiones a alta energía confirman que los hadrones están compuestos por entes más pequeños, inicialmente llamados partones, pero éstos parecen estar cuasi-libres dentro de los hadrones. Este modelo, muy fructífero para explicar las colisiones a alta energía, se conoce como modelo de partones de Feynman. Estos dos modelos sólo se pueden reconciliar recurriendo a una teoría de la interacción entre quarks basada en la existencia de un número cuántico adicional, el *color*, y en la invariancia *gauge*. Esta teoría es la cromodinámica cuántica (QCD), que predice en efecto una disminución de la constante de acoplo efectiva entre quarks con la energía. Esta importante propiedad se conoce como libertad asintótica.

La explicación del confinamiento de los quarks a partir de QCD sigue siendo en la actualidad un problema abierto. La escala de energías que separa los dos modelos efectivos de interacción entre quarks, el modelo de quarks confinados a baja energía y el modelo de partones a alta energía, está en torno a la masa del nucleón, o sea, 1 GeV. El modelo de partones se puede mejorar utilizando desarrollos perturbativos de QCD. A baja energía, estos desarrollos no son aplicables y se han introducido toda una seria de técnicas, denominadas genéricamente QCD no perturbativa, para describir los resultados experimentales. Estas técnicas incluyen cálculos en retículo, potenciales confinantes, modelos de fragmentación, etc.

La figura 11.1 recoge en forma esquemática las ideas anteriores.

En este capítulo se presenta una introducción a las colisiones hadrónicas a alta energía y a la descripción de las mismas mediante el modelo de partones, mejorado en su caso mediante correcciones de QCD perturbativa. Estas colisio-

nes a alta energía son del tipo $ep \to eX$ (difusión profundamente inelástica), $e^+e^- \to X$ (producción hadrónica en colisiones e^+e^-) y $p\bar{p} \to e^+e^-X$ (producción de pares de Drell-Yan), siendo X cualquier conjunto hadrónico. Entre las colisiones que se van a estudiar figuran otras similares con un muón o un neutrino como proyectil, y un neutrón en vez de un protón como blanco. Aunque no se trate de colisiones, las desintegraciones hadrónicas de objetos pesados como los bosones W y Z e incluso de partículas mas ligeras como el leptón τ o los quarks b y c, pueden igualmente explicarse utilizando el modelo de partones. En la figura 11.2 se presentan estos procesos junto con la interpretación del proceso subyacente según el modelo de partones.

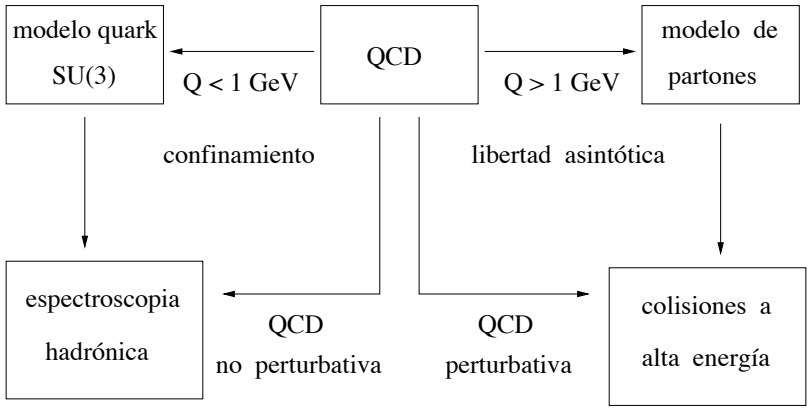


Figura 11.1: Modelos para la interacción fuerte según la escala de energías Q.

11.1.1 La difusión profundamente inelástica

Considérese en primer lugar la difusión de un electrón de energía E sobre un protón, o sea, una partícula de espín 1/2 y carga eléctrica $|e|$, en el límite $E_e \gg m_e$. La sección eficaz de colisión elástica, suponiendo el protón puntual, se obtiene calculando el diagrama de Feynman de la figura 11.3. En el sistema del laboratorio del protón se obtiene la expresión

$$\boxed{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{el} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left(\frac{E'}{E}\right) \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)} \qquad (11.1)$$

siendo M la masa del protón, E' la energía del electrón difundido, θ el ángulo de difusión y q el cuadrimomento transferido. La energía E' del electrón difundido está determinada por el ángulo de difusión,

$$E'/E = 1/\left(1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)$$

y en el límite ultrarrelativista ($m_e = 0$), el cuadrimomento transferido al cuadrado se escribe

$$q^2 = (p - p')^2 = -4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

siendo p y p' los cuadrimomentos del electrón inicial y final. Dado que $q^2 < 0$, es conveniente definir la variable positiva $Q^2 = -q^2$. El límite $M \to \infty$ equivale a despreciar el retroceso del protón, con lo cual $E = E'$ y se obtiene la llamada sección eficaz de Mott

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} = \frac{\alpha^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

que es la versión ultrarrelativista de la sección eficaz de Rutherford para un blanco de espín 1/2.

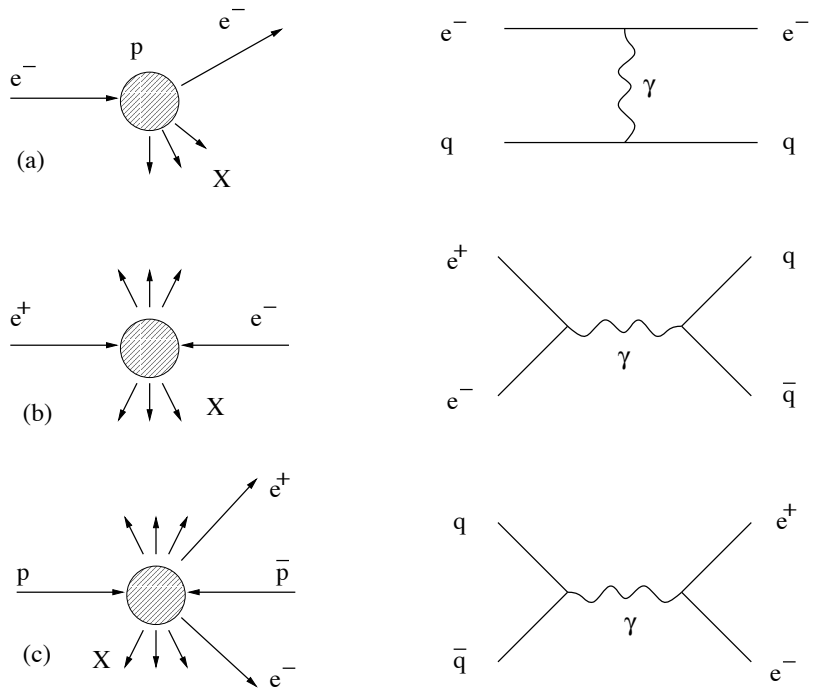


Figura 11.2: Procesos de colisión a alta energía y su interpretación según el modelo de partones: difusión profundamente inelástica (a), producción hadrónica en colisiones e^+e^- (b) y producción de pares de Drell-Yan (c).

Si se considera una colisión inelástica, hay que aportar algunas modificaciones a la sección eficaz anterior. En primer lugar, la energía E' ya no queda

unívocamente determinada por el ángulo de difusión y, por tanto, hay que considerar una sección eficaz doblemente diferencial en el ángulo de difusión y la energía E'. En segundo lugar, se necesitan factores de forma para describir la transición del protón inicial a los múltiples estados hadrónicos que pueden producirse en la colisión. Se demuestra utilizando invariancia relativista y conservación de la corriente electromagnética, que tras integrar sobre todos los estados hadrónicos finales, sólo se necesitan dos factores de forma, W_1 y W_2, para describir la colisión.

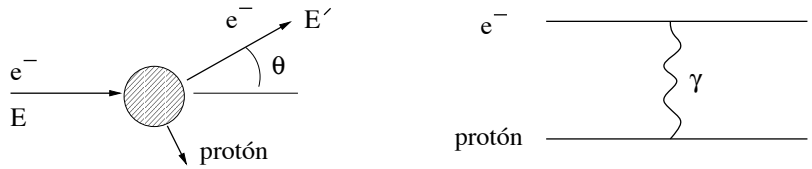
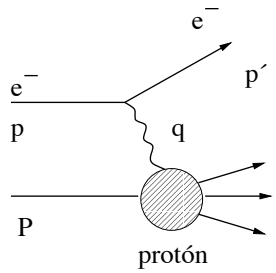


Figura 11.3: Difusión elástica de un electrón sobre un protón. Variables cinemáticas y diagrama de Feynman.

En efecto, se obtiene

$$\left(\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'}\right)_{inel} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left(2W_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} + W_2 \cos^2 \frac{\theta}{2}\right) \qquad (11.2)$$

siendo los dos factores de forma función de las variables cinemáticas θ y E'. Es conveniente expresar las variables cinemáticas de forma invariante Lorentz. Para ello se definen las variables Q^2 y ν a partir de los cuadrimomentos p y p' del electrón inicial y final, y del cuadrimomento P del protón inicial, tal como se indica en la figura 11.4.



$$Q^2 = -q^2 = -(p-p')^2 \approx 4\,E\,E'\,\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\nu = \frac{P \cdot q}{M} = \frac{P.(p-p')}{M} = E - E'$$

Figura 11.4: Difusión inelástica de un electrón sobre un protón. Definición de las variables cinemáticas.

En el sistema del laboratorio se tiene $P = (M, \vec{0})$, con lo cual $\nu = E - E'$. Por tanto, ν se interpreta en el referencial del laboratorio como la transferencia de energía. Puede comprobarse fácilmente que usando los siguientes factores de forma

$$W_1(Q^2, \nu) = \frac{Q^2}{4M^2}\delta\Big(\frac{Q^2}{2M} - \nu\Big) \qquad \text{y} \qquad W_2(Q^2, \nu) = \delta\Big(\frac{Q^2}{2M} - \nu\Big)$$

se recupera la expresión de la sección eficaz elástica tras integrar sobre la variable E'. La sección eficaz diferencial se puede escribir en forma invariante Lorentz utilizando las variables Q^2 y ν:

$$\Big(\frac{d^2\sigma}{dQ^2 d\nu}\Big)_{inel} = \frac{4\pi\alpha^2}{(Q^2)^2}\Big[\frac{2M^2Q^2}{s^2}W_1 + \Big(1 - \frac{2M\nu}{s} - \frac{M^2Q^2}{s^2}\Big)W_2\Big]$$

siendo s la energía en centro de masas de la colisión al cuadrado

$$s = (p + P)^2$$

En el referencial del laboratorio y para energías del electrón suficientemente grandes, $s \approx 2ME + M^2$.

La difusión de electrones sobre protones en la región profundamente inelástica ($E \gg M$) fue estudiada a partir de 1967 utilizando el recién construido acelerador lineal del laboratorio SLAC que permitía alcanzar una energía para los electrones de 20 GeV. El dispositivo experimental, básicamente un espectrómetro de tres brazos que permite medir el ángulo y la energía de los electrones difundidos, se muestra en la figura 11.5. Las medidas fueron inicialmente efectuadas con un blanco de hidrógeno, y posteriormente también con un blanco de deuterio para poder analizar igualmente la estructura interna de los neutrones. Los datos del experimento mostraron un comportamiento inesperado de las sección eficaz. En efecto, se esperaba un decrecimiento muy rápido de ésta con Q^2, pero los datos mostraron por el contrario un decrecimiento muy lento. Un segundo resultado inesperado fue que los factores de forma obedecían a una ley de invariancia de escala. Esto significa que no dependen de dos variables, sino de una única variable adimensional $\omega = 2M\nu/Q^2$. Para valores de ν y Q^2 suficientemente grandes se tiene (figura 11.6):

$$2MW_1(\nu, Q^2) \to F_1(\omega) \qquad \text{y} \qquad \nu W_2(\nu, Q^2) \to F_2(\omega)$$

Este comportamiento, deducido inicialmente por Bjorken utilizando un modelo hadrónico basado una técnica de cálculo conocida como 'álgebra de corrientes', resultó estar en perfecto acuerdo con los datos. Fue sin embargo Feynman el primero en proponer un modelo del protón capaz de describir de forma satisfactoria los resultados de la difusión inelástica. Es el llamado modelo de partones, según el cual la difusión inelástica sobre el protón se explica como una difusión elástica sobre entes constituyentes más pequeños: los partones. Estos partones no fueron identificados inmediatamente con los quarks propuestos por

Gell-Mann y Zweig. Un resultado importante para avanzar en esta identificación fue la verificación experimental de la llamada relación de Callan-Gross,

$$\omega F_2/(2F_1) \to 1$$

que se puede deducir suponiendo que los partones tienen espín 1/2. Esta relación implica que no son necesarios 2 factores de forma para describir la colisión, sino que basta uno solo, de la misma forma que basta una única variable ω.

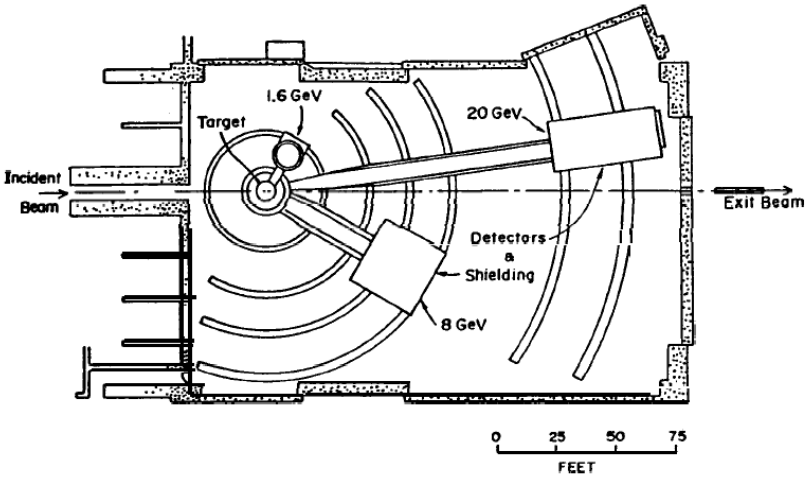


Figura 11.5: Dispositivo experimental utilizado en el llamado 'experimento de MIT-SLAC' para estudiar la difusión inelástica de electrones de 20 GeV sobre protones y neutrones. El haz de electrones se hace impactar sobre un blanco de hidrógeno o deuterio ($target$) y se mide el ángulo y la energía del electrón difundido gracias a los 3 brazos de un espectrómetro que cubren zonas angulares respecto a la dirección del haz de $1{,}5^\circ - 25^\circ$ (20 GeV), $12^\circ - 90^\circ$ (8 GeV) y $50^\circ - 150^\circ$ (1.6 GeV). La energía indicada es la máxima observable en cada brazo del espectrómetro. *Fuente*: R. E. Taylor, H. W. Kendall, J. I. Friedman, *Nobel Lectures* (1990).

Los resultados anteriores sobre invariancia de escala invitan a una redefinición de las variables cinemáticas. Se definen las siguientes variables, llamadas variables de escala o variables de Bjorken-Feynman:

$$\boxed{x = \frac{p \cdot p'}{P \cdot q} = \frac{Q^2}{2M\nu} \quad , \quad y = \frac{P \cdot q}{P \cdot p} = \frac{2M\nu}{s} \quad \text{de forma que} \quad Q^2 = sxy}$$

Obsérvese que $x = 1/\omega$, siendo ω la variable de escala introducida por Bjorken. Los factores de forma se redefinen igualmente en función de los resultados ob-

tenidos en el modelo de Bjorken. Despreciando un término residual en M^2, la sección eficaz inelástica adopta la expresión

$$\boxed{\left(\frac{d^2\sigma}{dxdy}\right)_{inel} \approx \frac{4\pi\alpha^2}{(Q^2)^2} s[xy^2F_1 + (1-y)F_2] \text{ donde } F_1 = MW_1 \text{ y } F_2 = \nu W_2}$$

Con esta notación, la invariancia de escala significa que F_1 y F_2 dependen únicamente de la variable x y la relación de Callan-Gross se expresa en la forma (véase la figura 11.7)

$$\boxed{F_2 = 2xF_1} \tag{11.3}$$

En el caso de difusión elástica, los factores de forma se escriben simplemente $F_1 = \frac{x}{2}\delta(1-x)$ y $F_2 = \delta(1-x)$.

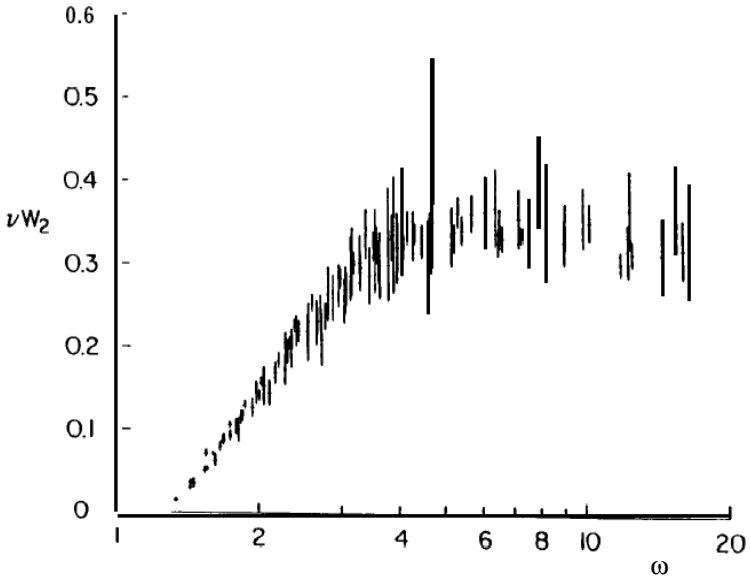


Figura 11.6: Función de estructura del protón W_2 multiplicada por la variable ν para diversos valores de ν y Q^2. Los datos experimentales caen sobre una curva que depende únicamente de la variable de escala ω. *Fuente*: R. E. Taylor, H. W. Kendall, J. I. Friedman, *Nobel Lectures* (1990).

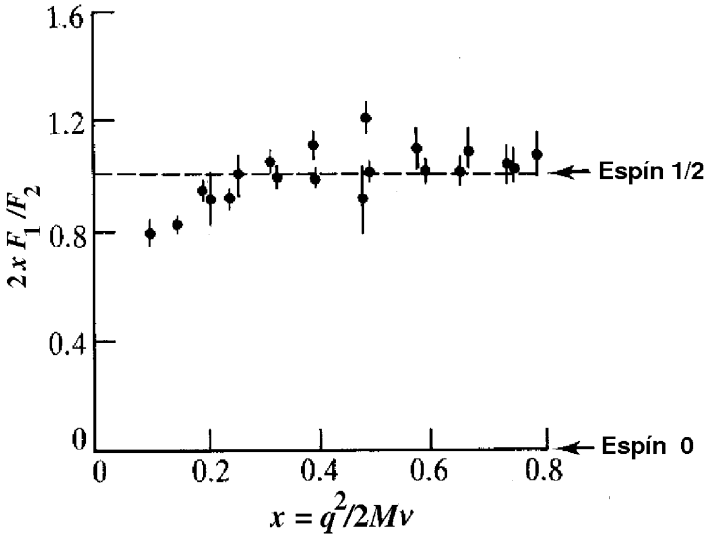


Figura 11.7: Verificación experimental de la relación de Callan-Gross. *Fuente*: experimento de MIT-SLAC.

11.2 El modelo de partones

El modelo de partones (Feynman, 1969) se basa en tres hipótesis fundamentales sobre la estructura interna del protón. Estas hipótesis se discuten a continuación. Se considera en primer lugar que el protón está constituido por entes más pequeños: los partones (figura 11.8).

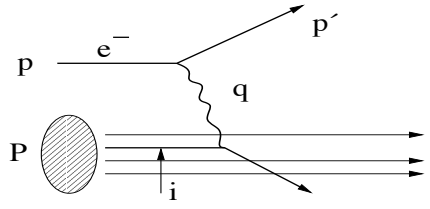


Figura 11.8: La difusión profundamente inelástica según el modelo de partones de Feynman. Los cuadrimomentos del electrón incidente y difundido se designan p y p'. El cuadrimomento del blanco es P.

Aunque se pueden elaborar modelos más generales, se supone en lo sigue que los partones son partículas puntuales de espín 1/2, carga eléctrica e_i (en unidades de $|e|$) y masa despreciable. Se supone además que están cuasi-libres dentro del protón. Esto significa que las fuerzas de ligadura son despreciables, al menos durante el tiempo característico que dura la interacción que es $1/Q$ (esta condición equivale a $Q^2 \gg M^2$). La difusión inelástica sobre el protón se describe entonces como el resultado de la difusión elástica sobre alguno de los partones. Para el partón i cuyo cuadrimomento es P_i se tiene

$$\frac{d^2\sigma_i}{dx_i dy_i} = \frac{4\pi\alpha^2}{(Q^2)^2} s_i [x_i y_i^2 F_1 + (1-y_i) F_2] \quad \text{donde} \quad x_i = \frac{p \cdot p'}{P_i \cdot q} \;,\; y_i = \frac{P_i \cdot q}{P_i \cdot p}$$

La variable s_i se refiere a la colisión entre el electrón y el partón i, es decir, $s_i = 2p \cdot P_i$. Como $q = p - p'$ se define a partir de las variables del electrón, es independiente del partón que interviene en la colisión. Se ha de verificar en todo caso $Q^2 = s_i x_i y_i$. Al ser la difusión elástica, los factores de forma de la colisión F_1 y F_2 se escriben

$$F_1 = e_i^2 \frac{x_i}{2} \delta(1-x_i) \qquad \text{y} \qquad F_2 = e_i^2 \delta(1-x_i)$$

La segunda hipótesis fundamental del modelo permite pasar de las variables x_i e y_i asociadas al partón i, que no son observables experimentales, a las variables x e y de la colisión inelástica, que si lo son. La ecuación que permite hacer esta transición es

$$P_i = zP$$

siendo z la fracción del momento total del protón transportada por el partón i (con lo cual $0 < z < 1$). En general, el movimiento de los partones dentro del protón puede ser complejo (figura 11.9).

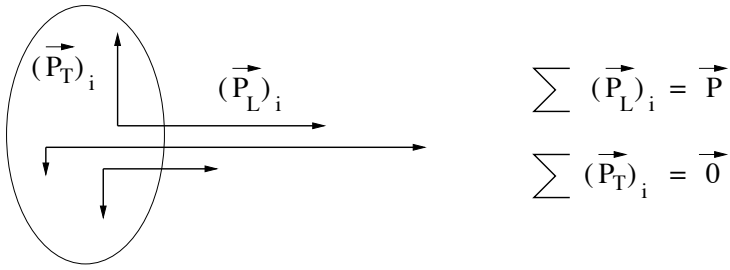


Figura 11.9: Momento de los partones dentro del protón.

La ecuación anterior equivale a despreciar todas las componentes transversas del movimiento de los partones, lo cual sólo puede ser estrictamente cierto en un referencial donde $|\vec{P}| \to \infty$, llamado referencial de momento infinito, cuya existencia se postula. En dicho referencial se tiene, por tanto,

$$x_i = x/z \qquad y_i = y \qquad s_i = zs$$

y se puede expresar la sección eficaz en función de los observables x e y

$$\frac{d^2\sigma_i}{dxdy} = \frac{4\pi\alpha^2}{(Q^2)^2} s \Big[\frac{x^2y^2}{z^2} \frac{e_i^2}{2} \delta(1-\frac{x}{z}) + (1-y) e_i^2 \delta(1-\frac{x}{z}) \Big]$$

La tercera hipótesis fundamental del modelo permite pasar de la sección eficaz σ_i sobre el partón i a la sección eficaz σ sobre el protón. Para ello se supone que existen unas funciones $f_i(z)$, llamadas funciones de estructura del protón, que permiten obtener la probabilidad de encontrar dentro del protón un partón i con una fracción z del momento total. La sección eficaz σ es entonces la suma incoherente sobre todas las colisiones posibles del electrón con un partón

$$\boxed{\sigma = \sum_i \int_0^1 f_i(z)\, \sigma_i(z)\, dz \qquad \text{donde} \qquad \int_0^1 f_i(z)\, dz = 1} \tag{11.4}$$

La normalización de las funciones f_i es consecuencia de la interpretación probabilística de las mismas. Tras integrar la sección eficaz doblemente diferencial sobre la variable z, aplicando la regla $\delta(1-x/z) = x\delta(z-x)$, resulta la expresión

$$\frac{d^2\sigma}{dxdy} = \frac{4\pi\alpha^2}{(Q^2)^2} s \sum_i f_i(x) \Big[xy^2 \frac{e_i^2}{2} + (1-y) x e_i^2 \Big]$$

que permite deducir los siguientes factores de forma para el protón

$$\boxed{F_1 = \sum_i f_i(x) \frac{e_i^2}{2} \qquad \text{y} \qquad F_2 = x \sum_i f_i(x) e_i^2} \tag{11.5}$$

Estos factores de forma son, por tanto, únicamente función de la variable x y verifican $F_2 = 2xF_1$. El modelo de partones explica, por tanto, la invariancia de escala y la relación de Callan-Gross. La expresión de los factores de forma es invariante Lorentz, puesto que sólo depende de x, aunque la interpretación probabilística de las funciones de estructura sólo es estrictamente válida en el referencial de momento infinito. Además de la condición de normalización, las funciones de estructura del protón han de satisfacer otra importante relación conocida como regla de suma del momento. En efecto, sumando todas las fracciones $z\vec{P}$ del momento del protón se ha de poder reconstruir el momento total, luego

$$\sum_i \int_0^1 f_i(z) z\vec{P}\, dz = \vec{P} \qquad \text{es decir} \qquad \boxed{\sum_i \int_0^1 z f_i(z)\, dz = 1}$$

Es interesante resaltar que los factores de forma F_1 y F_2 se han podido calcular suponiendo únicamente que los partones son partículas cargadas de

espín 1/2, sin otra hipótesis sobre su número o la carga exacta de los mismos. Sin embargo, para poder determinar las funciones de estructura del protón f_i, es necesario construir un modelo del interior del protón. El modelo más sencillo es el modelo de quarks constituyentes de Gell-Mann y Zweig (figura 11.10a) según el cual el protón está formado por dos quarks de tipo u y un quark de tipo d. Identificando los partones con estos tres quarks, se tendrían tres funciones de estructura $u_1(z)$, $u_2(z)$ y $d(z)$. Dado que los dos quarks de tipo u son indistinguibles, es conveniente definir $u(z) = u_1(z) + u_2(z)$ reduciendo a dos las funciones de estructura. Estas habrían de verificar las condiciones de normalización, así como la regla de suma del momento,

$$\int_0^1 u(z)\,dz = N_u = 2 \quad , \quad \int_0^1 d(z)\,dz = N_d = 1 \quad \text{y} \quad \int_0^1 z(u+d)\,dz = 1$$

más adelante se explicarán las técnicas utilizadas para extraer las funciones de estructura a partir de los datos experimentales. Se observa que las funciones de estructura obtenidas a partir de los datos no verifican en absoluto las relaciones anteriores. Estas funciones se hacen divergentes para $z \to 0$ y consecuentemente $N_u \to \infty$, $N_d \to \infty$. Por otra parte, el momento transportado por u y d no llega a 30 % del momento total del protón. Esto ocurre porque el modelo de tres quarks constituyentes es en realidad un modelo demasiado simple de la estructura interna del protón cuando se investiga a escalas de energía suficientemente grandes (o equivalentemente a distancias suficientemente pequeñas), como es el caso en la difusión profundamente inelástica. El hecho de que los factores de normalización N_u y N_d tiendan a infinito es una pista sobre la existencia de un mar de quarks dentro del protón. Este mar tiene su origen en la aparición de pares virtuales $q\bar{q}$, siendo q cualquier tipo de quark, en número tanto mayor cuanto menor es la fracción z del momento transportado (figura 11.10b). Según este modelo se necesitan tantas funciones de estructura $q(z)$ como quarks y antiquarks puedan existir dentro del protón. Por otra parte, estos quarks del mar aparecen en pares, luego han de verificarse las siguientes ecuaciones

$$\boxed{\int_0^1 (q - \bar{q})\,dz = N_q - N_{\bar{q}} \begin{cases} = 2 \text{ (para } q = u) \\ = 1 \text{ (para } q = d) \\ = 0 \text{ (para } q \neq u, d) \end{cases}} \qquad (11.6)$$

llamadas ecuaciones constituyentes del protón, que esta vez si están de acuerdo con los datos experimentales. Las funciones $q_v(z) = q - \bar{q}$ para $q = u$ y $q = d$ se suelen llamar funciones de estructura de los 'quarks de valencia'. Subsiste sin embargo una última dificultad para explicar la regla de suma del momento. En efecto, sumando las contribuciones de los quarks constituyentes y de los del mar, tan sólo se llega al 50 % del momento total del protón. La solución de este problema la aporta QCD, que predice dentro del protón la existencia de partículas neutras, insensibles a la difusión inelástica con proyectiles como electrones o neutrinos, que son los gluones, responsables de la interacción entre quarks (figura 11.10c).

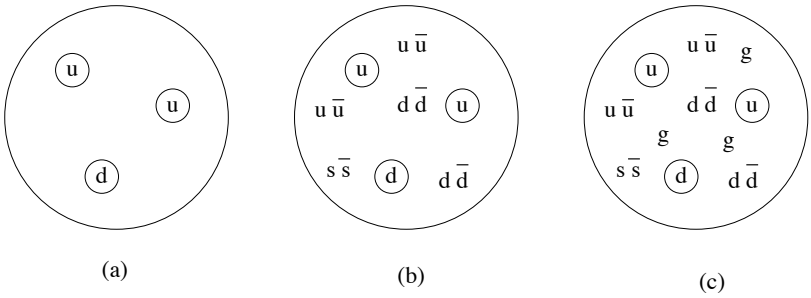


Figura 11.10: Diversos modelos del interior de un protón: (a) modelo de quarks constituyentes de Gell-Mann y Zweig, (b) modelo de partones con quarks constituyentes y quarks del mar, (c) modelo inspirado en QCD que incorpora gluones.

Una vez incorporados los gluones, se obtiene efectivamente saturación en la regla de suma del momento

$$\boxed{\int_0^1 z(u+d+s+\ldots+\bar{u}+\bar{d}+\bar{s}+\ldots+g)\,dz = 1} \qquad (11.7)$$

La difusión inelástica con electrones es sensible al espín de los partones. En efecto, si el espín de estos fuese nulo, se obtendría $F_1 = 0$, en contradicción con los datos experimentales. Es igualmente sensible a la carga de los partones, aunque es conveniente en este caso analizar los datos experimentales conjuntamente con los obtenidos utilizando un neutrino como proyectil. Finalmente, es insensible al color de los quarks, ya que el color se cancela al promediar sobre estados iniciales y sumar sobre estados finales.

11.2.1 Producción hadrónica en las colisiones e^+e^-

Considérese la creación en una aniquilación e^+e^- de un par $f\bar{f}$, siendo f un fermión de espín 1/2 y carga eléctrica $|e|$ en valor absoluto, en el límite $m_e \to 0$. La sección eficaz, suponiendo el fermión puntual, se obtiene calculando el diagrama de Feynman de la figura 11.11. En el sistema del centro de masas la expresión de la sección eficaz total es

$$\boxed{\sigma_f(s) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}\beta_f\left(\frac{3-\beta_f^2}{2}\right) \qquad \text{siendo} \qquad \beta_f = \sqrt{1-4m_f^2/s}} \qquad (11.8)$$

y s la energía en centro de masas al cuadrado. En el límite $m_f \to 0$, equivalente a $\beta_f \to 1$, se obtiene la llamada sección eficaz puntual que ya se introdujo en el capítulo anterior. Su valor es $\sigma_{pt} = 4\pi\alpha^2/(3s)$.

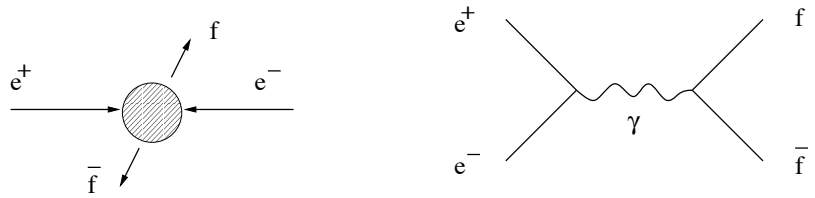


Figura 11.11: Creación de un par $f\bar{f}$ en una colisión e^+e^- junto con el diagrama de Feynman asociado.

Resulta interesante comparar este comportamiento de σ_f, cerca del umbral de la colisión, con el resultado obtenido para partículas de espín nulo. En el caso de espín nulo la sección eficaz es $\sigma_f(s) = \beta^3\sigma_{pt}/4$, cuyo crecimiento es menos abrupto cerca del umbral, como puede apreciarse en la figura 11.12.

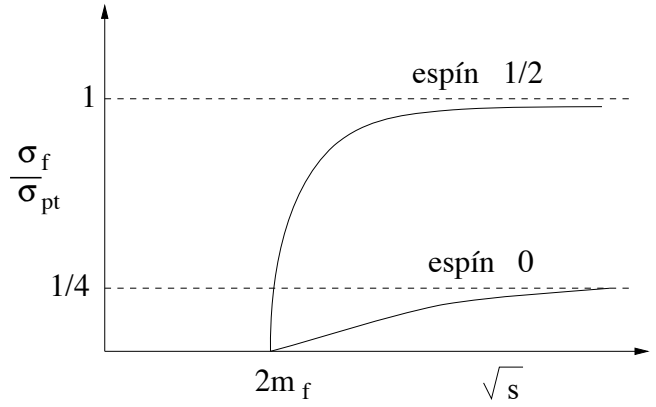


Figura 11.12: Sección eficaz de producción de pares $f\bar{f}$, cerca del umbral de producción, para valores del espín de f iguales a 0 y 1/2.

Se considera a continuación la producción hadrónica en colisiones e^+e^-. Tras integrar sobre todos los estados hadrónicos finales se obtiene una sección eficaz que sólo puede depender del invariante s y que es costumbre escribir en la forma

$$\boxed{\sigma_{had}(s) = R_{had}(s)\sigma_{pt}} \tag{11.9}$$

donde $R_{had}(s)$ juega aquí el mismo papel que los factores de forma F_1 y F_2 en

la difusión profundamente inelástica. Los datos experimentales de nuevo exhiben invariancia de escala, que en este caso se manifiesta en el hecho de que R_{had} es una constante independiente de s, aunque con la presencia notable de escalones y resonancias, algunas sorprendentemente estrechas. La figura 11.13, que incluye datos acumulados a lo largo de casi tres décadas, ilustra estas notables propiedades de R_{had}.

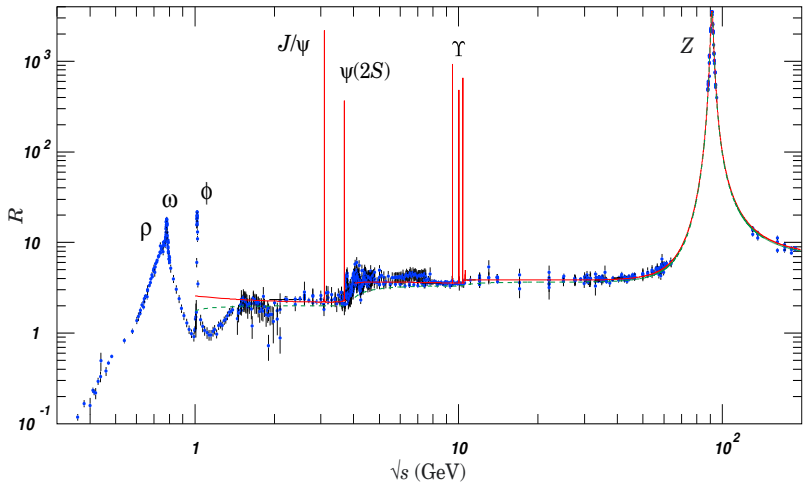


Figura 11.13: Medidas experimentales de R_{had} en función de la energía en centro de masas. *Fuente*: PDG2002, *Phys. Rev.*, **D66** (2002) 010001.

Las principales resonancias hadrónicas que se observan aparecen en la tabla 11.1. Todas ellas son mesones vectoriales con los mismos números cuánticos que el fotón, es decir, $J^{PC} = 1^{--}$. Cada resonancia principal se acompaña de otras secundarias y anuncia la presencia de un escalón en R_{had}. La resonancia debida al bosón Z, de distinta naturaleza, ya fue estudiada en detalle en el capítulo anterior.

TABLA 11.1: Resonancias hadrónicas producidas en colisiones e+e-.

V	M_V (MeV)	Γ_V (MeV)	$BR(V \to e^+e^-)$
ρ	770	151	$4{,}5\,10^{-5}$
ϕ	1019	4,4	$3{,}0\,10^{-4}$
J/ψ	3097	0,087	$5{,}9\,10^{-2}$
$\Upsilon(1S)$	9460	0,052	$2{,}4\,10^{-2}$

La anchura del mesón ρ es la correspondiente a una resonancia hadrónica, pero

a medida que aumenta la masa de la resonancia, la anchura disminuye, hasta el punto que para J/ψ y $\Upsilon(1S)$, el modo de desintegración electromagnético $V \to e^+e^-$ se hace competitivo con los modos hadrónicos. Existe una tercera característica notable de la producción hadrónica en colisiones e^+e^-. El número de hadrones producidos (multiplicidad) aumenta con la energía y éstos tienden a agruparse espacialmente en chorros de partículas, comúnmente designados como *jets*, tal como muestra el suceso de la figura 11.14. Los *jets* fueron observados por primera vez en los experimentos llevados a cabo en el anillo de colisiones PETRA del laboratorio DESY (Hamburgo) ya que para su formación se necesita una energía en centro de masas de al menos unos 20 GeV.

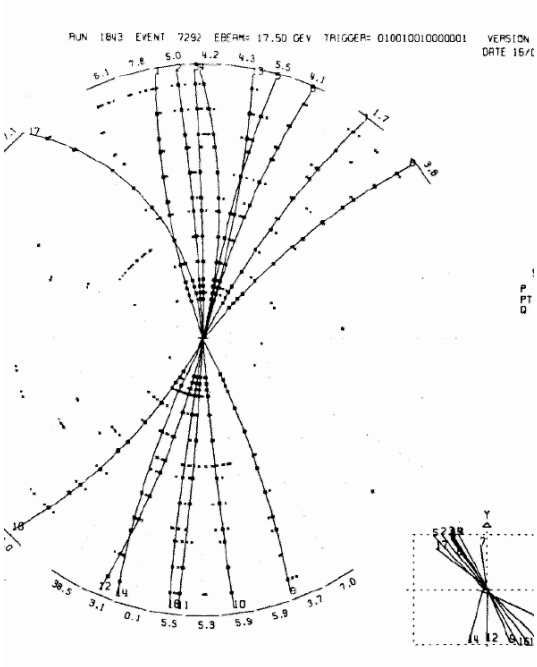


Figura 11.14: Suceso con dos *jets* obtenido en colisiones e^+e^- a una energía en centro de masas de $\sqrt{s} = 35$ GeV. La figura muestra una reconstrucción de las trazas producidas por partículas cargadas en el plano transverso a la dirección de los haces. *Fuente*: experimento TASSO.

El modelo de quark-partones es capaz de explicar todas las características de la producción hadrónica que se acaban de describir. Además, todas las propiedades de los quarks se ponen de manifiesto, contrariamente al caso de la difusión inelástica donde la identificación de los partones con los quarks no resulta inmediata. Si se supone que el proceso subyacente en la producción hadrónica es

la creación de pares $q\bar{q}$, donde q es un quark, es decir, un fermión de espín 1/2, carga e_q en unidades de $|e|$ y N_c estados de color, se deduce inmediatamente

$$\boxed{R_{had}(s) = \frac{\sigma_{had}}{\sigma_{pt}} \approx N_c \sum_q e_q^2 \qquad (\text{siendo} \quad 2m_q < \sqrt{s})} \tag{11.10}$$

Por tanto, R_{had} es efectivamente constante, aunque la presencia de un número variable de quarks en la suma explica la presencia de los escalones. El valor de R_{had} según este modelo se presenta en la tabla 11.2, donde para calcular los rangos de energía se han utilizado los valores $2m_\pi$, $2m_K$, $2m_D$ y $2m_B$, ya que el valor de $2m_q$ garantiza la presencia de una resonancia, pero no la de hadrones formados con el quark correspondiente.

TABLA 11.2: Valor de R_{had} en función de la energía en el centro de masas $\sqrt{s}$.

$\sqrt{s}$ (GeV)	quarks	R_{had}
$0{,}3 - 1{,}0$	u, d	$5/3 = 1{,}7$
$1{,}0 - 3{,}7$	u, d, s	$6/3 = 2{,}0$
$3{,}7 - 10{,}5$	u, d, s, c	$10/3 = 3{,}3$
$10{,}5 - 350$	u, d, s, c, b	$11/3 = 3{,}7$

Los valores de R_{had} así calculados están en buen acuerdo con los datos (sólo ligeramente por debajo) a partir de $\sqrt{s} \approx 2$ GeV. Por debajo de esta escala de energías predomina la formación de resonancias y el modelo no es aplicable. Los resultados anteriores constituyen una de las pruebas experimentales más firmes del color de los quarks.

El hecho de que el umbral de producción de un estado ligado $q\bar{q}$ (resonancia) no coincida con el umbral de producción de los mesones asociados (escalón) resulta ser la clave para entender por qué las resonancias pueden llegar a ser tan estrechas. En efecto, el mesón ρ se desintegra por vía hadrónica en la forma $\rho \to \pi^+\pi^-$, pero resultan imposibles las desintegraciones $J/\psi \to D^+D^-$ o bien $\Upsilon(1S) \to B^+B^-$, ya que en ambos casos las partículas finales superan la masa de la partícula inicial. En el caso del mesón ϕ, se supera sólo muy ligeramente la masa de K^+K^-. Al no existir el modo hadrónico natural, la desintegración de J/ψ o $\Upsilon(1S)$ se produce en modos de anchura mucho más reducida, principalmente en tres gluones, ya que las leyes de conservación permiten descartar los modos en uno o dos gluones. En todo caso la presencia de una resonancia hadrónica tan estrecha como el mesón J/ψ es imposible de explicar sin postular la existencia de un nuevo quark. Por este motivo, el descubrimiento del J/ψ resultó ser decisivo en la aceptación del modelo quark.

El proceso de formación de *jets*, a diferencia del proceso de creación del par $q\bar{q}$, ocurre a una escala de energía muy inferior al de la colisión y, por tanto,

sólo es explicable mediante modelos no perturbativos, llamados genéricamente modelos de fragmentación. Al alejarse el quark q del antiquark $\bar{q}$ entran en juego las fuerzas de color, responsables del confinamiento de los quarks, y el resultado es la aparición de nuevos pares virtuales $q_i\bar{q}_i$ tal como muestra la figura 11.15. Al final, todos los quarks producidos se recombinan formando los *jets*. A partir de estas ideas básicas, avanzadas por el propio Feynman, se han desarrollado numerosos modelos. Uno de los más utilizados en la actualidad es el llamado 'modelo de Lund', donde el proceso se describe como la fragmentación de una cuerda elástica. En todos estos modelos se considera que, al producirse el fenómeno de fragmentación a una escala de energía muy inferior a la del proceso de colisión (y, por tanto, en un tiempo muy posterior), la sección eficaz no se ve afectada y es legítimo calcularla mediante el modelo de partones. Por otra parte, el proceso de fragmentación no borra completamente sus orígenes. En efecto, numerosas propiedades de los *jets* formados son atribuibles a los quarks que los originaron. De esta forma, estudiando por ejemplo la dirección de los *jets*, se puede conseguir soporte experimental adicional al modelo quark.

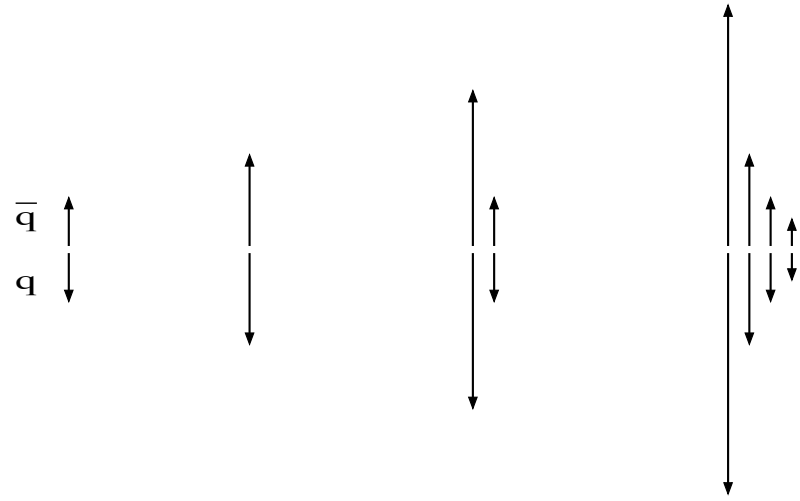


Figura 11.15: Proceso de fragmentación de un par $q\bar{q}$.

11.2.2 Pares de Drell-Yan

Las ideas del modelo de partones resultan básicas para explicar las colisiones hadrónicas a alta energía, aunque su verificación experimental resulta problemática a baja energía. En efecto, las colisiones hadrónicas están dominadas por múltiples procesos de colisión llamados 'suaves' donde intervienen todas las componentes del protón. El resultado es una gran multiplicidad de partículas en el estado final. Estos procesos 'suaves' pueden llegar a enmascarar los

procesos partónicos, también llamados 'duros'. El primer proceso duro identificado en colisiones hadrónicas ha sido la creación de pares de leptones, también llamados pares de Drell-Yan.

La figura 11.16 muestra la explicación de este proceso siguiendo las ideas del modelo de partones.

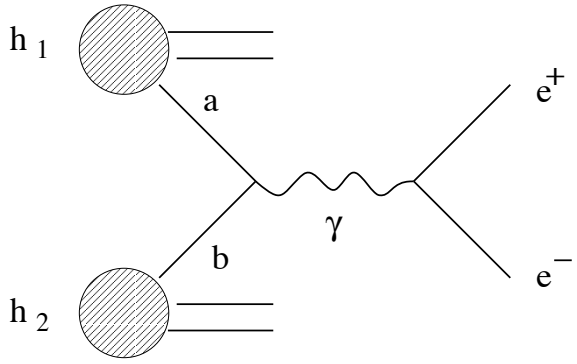


Figura 11.16: Proceso de creación de un par e^+e^- en una colisión hadrónica según el modelo de partones.

Con objeto de poder calcular la sección eficaz de este proceso, es necesario distinguir entre la colisión hadrónica de h_1 y h_2, y la colisión partónica de a y b. Estos procesos ocurren a distintas escalas de energía. Si p_{h_1} y p_{h_2} son los cuadrimomentos de los hadrones que colisionan, el invariante s de la colisión hadrónica se escribe para energías suficientemente grandes $s = (p_{h_1} + p_{h_2})^2 \approx 2p_{h_1} \cdot p_{h_2}$. Llamando x_a y x_b las fracciones respectivas del momento de los partones a y b dentro de los hadrones h_1 y h_2, resulta el siguiente invariante para la colisión partónica

$$\hat{s} = (p_a + p_b)^2 = (x_a p_{h_1} + x_b p_{h_2})^2 \approx 2\, x_a x_b\, p_{h_1} \cdot p_{h_2}$$

Se obtiene así la siguiente relación básica entre las dos escalas de energía

$$\boxed{\hat{s} = x_a x_b s} \tag{11.11}$$

Dado que tanto x_a como x_b son inferiores a 1, el proceso partónico ocurre a una escala de energías normalmente muy inferior a la del proceso hadrónico. La sección eficaz σ del proceso hadrónico se puede escribir en función de la sección eficaz $\hat{\sigma}$ del proceso partónico en la forma

$$\boxed{\sigma(s) = \int\int dx_a dx_b \, f_a^{h_1}(x_a) f_b^{h_2}(x_b) \, \hat{\sigma}_{ab}(\hat{s})} \qquad (11.12)$$

donde $f_a^{h_1}(x_a)$ y $f_b^{h_2}(x_b)$ son las probabilidades de encontrar los partones a y b con fracciones respectivas del momento x_a y x_b, dentro de los hadrones h_1 y h_2. Con objeto de separar lo más posible el proceso duro de la parte que depende de la estructura de los hadrones, es conveniente efectuar el siguiente cambio de variables

$$\boxed{x_{a,b} = \sqrt{\tau} e^{\pm y} \quad \text{que implica} \quad \tau = \hat{s}/s = x_a x_b \quad y = \frac{1}{2}\text{Log}\frac{x_a}{x_b}} \qquad (11.13)$$

Los límites de integración de las nuevas variables son

$$0 < \tau < 1 \qquad y_{min} < y < y_{max} \quad \text{siendo} \quad y_{min}^{max} = \pm\text{Log}\frac{1}{\sqrt{\tau}}$$

Dado que el jacobiano de la transformación es igual a 1, se puede escribir la sección eficaz en la forma

$$\boxed{\sigma(s) = \int\int d\tau dy \, f_a^{h_1}(x_a) f_b^{h_2}(x_b) \, \hat{\sigma}_{ab}(\tau s) = \int_0^1 d\tau \hat{\sigma}_{ab}(\tau s) \mathcal{L}_{ab}(\tau)}$$

donde la función $\mathcal{L}_{ab}(\tau)$ depende únicamente de los hadrones que colisionan, pero no del proceso duro que ocurre en la colisión. Esta función se suele llamar 'función luminosidad' y se puede expresar matemáticamente en forma de una convolución de dos funciones de estructura:

$$\boxed{\mathcal{L}_{ab}(\tau) = \int_{y_{min}}^{y_{max}} dy \, f_a^{h_1}(x_a) f_b^{h_2}(x_b) = \frac{1}{\tau}\int_\tau^1 \frac{dx}{x} F_a^{h_1}(x) F_b^{h_2}(\frac{\tau}{x})} \qquad (11.14)$$

donde $F(x) = xf(x)$. la introducción de las funciones F es conveniente ya que son éstas las que aparecen en las bases de datos de funciones de estructura. En la expresión de la sección eficaz ha de entenderse que existe una suma sobre todos los pares de partones ab que pueden intervenir en el proceso duro considerado. En el proceso de Drell-Yan, los pares ab a considerar son todos los pares quark-antiquark. La sección eficaz del proceso duro, despreciando todas las masas, es

$$\hat{\sigma}_{q\bar{q}}(s) = \frac{1}{N_c}\frac{4\pi\alpha^2}{3s}e_q^2$$

siendo N_c el número de colores, es decir, $N_c = 3$. Esta sección eficaz es idéntica a la del proceso inverso $e^+e^- \to q\bar{q}$, salvo en el factor $1/N_c$ que resulta de promediar sobre el color de los estados iniciales y sumar sobre el color de

los estados finales. Dado que $\hat{s} = m^2$, donde m es la masa invariante del par de leptones producido, se obtiene la siguiente expresión para la sección eficaz diferencial en la masa invariante

$$\boxed{\left(\frac{d\sigma}{dm}\right)_{DY} = \frac{8\pi\alpha^2}{9ms}\sum_q e_q^2 \mathcal{L}_{q\bar{q}}(m^2/s)} \tag{11.15}$$

La figura 11.17 muestra la distribución de masa invariante obtenida en uno de los primeros experimentos realizados para estudiar los pares de Drell-Yan. Se trata de un experimento de blanco fijo donde se hacen colisionar protones de 400 GeV sobre un blanco metálico y se mide la masa invariante de los dimuones producidos.

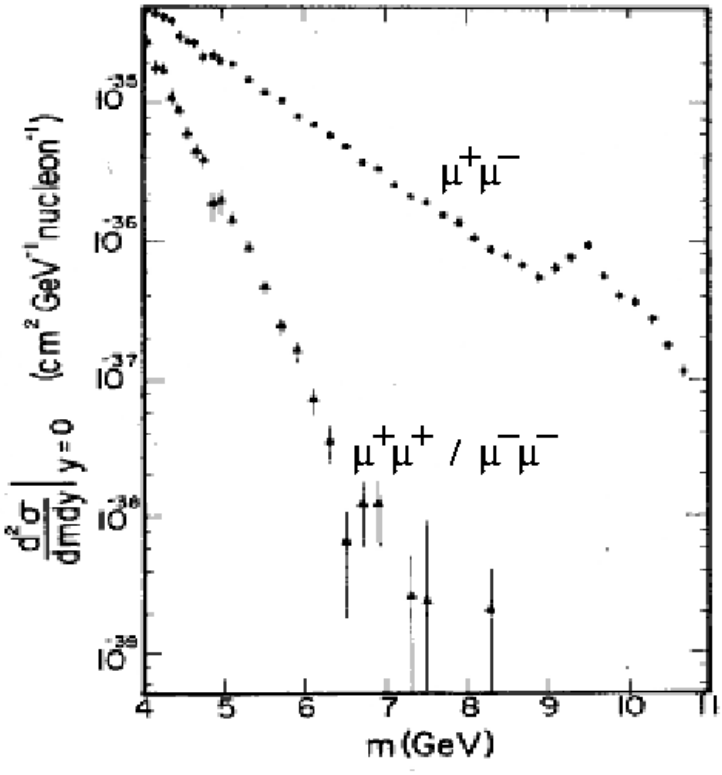


Figura 11.17: Distribución de masa invariante de los dimuones producidos en colisiones de protones de 400 GeV contra un blanco fijo. Puede observarse claramente el pico de las resonancias Υ. *Fuente*: *Phys. Rev.*, **D23** (1981) 604.

Los datos experimentales han de compararse con la expresión teórica

$$\Big(\frac{d^2\sigma}{dmdy}\Big)_{y=0} = \frac{8\pi\alpha^2}{9m^3}\sum_q e_q^2[F_q^p(\sqrt{\tau})F_{\bar{q}}^N(\sqrt{\tau}) + F_{\bar{q}}^p(\sqrt{\tau})F_q^N(\sqrt{\tau})]$$

donde $\tau = m^2/s$ y N designa cualquier nucleón en el interior del blanco. Este cálculo teórico es capaz de reproducir aproximadamente la forma de la distribución de masa invariante, aunque la discrepancia en el número de sucesos puede ser importante. Esto se debe a que la energía en centro de masas ($\sqrt{s} \approx 40$ GeV) no es demasiado grande y las correcciones de QCD son importantes. La invariancia de escala significa en este proceso que la distribución $s(d^2\sigma/d\sqrt{\tau}dy)$ depende únicamente de la variable τ, lo cual se verifica en efecto experimentalmente.

11.2.3 Factores de forma y reglas de suma

La sección eficaz de difusión de un leptón ℓ (e o μ) sobre un nucleón es

$$\Big(\frac{d^2\sigma}{dxdy}\Big)_\ell = \frac{4\pi\alpha^2}{(Q^2)^2}s[xy^2F_1 + (1-y)F_2]$$

donde según el modelo de partones, los factores de forma F_1 y F_2 están relacionados y, por tanto, basta considerar uno sólo de ellos, que normalmente es F_2. La expresión de F_2 para la difusión sobre protones es la siguiente:

$$F_2^{\ell p} = x\sum_i f_i^p(x)e_i^2 = x\Big[\frac{4}{9}(u+\bar{u}) + \frac{1}{9}(d+\bar{d}) + \frac{1}{9}(s+\bar{s}) + \ldots\Big]$$

donde $u, d, s, \ldots$ son las funciones de estructura del protón. El factor de forma correspondiente para la difusión sobre neutrones puede obtenerse fácilmente utilizando la invariancia de isospín, que permite transformar un protón en un neutrón intercambiando los quarks u y d. Esto significa en particular

$$\boxed{u(x) = f_u^p(x) = f_d^n(x) \qquad \text{y} \qquad d(x) = f_d^p(x) = f_u^n(x)} \tag{11.16}$$

y se obtiene, por tanto, la siguiente expresión para $F_2^{\ell n}$:

$$F_2^{\ell n} = x\sum_i f_i^n(x)e_i^2 = x\Big[\frac{1}{9}(u+\bar{u}) + \frac{4}{9}(d+\bar{d}) + \frac{1}{9}(s+\bar{s}) + \ldots\Big]$$

Para un blanco N isonuclear se llega a la siguiente expresión tras promediar los resultados obtenidos para $F_2^{\ell p}$ y $F_2^{\ell n}$:

$$\boxed{F_2^{\ell N} = x\Big[\frac{5}{18}(u+d+\bar{u}+\bar{d}) + \frac{1}{9}(s+\bar{s}) + \frac{4}{9}(c+\bar{c}) + \ldots\Big]} \tag{11.17}$$

A partir de las relaciones anteriores es posible efectuar interesantes tests del modelo, donde la carga de los quarks juega un papel relevante. El primer test consiste en analizar el cociente de las secciones eficaces σ_{en}/σ_{ep}, o equivalentemente de los factores de forma, en el límite $x \to 1$. Según el modelo de partones, y teniendo en cuenta que los quarks del mar no contribuyen en el límite considerado, se obtiene

$$\frac{F_2^{en}}{F_2^{ep}} \approx \frac{u+4d}{4u+d} \approx \frac{1}{4} = \left(\frac{e_d}{e_u}\right)^2$$

donde se ha utilizado la siguiente propiedad de las funciones de estructura del protón: $d/u \to 0$ para $x \to 1$. El resultado obtenido está en perfecto acuerdo con los datos, como puede apreciarse en la figura 11.18.

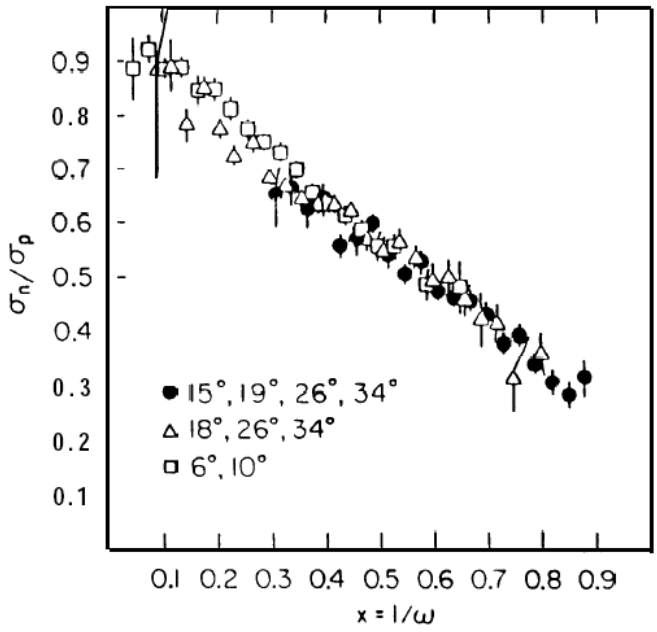


Figura 11.18: Cociente de secciones eficaces σ_{en}/σ_{ep}, en función de x, según medidas efectuadas por el experimento de MIT-SLAC. *Fuente*: R. E. Taylor, H. W. Kendall, J. I. Friedman, *Nobel Lectures* (1990).

El segundo test consiste en analizar la diferencia entre los factores de forma,

$$F_2^{ep} - F_2^{en} = \frac{x}{3}[(u-\bar{d}) - (d-\bar{u})] \approx \frac{x}{3}[(u-\bar{u}) - (d-\bar{d})]$$

donde se ha supuesto invariancia de isopín en el mar de quarks, es decir, $\bar{u} \approx \bar{d}$. Integrando esta ecuación y aplicando las ecuaciones constituyentes del protón, se obtiene la siguiente relación, llamada regla de suma de Gottfried

$$\boxed{S_G = \int_0^1 \frac{dx}{x}(F_2^{ep} - F_2^{en}) = \frac{1}{3} = e_u^2 - e_d^2} \qquad (11.18)$$

Según el experimento de difusión de muones sobre nucleones NMC, se obtiene el resultado $S_G = 0{,}24 \pm 0{,}04$ que difiere ligeramente de la predicción teórica. Para obtener mejor acuerdo habría que revisar la hipótesis $\bar{u} \approx \bar{d}$.

La información que puede extraerse a partir de la difusión de leptones cargados sobre nucleones es, sin embargo, limitada ya que sólo hay 2 factores de forma y, al menos, 6 funciones de estructura relevantes (sin contar los quarks pesados). Desde este punto de vista, la difusión de neutrinos y antineutrinos sobre nucleones aporta una mayor cantidad de información. La sección eficaz de difusión de un neutrino o antineutrino sobre un nucleón se escribe

$$\boxed{\left(\frac{d^2\sigma}{dxdy}\right)_{\nu(\bar{\nu})} = \frac{G_F^2 s}{2\pi}\left[xy^2 F_1 + (1-y)F_2 \pm xy(1-\frac{y}{2})F_3\right]} \qquad (11.19)$$

donde los signos $\pm$ corresponden a ν y $\bar{\nu}$, respectivamente. Esta sección eficaz depende de 3 factores de forma debido a la presencia de la corriente axial en las interacciones de neutrinos. Según el modelo de partones, los factores de forma adoptan las siguientes expresiones

$$F_1 = \sum_i f_i(x) \quad , \quad F_2 = \sum_i 2x f_i(x) \quad \text{y} \quad F_3 = \sum_i \pm 2 f_i(x)$$

donde las sumas han de hacerse únicamente sobre aquellos partones que pueden intervenir en la colisión. Si el proyectil es un neutrino, sólo pueden intervenir en una interacción de tipo corriente cargada los partones con carga negativa $(d, \bar{u}, ...)$, mientras que si el proyectil es un antineutrino, sólo pueden intervenir partones con carga positiva $(u, \bar{d}, ...)$. En cuanto a la definición de F_3, el signo $\pm$ corresponde a q y $\bar{q}$, respectivamente. En las expresiones anteriores de los factores de forma se verifica de nuevo la invariancia de escala y la relación de Callan-Gross, $2xF_1 = F_2$, que reduce en la práctica el número de factores de forma relevantes a sólo dos, F_2 y F_3. Los valores explícitos se detallan en la tabla 11.3.

TABLA 11.3: Factores de forma F_2 y xF_3 de las difusiones νN y $\bar{\nu} N$.

proceso	F_2	xF_3
νp	$2x(d + s + \bar{u} + \bar{c})$	$2x(d + s - \bar{u} - \bar{c})$
νn	$2x(u + s + \bar{d} + \bar{c})$	$2x(u + s - \bar{d} - \bar{c})$
$\bar{\nu} p$	$2x(u + c + \bar{d} + \bar{s})$	$2x(u + c - \bar{d} - \bar{s})$
$\bar{\nu} n$	$2x(d + c + \bar{u} + \bar{s})$	$2x(d + c - \bar{u} - \bar{s})$

Existen, por tanto, 8 factores de forma distintos, que permiten en principio extraer todas las funciones de estructura del protón. De esta forma, se llega a funciones como las llamadas EHLQ, que se incluyen en el apéndice E. En realidad, según se discutirá más adelante, QCD introduce violaciones en la invariancia de escala y, por tanto, el rango de validez de funciones como las EHQL es muy limitado. Al igual que para la difusión de leptones cargados, pueden definirse factores de forma sobre blancos isonucleares. Estos se obtienen promediando sobre protones y neutrones con el resultado siguiente

$$\boxed{F_2^{\nu N} = F_2^{\bar{\nu} N} = x(u + d + s + c + \bar{u} + \bar{d} + \bar{s} + \bar{c} + ...)} \tag{11.20}$$

donde se ha utilizado $s = \bar{s}$ y $c = \bar{c}$. Comparando esta expresión con el resultado obtenido en la difusión de leptones cargados se llega a una importante relación entre factores de forma

$$\boxed{F_2^{\ell N}/F_2^{\nu N} \approx \frac{5}{18} = \frac{1}{2}(e_u^2 + e_d^2)} \tag{11.21}$$

con tal de despreciar la contribución de los quarks mas pesados. Este resultado, perfectamente verificado en los datos experimentales (véase figura 11.19), constituye un test decisivo del modelo de quark-partones. Se verifica igualmente, despreciando los quarks pesados:

$$F_2^{\nu N} - xF_3^{\nu N} \approx 2x(\bar{u} + \bar{d})$$

Esta relación permite aislar los quarks del mar, que contribuyen esencialmente a bajo x, tal como puede comprobarse igualmente en la figura 11.19.

A partir de las funciones de estructura medidas con neutrinos, se pueden obtener interesantes reglas de suma. En primer lugar se tiene

$$\boxed{S_q = \int_0^1 dx\, F_2^{\nu N} = \sum_q \int_0^1 dx\, x(q + \bar{q})} \tag{11.22}$$

cuyo valor experimental aproximado, $S_q \approx 0{,}5$, se ha comentado anteriormente en relación con la regla de suma del momento. Se verifica igualmente la llamada regla de suma de Adler

$$\boxed{S_A = \int_0^1 \frac{dx}{x}(F_2^{\nu n} - F_2^{\nu p}) = 2} \tag{11.23}$$

que es el equivalente a la regla de Gottfried en las reacciones de neutrinos. Utilizando los datos del experimento BEBC, se obtiene un valor experimental $S_A = 1{,}87 \pm 0{,}15$, en buen acuerdo con la predicción teórica. Finalmente, se tiene la regla de suma de Gross-Lewellyn Smith

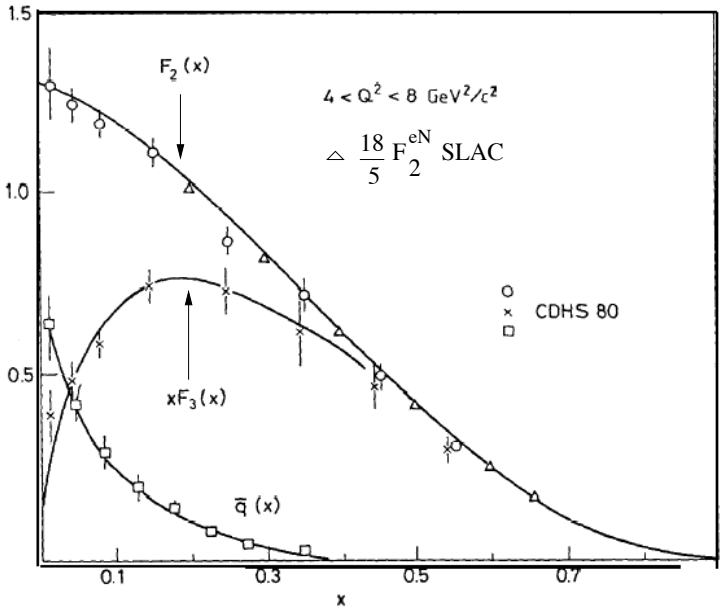


Figura 11.19: Funciones de estructura del nucleón, medidas con un haz de neutrinos por el experimento CDHS, comparadas con las obtenidas en el experimento de MIT-SLAC. *Fuente*: J. Steinberger, *Nobel Lectures* (1988).

$$\boxed{S_{GLS} = \int_0^1 dx\, \frac{1}{2}(F_3^{\nu N} + F_3^{\bar{\nu} N}) = \sum_q \int_0^1 dx\, (q - \bar{q}) = 3} \qquad (11.24)$$

cuya comparación con el valor experimental medido en numerosos experimentos con neutrinos, $S_{GLS} \approx 2{,}64 \pm 0{,}06$, proporciona un interesante test de las correcciones introducidas por QCD.

11.3 El color de los quarks y QCD

La teoría que explica la interacción entre quarks se basa en la existencia de un número cuántico adicional para los quarks, el color. A continuación se resumen algunos de los los principales argumentos que permiten llegar a esta conclusión.

- La hipótesis del color (Geenberg y Han-Nambu, 1965) surge inicialmente para tratar de explicar una paradoja en la estructura de ciertos hadrones como por ejemplo el barión Δ^{++}. Este barión está constituido, según el modelo $SU(3)$ de Gell-Mann y Zweig, por 3 quarks de tipo u cuyos espines parecen estar alineados, puesto que el espín total es 3/2. Este hecho está en contradicción con el principio de Pauli.

- En los datos experimentales de las colisiones e^+e^- a baja energía (menos de 3 GeV en centro de masas), que se empiezan a obtener a partir de los años 1970, se observa un valor constante de $R_{had} \approx 2$. Según el modelo de quark-partones, se tiene $R_{had} = N_c \sum_q e_q^2$. Si se admite que los tres quarks u, d, s contribuyen a la suma, se obtiene necesariamente $N_c = 3$.

- En 1969, Adler y Jackiw-Bell logran explicar la desintegración $\pi^0 \to \gamma\gamma$ mediante un diagrama de Feynman como el que aparece en la figura 11.20a. Este tipo de diagramas triangulares, incluyendo la matriz γ^5 en al menos un vértice, se conocen como 'anomalía axial'. Utilizando el modelo quark, la anchura de la desintegración resulta ser

$$\Gamma_{\pi^0} = [N_c(e_u^2 - e_d^2)]^2 \frac{\alpha^2 m_\pi^3}{32\pi^3 f_\pi^2} = \left(\frac{N_c}{3}\right)^2 (7{,}7 \text{ eV})$$

  El valor experimental $\Gamma_{\pi^0} = (7{,}8 \pm 0{,}6)$ eV implica $N_c = 3$.

- El estudio de las anomalías en las teorías de campos puede llegar a alcanzar una importancia insospechada. En efecto, cuando un campo *gauge* aparece acoplado a un diagrama de tipo anomalía axial, la corriente asociada deja de ser una corriente conservada y la teoría deja de ser renormalizable. Esto ocurre fatalmente en el modelo estándar, debido a diagramas como el de la figura 11.20b. La contribución de estos diagramas es proporcional a sumas del tipo $S_1 = \sum_f e_f$ y $S_2 = \sum_f e_f^2 (T_3)_f$, siendo T_3 la tercera componente del isospín débil, y f cualquier fermión. En cada generación de fermiones resulta

$$S_1 = e_l + e_\nu + N_c(e_u + e_d) = \frac{N_c}{3} - 1$$

  Por tanto, para $N_c = 3$, se obtiene $S_1 = 0$ y de la misma forma $S_2 = 0$. La condición $N_c = 3$ parece, por tanto, una condición necesaria para que el modelo estándar sea renormalizable. Pero este razonamiento revela otra condición igualmente necesaria, más relevante si cabe: las generaciones han de ser completas, es decir, a cada quark ha de corresponder un leptón.

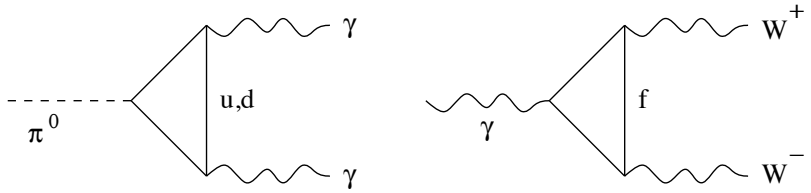
La propuesta de describir las interacciones entre quarks mediante un campo *gauge* con simetría local $SU(3)$ surge en 1973 (Fritzsch, Gell-Mann etc., 1973). La motivación principal es el descubrimiento de que las teorías *gauge* no abelianas pueden ser asintóticamente libres y esta propiedad permite explicar los resultados de la difusión profundamente inelástica. La teoría resultante es

la cromodinámica cuántica (QCD). Según esta teoría, los quarks se asocian en tripletes de color $q = (q_1\ q_2\ q_3)$ y el lagrangiano de interacción es

$$\boxed{\mathcal{L}_{QCD} = \sum_q \bar{q}(i\gamma^\mu D_\mu - m_q)q - \frac{1}{2}Tr(G^{\mu\nu}G_{\mu\nu})} \qquad (11.25)$$

donde D_μ y $G_{\mu\nu}$ son matrices definidas en la forma

$$D_\mu = \partial_\mu + igG_\mu \qquad \text{y} \qquad G_{\mu\nu} = \partial_\mu G_\nu - \partial_\nu G_\mu + ig[G_\mu, G_\nu]$$



(a) (b)

Figura 11.20: Diagramas de Feynman asociados a la anomalía axial que describen (a) la desintegración del π^0 y (b) un posible acoplo del fotón a los bosones intermedios.

La matriz G_μ tiene tres dimensiones y puede desarrollarse como suma de los generadores de $SU(3)$, $G_\mu = \sum G_\mu^a \lambda_a/2$, donde las matrices λ_a se conocen como matrices de Gell-Mann. Existen 8 generadores para $SU(3)$ y, por tanto, 8 campos vectoriales reales asociados a la interacción entre quarks. Estos campos son los gluones. Los gluones son, por tanto, partículas neutras de espín igual a 1 y masa nula. Tienen 8 posibles estados de color y, al igual que los quarks, permanecen confinados dentro de los hadrones. La constante de acoplo entre quarks y gluones se define por analogía con QED en la forma $\alpha_s = g^2/4\pi$.

La regla de suma del momento aporta evidencia indirecta de la existencia de partículas neutras dentro del protón. La primera evidencia directa de la existencia de gluones es, sin embargo, contemporánea de la primera evidencia clara de la formación de *jets* en colisiones e^+e^-, obtenida en el anillo de colisiones PETRA del laboratorio DESY (Hamburgo) a final de los años 1970. La figura 11.21 muestra como, en caso de existir el gluón, ha de poder producirse en colisiones e^+e^-, mediante un mecanismo similar al *bremsstrahlung* en QED. De esta forma han de producirse sucesos con tres *jets*. Este tipo de sucesos fue efectivamente observado tal como muestra la figura 11.22.

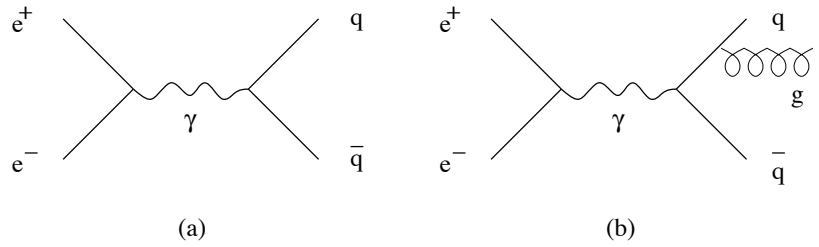


Figura 11.21: Diagramas de Feynman correspondientes a un suceso con un par de quarks (a) y con un gluón adicional (b).

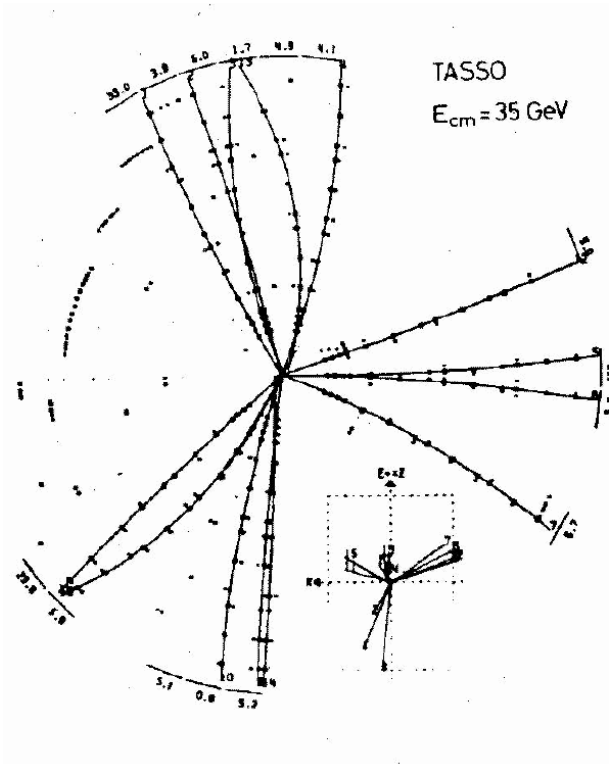


Figura 11.22: Suceso con tres *jets* obtenido en colisiones e^+e^- a una energía en centro de masas de $\sqrt{s} = 35$ GeV. La figura muestra una reconstrucción de las trazas producidas por partículas cargadas en el plano transverso a la dirección de los haces. *Fuente*: experimento TASSO.

11.4 Evolución de la constante de acoplo con la energía

En cualquier teoría de campos, al considerar los términos de la serie perturbativa más allá del primer orden, las constantes de acoplo se transforman en constantes efectivas que dependen de la energía. Este fenómeno se conoce como evolución de la constante de acoplo con la energía (en inglés se emplea el término *running*). En el caso de QED, el diagrama más relevante en el estudio de la evolución de α es el bucle fermiónico insertado en el propagador, tal como se muestra en la figura 11.23. El bucle aparece en cuanto se introducen correcciones perturbativas a un diagrama en primer orden, cuya amplitud es T_0.

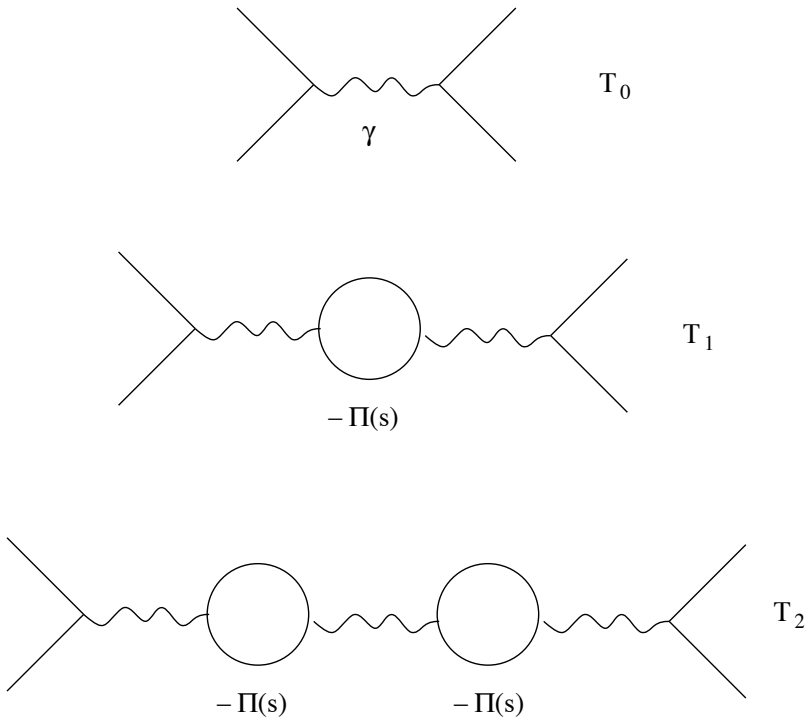


Figura 11.23: El propagador del fotón en teoría de perturbaciones. Diagramas de Feynman en primer orden (amplitud T_0) y en ordenes sucesivos de la teoría de perturbaciones (amplitudes T_1 y T_2).

Sumando los diagramas que aparecen en la figura, la amplitud de difusión puede expresarse como la siguiente suma

$$T = T_0(1 - \Pi + \Pi^2 + ...)$$

donde Π es la contribución del bucle. Para $s \gg m_f$, siendo m_f la masa de

cualquier fermión elemental que pueda contribuir al bucle, se obtiene

$$\Pi(s) = -\frac{\alpha_0}{3\pi}\sum_f N_c e_f^2 \mathrm{Log}\frac{s}{\Lambda^2} + \ldots$$

siendo s el cuadrimomento del fotón al cuadrado, α_0 la constante de acoplo que aparece en el lagrangiano de interacción de QED, N_c el número de colores (con el convenio $N_c = 1$ para leptones), e_f la carga del fermión f en unidades de $|e|$ y finalmente Λ un regulador ultravioleta. En la expresión anterior se han omitido varios términos independientes de la energía. El regulador Λ, cuyo valor está indeterminado, puede interpretarse como una escala de energía muy elevada a partir de la cual deja de tener validez QED. El valor de Π puede también expresarse

$$\boxed{\Pi(s) = \alpha_0\beta_0 \mathrm{Log}\frac{s}{\Lambda^2} + \ldots \quad \text{definiendo} \quad \beta_0 = -\frac{1}{3\pi}\sum_f N_c e_f^2} \qquad (11.26)$$

Dado que T_0 es proporcional a α_0, todos los términos considerados de la serie perturbativa pueden reabsorberse dentro de una constante de acoplo efectiva que depende de la energía

$$\alpha(s) = \alpha_0(1 - \Pi + \Pi^2 + \ldots.) = \frac{\alpha_0}{1+\Pi}$$

y derivando esta expresión se obtiene

$$\frac{d\alpha(s)}{d\mathrm{Log}\, s} = -\frac{\alpha_0}{(1+\Pi)^2}\frac{d\Pi(s)}{d\mathrm{Log}\, s} = -\frac{\beta_0\alpha_0^2}{(1+\Pi)^2} = -\beta_0\alpha^2$$

Esta ecuación diferencial se conoce como 'ecuación del grupo de renormalización' para la constante de acoplo α y puede obtenerse a cualquier orden de la teoría de de perturbaciones, como una serie en potencias de α:

$$\boxed{\frac{d\alpha(s)}{d\mathrm{Log}\, s} = -\beta_0\alpha^2 + \mathcal{O}(\alpha^3)} \qquad (11.27)$$

Guardando únicamente el primer término de la serie, la ecuación diferencial tiene como solución

$$\frac{1}{\alpha(s_2)} - \frac{1}{\alpha(s_1)} = \beta_0 \mathrm{Log}\frac{s_2}{s_1}$$

siendo s_1 y s_2 dos escalas de energía. Si $s_2 > s_1$, resulta, por tanto, $\alpha(s_2) > \alpha(s_1)$, ya que $\beta_0 < 0$. En otras palabras, la constante de interacción efectiva crece con la energía. Este crecimiento es observable experimentalmente. En efecto, a baja energía ($\sqrt{s} \approx m_e$) se mide $\alpha \approx 1/137$, mientras que a altas energías ($\sqrt{s} \approx M_Z$), los datos experimentales son compatibles con un valor $\alpha \approx 1/129$.

Este crecimiento no es privativo de QED y ocurre de hecho en todas las teorías de campos con algún interés en física de partículas. Una notable excepción son las teorías *gauge* no abelianas (Gross-Wilczek, Politzer, 1973).[1] En efecto, en una teoría como QCD se verifica igualmente la ecuación de evolución

$$\frac{1}{\alpha_s(s_2)} - \frac{1}{\alpha_s(s_1)} = \beta_0 \mathrm{Log}\frac{s_2}{s_1}$$

pero en este caso $\beta_0 > 0$, con lo cual la constante de acoplo decrece con la energía. Este comportamiento de α_s está avalado en la actualidad por una gran cantidad de resultados experimentales resumidos en la figura 11.24.

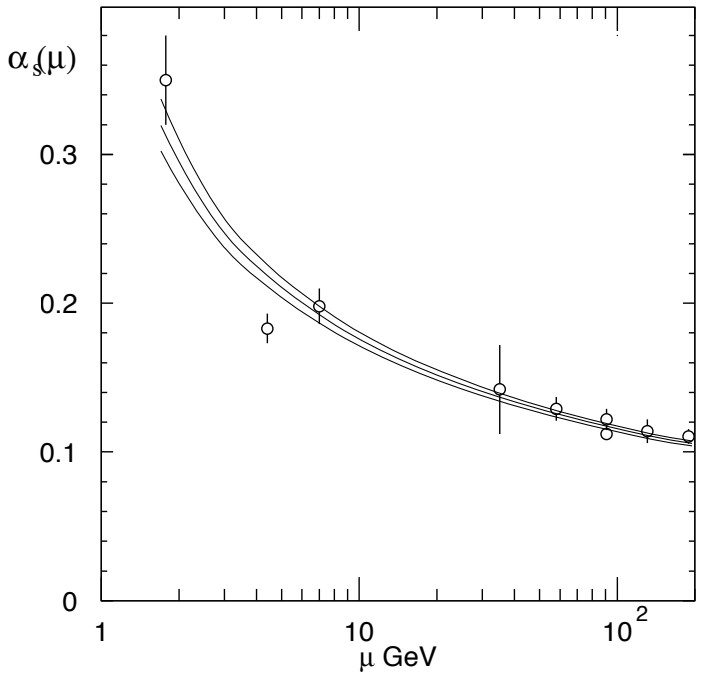


Figura 11.24: Evolución con la escala de energía μ de la constante de acoplo efectiva de QCD, α_s, y comparación con diversa medidas experimentales. *Fuente*: PDG2002, *Phys. Rev.,* **D66** (2002) 010001.

[1] Por este trabajo, los físicos estadounidenses David Gross, Frank Wilczek y H. David Politzer, han compartido el premio Nobel de Física de 2004.

En el caso de QCD, dado que no existe ninguna escala de energía privilegiada, la ecuación de evolución suele escribirse en la forma,

$$\frac{1}{\alpha_s(s_1)} - \beta_0 \mathrm{Log}(s_1) = \frac{1}{\alpha_s(s_2)} - \beta_0 \mathrm{Log}(s_2) = -\beta_0 \mathrm{Log}\Lambda^2$$

donde Λ es una constante. La ecuación anterior se puede escribir en la forma

$$\boxed{\alpha_s(s) = \frac{1}{\beta_0 \mathrm{Log}(s/\Lambda^2)} \quad \text{siendo} \quad \beta_0 = \frac{33 - 2n_f}{12\pi}} \tag{11.28}$$

y n_f el número de sabores que pueden excitarse dentro de un bucle formado por quarks. Este número es igual a 6 como máximo y, por tanto, β_0 es siempre una cantidad positiva. El término positivo independiente de n_f tiene su origen en los bucles de gluones. Estos bucles son posibles en QCD debido a los autoacoplos del gluón. El hecho de que n_f dependa de la energía crea una complicación técnica a la hora de calcular la curva de evolución, que se resuelve admitiendo que $\alpha_s(s)$ ha de depender de s de forma continua. Para $\sqrt{s} = M_Z$, el valor experimental es $\alpha_s(s) \approx 0{,}12$. Como a esta escala de energía pueden excitarse 5 sabores de quarks, se obtiene $\Lambda \approx 90$ MeV. Esta escala aumenta a medida que baja la energía y, por tanto, disminuye el número de sabores n_f. En principio α_s diverge para $\sqrt{s} = \Lambda$, pero la ecuación de evolución deja de ser válida a baja energía. En efecto, el desarrollo perturbativo sólo tiene sentido si α_s es muy inferior a 1.

11.5 QCD perturbativa

QCD permite calcular correcciones al modelo de partones. Estas correcciones aparecen como una serie perturbativa en la constante de acoplo α_s, y disminuyen, por tanto, a medida que aumenta la escala de energía del proceso considerado. En este sentido, el modelo de partones puede considerarse como el 'orden 0' de QCD. La figura 11.25 muestra las primeras correcciones introducidas por QCD en algunos de los procesos considerados anteriormente. Al igual que ocurre en QED, el resultado del cálculo en QCD depende principalmente de si la radiación de gluones ocurre en el estado inicial o bien en el estado final. Si la radiación ocurre en el estado final, se obtienen correcciones a las secciones eficaces o anchuras de desintegración en forma de una serie perturbativa del tipo

$$\sigma(s) = \sigma_0(s)\left[1 + a_1\frac{\alpha_s}{\pi} + a_2\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2 + \ldots\right]$$

Estas correcciones son en general pequeñas, del orden del $5\,\%$, por ejemplo, a la escala M_Z. En cambio, si la radiación de gluones ocurre en el estado inicial aparecen correcciones logarítmicas del tipo $\alpha_s \mathrm{Log}(Q^2/Q_0^2)$, siendo Q^2 la

escala de energías del proceso de radiación y Q_0^2 la escala de energía del proceso partónico, o si se quiere, de las funciones de estructura consideradas. Estas correcciones pueden ser grandes y ha de considerarse la suma de toda la serie perturbativa. Esto se traduce en funciones de estructura efectivas que dependen no sólo de x, sino también de la escala de energía Q^2, o sea, en violaciones de la invariancia de escala.

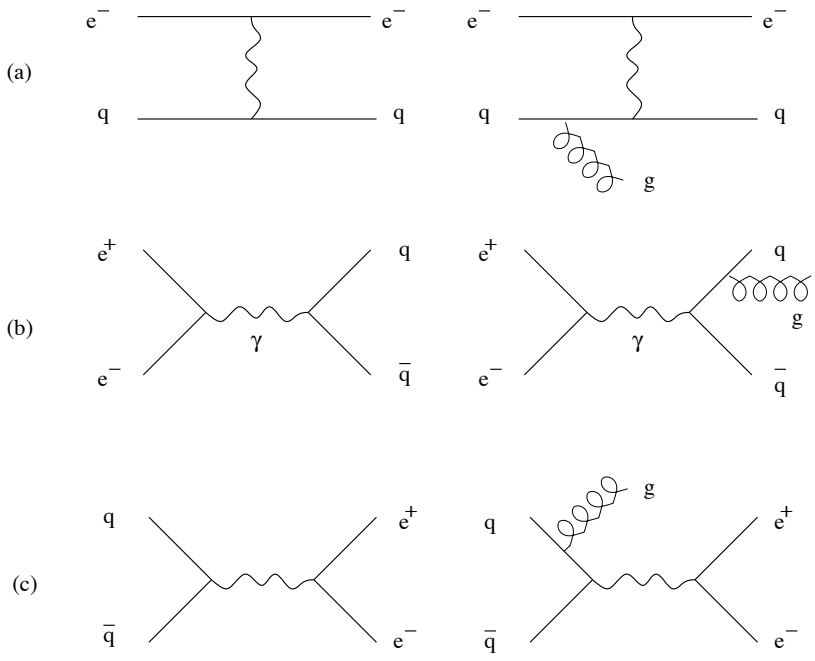


Figura 11.25: Diagramas de Feynman para la difusión inelástica (a), la producción hadrónica en colisiones e^+e^- (b) y la producción de pares de Drell-Yan (c). El primer diagrama corresponde al modelo de partones y el segundo a la primera corrección introducida por QCD.

La figura 11.26 muestra un resumen de las medidas de $F_2(x, Q^2)$ efectuadas en varios experimentos tanto con blanco fijo como en un colisionador. Pueden observarse claramente las violaciones de la invariancia de escala. En QCD perturbativa, los observables más interesantes son aquellos en los cuales se conoce con precisión tanto el desarrollo perturbativo como las medidas experimentales. Uno de los observables inclusivos mejor estudiado es R_{had} cuyo desarrollo perturbativo se conoce hasta orden α_s^3:

$$\boxed{R_{had} = R_{had}^0 \left[1 + a_1 \frac{\alpha_s}{\pi} + a_2 \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2 + a_3 \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^3 + \ldots\right]} \qquad (11.29)$$

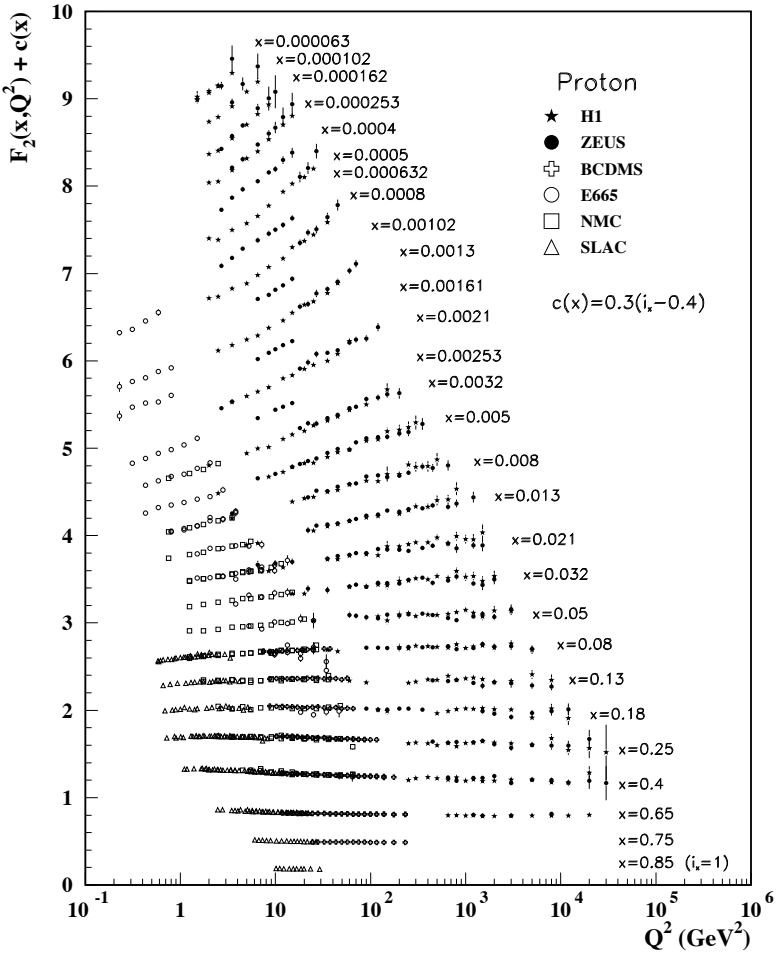


Figura 11.26: Medidas de $F_2(x, Q^2)$ efectuadas en experimentos de colisionador (H_1, ZEUS) y en experimentos de blanco fijo (BCDMS, E665, NMC, SLAC). En todos los casos se trata de difusión de leptones (electrones o muones) sobre protones. Nótese que valor de F_2 está desplazado verticalmente según el valor de x. *Fuente*: PDG2002, *Phys. Rev.*, **D66** (2002) 010001.

Los coeficientes a_i dependen de las masas de los quarks y de n_f y, por tanto, de la escala de energía. Para $\sqrt{s} = 10$ GeV ($n_f = 4$) se obtiene

$$R^0_{had} = 10/3, \quad a_1 = 1{,}018, \quad a_2 = 1{,}935, \quad \text{y} \quad a_3 = -10{,}7,$$

mientras que el valor experimental es $R_{had} = 3{,}53 \pm 0{,}05$.

Otras escalas de energía donde se conoce R_{had} con precisión son $\sqrt{s} = 32$ GeV y $\sqrt{s} = 161$ GeV. Otros observables inclusivos particularmente interesantes están relacionados con las anchuras de desintegración del bosón Z y del leptón τ. En el primer caso se define

$$\boxed{R_Z = \frac{\Gamma(Z \to had)}{\Gamma(Z \to l)} = R_Z^0 \left[1 + a_1 \frac{\alpha_s}{\pi} + a_2 \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2 + a_3 \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^3 + \ldots\right]}$$

En este caso la escala es $\sqrt{s} = 91$ GeV ($n_f = 5$) y se obtiene

$$R_Z^0 = 19{,}938, \quad a_1 = 1{,}060, \quad a_2 = 0{,}852, \quad \text{y} \quad a_3 = -15,$$

mientras que el valor experimental es $R_Z = 20{,}765 \pm 0{,}026$. En el caso del leptón τ se tiene

$$\boxed{R_\tau = \frac{\Gamma(\tau \to had)}{\Gamma(\tau \to l)} = R_\tau^0 \left[1 + a_1 \frac{\alpha_s}{\pi} + a_2 \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2 + a_3 \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^3 + \ldots\right]}$$

En este caso la escala es $\sqrt{s} = 1{,}8$ GeV ($n_f = 3$) y se obtiene

$$R_\tau^0 = 3{,}058, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 5{,}20, \quad \text{y} \quad a_3 = -26{,}4,$$

mientras que el valor experimental es $R_\tau = 3{,}639 \pm 0{,}017$. Otro observable que permite determinar α_s a baja energía lo proporciona la regla de suma de Gross y Lewellyn-Smith:

$$\boxed{S_{GLS} = S_{GLS}^0 \left[1 + a_1 \frac{\alpha_s}{\pi} + a_2 \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2 + \ldots\right]} \tag{11.30}$$

cuya escala de energía es $\sqrt{s} = 1{,}7$ GeV ($n_f = 3$) y se obtiene

$$S_{GLS}^0 = 3, \quad a_1 = -1, \quad a_2 = -3{,}58$$

mientras que el valor experimental es $S_{GLS} = 2{,}64 \pm 0{,}06$.

Es posible igualmente efectuar cálculos de QCD utilizando observables no inclusivos. Uno de los estudiados con más detalle es el observable R_3, que representa la fracción de sucesos hadrónicos con 3 *jets* en colisiones e^+e^-. La sección eficaz de producción de 3 *jets*, en el límite de quarks de masa nula, es

$$\sigma_{q\bar{q}g} = \frac{2\alpha_s}{3\pi} \sigma_{q\bar{q}} \int\int dx_1 dx_2 \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1 - x_1)(1 - x_2)}$$

donde x_1 y x_2 son las fracciones de energía de los quarks, es decir, $x_1 = 2E_q/\sqrt{s}$, $x_2 = 2E_{\bar{q}}/\sqrt{s}$, y de la misma forma $x_g = 2E_g/\sqrt{s}$, verificándose $x_1 + x_2 + x_g = 1$. La integral que define $\sigma_{q\bar{q}g}$ es divergente como ocurre en

general para los observables no inclusivos. Esto se debe en parte a considerar que los quarks tienen masa nula (divergencia colineal) pero sobre todo a que el gluón puede alcanzar una energía nula (divergencia infrarroja). Con objeto de evitar las zonas del espacio de fases donde la integral diverge, se puede imponer la condición

$$M_{12}^2 = (p_1 + p_2)^2 > ys$$

siendo p_1 y p_2 los cuadrimomentos de cualquier par de partones (quarks o gluones) producidos en el suceso. De esta forma se obtiene una sección eficaz que depende de la variable y cuyo rango de variación es $0 < y < 1$. El observable R_3 se define entonces en la forma

$$\boxed{R_3(y) = \frac{\sigma_{q\bar{q}g}}{\sigma_{had}} = C_1(y)\alpha_s + C_2(y)\alpha_2^2 + \ldots} \tag{11.31}$$

y el coeficiente $C_1(y)$ se puede calcular a partir de la integral que define $\sigma_{q\bar{q}g}$. El resultado es

$$C_1(y) \approx \frac{2}{3\pi}[2\mathrm{Log}^2 y + 3\mathrm{Log}\, y + \frac{5}{2} - \frac{\pi^2}{3} + \mathcal{O}(y)]$$

que como puede comprobarse es divergente para $y \to 0$. Esta divergencia no es observable experimentalmente ya que para $y \to 0$, el suceso de 3 *jets* se transforma en un suceso de 2 *jets*. La sección eficaz inclusiva, con producción de cualquier número de *jets*, es una cantidad finita. Todo el problema experimental reside en la transición entre los partones, que aparecen en la fórmula teórica, y los *jets*, que son visibles en el experimento. Esta transición requiere el uso de modelos de fragmentación que sean capaces de describir los datos experimentales con exactitud.

A partir de las violaciones de la invariancia de escala en las medidas de F_2, de los observables inclusivos que han sido definidos, y los observables no inclusivos, pero que pueden ser controlados experimentalmente como R_3, se pueden obtener medidas de α_s sobre un amplio rango de energías. Estas medidas aparecen resumidas en la tabla 11.4. En esta tabla se incluye el valor medido de α_s junto con el valor correspondiente a la escala M_Z, obtenido utilizando la ecuación de evolución de α_s.

A partir de los valores de la tabla 11.4, se llega al siguiente valor medio de α_s a la escala M_Z

$$\boxed{\alpha_s(M_Z) = 0{,}119 \pm 0{,}002} \tag{11.32}$$

11.6 La gran unificación

Según los resultados discutidos anteriormente, la constante de acoplo efectiva de QED aumenta su valor con la escala de energía, mientras que la constante

TABLA 11.4: Medidas de la constante de acoplamiento de las interacciones fuertes, α_s, a distintos valores de la energía de interacción. *Fuente*: *Phys. Rep.*, **340** (2001) 165.

Observable	$\sqrt{s}$ (GeV)	$\alpha_s(\sqrt{s})$	$\alpha_s(M_Z)$
S_{GLS}	1,7	$0{,}295 \pm 0{,}083$	$0{,}114 \pm 0{,}011$
R_τ	1,8	$0{,}321 \pm 0{,}017$	$0{,}119 \pm 0{,}004$
$F_2(\nu N)$	5,0	$0{,}215 \pm 0{,}016$	$0{,}119 \pm 0{,}005$
$F_2(\mu N)$	7,1	$0{,}280 \pm 0{,}014$	$0{,}113 \pm 0{,}005$
$F_2(ep)$	$2-10$	$-$	$0{,}120 \pm 0{,}010$
R_{had}	10,0	$0{,}169 \pm 0{,}040$	$0{,}115 \pm 0{,}018$
R_{had}	31,6	$0{,}163 \pm 0{,}022$	$0{,}133 \pm 0{,}015$
R_Z	91,2	$0{,}122 \pm 0{,}006$	$0{,}122 \pm 0{,}006$
R_3	91,2	$0{,}121 \pm 0{,}008$	$0{,}121 \pm 0{,}008$
R_{had}	161.	$0{,}130 \pm 0{,}035$	$0{,}141 \pm 0{,}044$

de acoplo de QCD disminuye. Existe, por tanto, una escala de energía para la cual ambas constantes de acoplo son iguales. Este hecho sugiere la existencia de una unificación de todas las interacciones, o al menos de todas las conocidas excepto la interacción gravitacional, a una cierta escala de energía Λ_{gut}, llamada escala de gran unificación. Según la hipótesis de gran unificación, cuando esta escala de energía es alcanzada, existe un único grupo de simetría *gauge* G_{gut} que contiene todas las interacciones observables a baja energía y, por tanto, existe una única constante de acoplo α_{gut}. Por tanto, el grupo G_{gut} ha de contener como subgrupo el grupo de simetría del modelo estándar, es decir,

$$SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y \subset G_{gut}$$

siendo $SU(3)_c$ el grupo de simetría de QCD y $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ el de la interacción electrodébil. El grupo G_{gut} más simple con las características necesarias es el grupo $SU(5)$ (Georgi-Glashow, 1974). Si se supone que $SU(5)$ es el grupo de la gran unificación, no es necesario suponer la existencia de ningún nuevo estado fermiónico hasta alcanzarse la energía Λ_{gut}. En lo que sigue, las constantes de acoplo de la interacción electromagnética, débil y fuerte se designan respectivamente por α, α_w y α_s, siendo $\alpha_w = \alpha/\sin^2\theta_w$. La normalización de los generadores de $SU(5)$ implica la siguiente relación entre las constantes de acoplo:

$$\alpha \sum_f e_f^2 = \alpha_w \sum_f (T_3)_f^2 = \alpha_s \sum_f C_f^2$$

siendo e_f la carga eléctrica del fermión f, $(T_3)_f$ la tercera componente del isospín débil y C_f la carga de color. Con objeto de poder efectuar las sumas anteriores sobre todos los estados femiónicos conocidos f, que resultan ser 15 por cada generación, es útil ayudarse de la tabla 11.5 para la primera generación de fermiones.

TABLA 11.5: La primera generación de fermiones en una teoría de gran unificación.

fermión	estados	e_f	$(T_3)_f$	C_f
ν_L	1	0	$+1/2$	0
e_L	1	-1	$-1/2$	0
e_R	1	-1	0	0
u_L	3	$+2/3$	$+1/2$	$0, \pm 1/2$
d_L	3	$-1/3$	$-1/2$	$0, \pm 1/2$
u_R	3	$+2/3$	0	$0, \pm 1/2$
d_R	3	$-1/3$	0	$0, \pm 1/2$

A partir de esta tabla puede deducirse que, para cada generación de fermiones, $\sum_f e_f^2 = 16/3$, mientras que $\sum_f (T_3)_f^2 = \sum_f C_f^2 = 2$ y, por tanto, la condición de unificación de las constantes de acoplo a la escala Λ_{gut} es

$$8/3 \cdot \alpha = \alpha_w = \alpha_s$$

y no $\alpha = \alpha_w = \alpha_s$ como ingenuamente hubiera podido pensarse. El paso siguiente es determinar la evolución de las constantes de acoplo con la energía. En primer orden de la teoría de perturbaciones, todas ellas verifican ecuaciones de evolución del tipo

$$\frac{1}{\alpha(M)} - \frac{1}{\alpha(m)} = 2\beta \mathrm{Log} \frac{M}{m}$$

siendo M una escala de energía grande en torno a la gran unificación, y m una escala más pequeña que permita conectar con las medidas experimentales de α. Los valores de los coeficiente β son los siguientes

$$\beta_{em} = \frac{1}{3\pi}\Big(\frac{11}{2} - \frac{8}{3} n_g\Big), \quad \beta_w = \frac{1}{4\pi}\Big(\frac{22}{3} - \frac{4}{3} n_g\Big) \quad \text{y} \quad \beta_s = \frac{1}{4\pi}\Big(11 - \frac{4}{3} n_g\Big)$$

siendo n_g el número de generaciones de fermiones. Los valores de β_{em} y β_s corresponden a las expresiones que se han discutido anteriormente, con la salvedad de que en β_{em} se ha introducido un nuevo término que tiene en cuenta el bucle del bosón W, inexistente a baja energía. Para $m > 350$ GeV, todas las generaciones de fermiones están completas y, por tanto, se pueden utilizar las expresiones anteriores con $n_g = 3$. Se obtiene de esta forma $\beta_{em} = -5/6\pi$, $\beta_w = +10/12\pi$ y $\beta_s = +7/4\pi$. A partir de estos valores se deduce que α aumenta con la escala de energía, mientras que tanto α_w como α_s disminuyen. El valor de M para el cual $8/3 \cdot \alpha = \alpha_s$ se deduce a partir de la ecuación

$$\mathrm{Log} \frac{M}{m} = \frac{8\pi}{33}\Big[\frac{3}{8}\frac{1}{\alpha(m)} - \frac{1}{\alpha_s(m)}\Big]$$

Utilizando valores de $\alpha \approx 1/129$ y $\alpha_s \approx 1/10$ para $m = 350$ GeV, se obtiene $M \approx 10^{15}$ GeV. A esta escala de energía, el valor de las constantes de acoplo es $8/3 \cdot \alpha = \alpha_s \approx 1/42$. Por tanto, puede concluirse que

$$\boxed{\Lambda_{gut} \approx 10^{15} \text{ GeV} \qquad \text{y} \qquad \alpha_{gut} \approx 1/42} \tag{11.33}$$

En lo que respecta a α_w, su valor para $m = 350$ GeV es $\alpha_w \approx 1/28$, y este valor disminuye hasta alcanzar $\alpha_w \approx 1/44$ para $M = \Lambda_{gut}$. Por tanto, la unificación a la escala Λ_{gut} no es exacta, aunque los valores de las 3 constantes de acoplo resultan estar sorprendentemente próximos, como puede apreciarse en la figura 11.27.

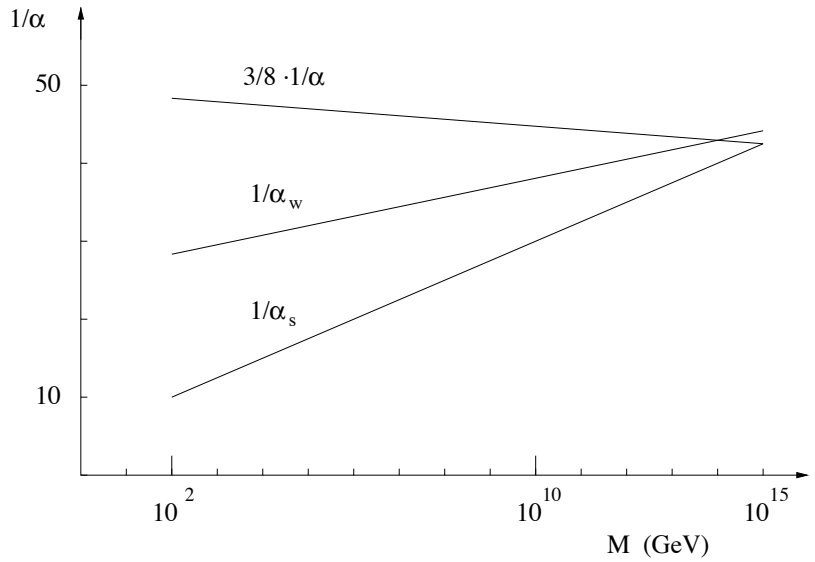


Figura 11.27: Evolución de las constantes de acoplo con la escala de energía.

Los resultados que se obtienen con otros grupos G_{gut} son similares a los obtenidos con $SU(5)$. Aunque la existencia de una unificación de las interacciones fundamentales es una creencia generalizada, no existe en la actualidad ninguna teoría totalmente satisfactoria.

Además de la unificación de las constantes de acoplo, las teorías de gran unificación predicen relaciones entre las masas de los fermiones, la existencia de nuevas partículas como los monopolos magnéticos, y finalmente ofrecen la posibilidad de explicar la asimetría observada en la naturaleza entre materia y antimateria, como consecuencia de la no conservación del número bariónico. En lo que sigue se discutirá únicamente la más espectacular de estas predicciones, la violación del número bariónico, y más concretamente la desintegración del protón. En las teorías de gran unificación, todos los fermiones de una misma generación están incluidos en un mismo multiplete *gauge*. Esto implica que están conectados entre ellos por bosones *gauge*, designados por X en lo que sigue,

cuya masa ha de ser similar a la escala de unificación. De esta forma se pueden construir diagramas como el que muestra la figura 11.28, que permiten la desintegración del protón, por ejemplo según el modo $p \to e^+ \pi^0$, con evidente violación del número bariónico.

La anchura de desintegración del protón depende del modelo de gran unificación considerado. Una primera estimación de la misma puede efectuarse sin embargo de una forma simple que se explica a continuación. La amplitud del diagrama de Feynman de la figura 11.28 es proporcional a α_{gut}/M_X^2 y, por tanto, la anchura de desintegración Γ_p es proporcional a α_{gut}^2/M_X^4. Si se desprecian todas las masas salvo la masa del protón m_p, puede deducirse por un simple argumento dimensional que Γ_p ha de ser también proporcional a m_p^5. En definitiva, se llega a una expresión del tipo

$$\boxed{\Gamma_p = a\, \alpha_{gut}^2 m_p^5 / M_X^4} \tag{11.34}$$

donde a es una constante puramente numérica, que depende del modelo de unificación considerado, así como de la estructura interna del protón. Utilizando los valores $\alpha_{gut} \approx 1/42$ y $M_X \approx 10^{15}$ GeV, se obtiene una vida media del protón $\tau_p \approx 10^{31}$ años para $a = 1$. En el modelo $SU(5)$, el valor de τ_p es muy próximo al valor obtenido con $a = 1$. En otros modelos, la vida media del protón puede ser considerablemente más larga.

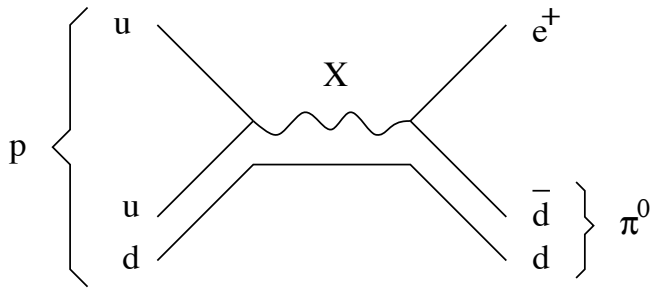


Figura 11.28: Diagrama de Feynman que explica la desintegración del protón en una teoría de gran unificación.

En la actualidad, la desintegración del protón no ha sido observada experimentalmente, y tan sólo se dispone del siguiente límite inferior

$$\boxed{\tau_p / BR(p \to e^+ \pi^0) > 1{,}6\, 10^{33} \text{ y}} \tag{11.35}$$

que naturalmente depende del modo de desintegración considerado. A continuación se detallan en la tabla 11.6 los principales modos de desintegración del protón y del neutrón según el modelo $SU(5)$. Estos valores se han obtenido utilizando para la estructura interna del nucleón un modelo no relativista basado en el grupo de simetría de espín-sabor $SU(6)$.

TABLA 11.6: Modos de desintegración de p y n según el modelo de gran unificación SU(5).

part.	modo	BR(%)	part.	modo	BR(%)
$p \to$	$e^+\pi^0$	33	$n \to$	$e^+\pi^-$	58
	$e^+\rho^0$	17		$e^+\rho^-$	30
	$e^+\eta$	12		$\bar{\nu}_e\eta$	2
	$e^+\omega$	21		$\bar{\nu}_e\omega$	4
	$\bar{\nu}_e\pi^+$	9		$\bar{\nu}_e\pi^0$	4
	$\bar{\nu}_e\rho^+$	4		$\bar{\nu}_e\rho^0$	2
	μ^+K^0	< 1		$\bar{\nu}_\mu K^0$	< 1

Como puede observarse en esta tabla, el modo $p \to e^+\pi^0$ es dominante, además de ser el más fácil de observar experimentalmente. Incluso teniendo en cuenta la incertidumbre asociada a los BR, la predicción de $SU(5)$ para la vida media del protón es muy inferior al límite experimental y, por tanto, $SU(5)$ no puede considerarse un modelo válido. El problema sigue abierto para otros grupos de simetría más complejos.

11.7 Ejercicios

11.1. Fórmulas de la difusión profundamente inelástica.
a) Demostrar que en la difusión de un electrón sobre un nucleón, la transferencia de cuadrimomento al cuadrado se puede escribir en la forma

$$q^2 = -4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

siendo E y E' las energías del electrón incidente y difundido, respectivamente, y θ el ángulo de difusión.
b) Partiendo de la siguiente expresión de la sección eficaz de difusión inelástica

$$\left(\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'}\right)_{inel} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left(2W_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} + W_2 \cos^2 \frac{\theta}{2}\right)$$

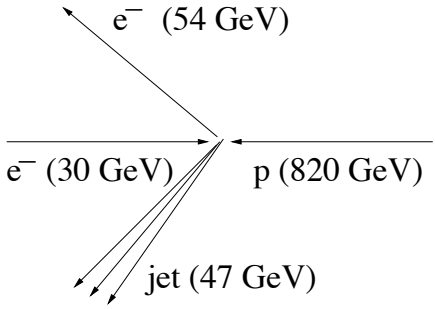
obtener haciendo un cambio de variables la siguiente expresión

$$\left(\frac{d^2\sigma}{dQ^2 d\nu}\right)_{inel} = \frac{4\pi\alpha^2}{(Q^2)^2} \left[\frac{2M^2Q^2}{s^2} W_1 + \left(1 - \frac{2M\nu}{s} - \frac{M^2Q^2}{s^2}\right) W_2\right]$$

siendo ν y Q^2 invariantes relativistas que en el sistema del laboratorio adoptan la expresión $\nu = E - E'$ y $Q^2 = -q^2 = 4EE' \sin^2(\theta/2)$.

c) Utilizando las propiedades de invariancia Lorentz y conservación de la corriente electromagnética, demostrar que la sección eficaz inelástica inclusiva se escribe en función de únicamente dos factores de forma, W_1 y W_2, que son los que aparecen en las expresiones anteriores.

11.2. Cinemática de las colisiones ep en HERA.
En el anillo de colisiones HERA del laboratorio DESY (Hamburgo) se producen colisiones entre protones con $E_p = 820$ GeV y electrones con $E_e = 30$ GeV. Un suceso típico de colisión es el que muestra la figura, con la aparición de un electrón con $E'_e = 54$ GeV difundido a un ángulo de $57{,}1^\circ$ y un *jet* de energía $E_J = 47$ GeV a un ángulo $\theta_J = 75{,}9^\circ$ (ambos ángulos medidos respecto a la dirección del protón).



a) Determinar el Q^2 del suceso a partir del electrón difundido. Determinar las variables de escala x e y, y verificar que se cumple $Q^2 = sxy$.
b) Determinar x e y a partir del *jet* únicamente. Para ello se utilizarán las fórmulas (llamadas de Jaquet-Blondel):

$$y = \frac{E_J}{2E_e}(1 - \cos\theta_J) \qquad\qquad x = \frac{(E_J \sin\theta_J)^2}{sy(1-y)}$$

Verificar que $x = \hat{s}/s$ siendo s la energía en centro de masas de ep y $\hat{s}$ la energía en centro de masas de eq (siendo q el partón que interviene en la colisión).
c) La energía del electrón se mide mediante un calorímetro electromagnético con una resolución de $20\,\%/\sqrt{E}$ (E en GeV) y la energía del *jet* mediante un calorímetro hadrónico con una resolución de $35\,\%/\sqrt{E}$ (E en GeV). Suponiendo que el error en las medidas angulares es despreciable, determinar el error experimental en las variables de escala x e y calculadas en los apartados anteriores.

11.3. Normalización de las funciones de estructura.
Partiendo de las funciones EHQL, calcular:
a) $\int_0^1 (q - \bar{q})\,dx$ para $q = u, d$
b) $\int_0^1 xq(x)\,dx$ para $q = u, d, s, g$
y verificar la regla de suma del momento:

$$\sum_{q,\bar{q}} \int_0^1 xq(x)dx = 1$$

11.4. Representación gráfica de las funciones de estructura.
a) Representar gráficamente F_2^{ep} y F_2^{en} utilizando las funciones EHQL. Representar también el cociente de ambas. Comparar las gráficas obtenidas con los datos experimentales.
b) Representar gráficamente $F_2^{\nu N}$ y $xF_3^{\nu N}$ siendo $N = (p+n)/2$. Comparar las gráficas obtenidas con los datos experimentales.

11.5. Secciones eficaces de neutrinos según el modelo de partones.
a) Calcular $\sigma^{\nu N}$ y $\sigma^{\bar{\nu} N}$ utilizando el modelo de partones.
b) Obtener los valores numéricos utilizando las funciones EHQL y comparar con los siguientes valores experimentales:

$$\sigma^{\nu N} = (0{,}68 \pm 0{,}01) 10^{-38} cm^2 \cdot E_\nu (\text{GeV})$$

$$\sigma^{\bar{\nu} N} = (0{,}33 \pm 0{,}01) 10^{-38} cm^2 \cdot E_\nu (\text{GeV})$$

Siendo E_ν la energía del neutrino en el sistema del laboratorio.

11.6. Producción de pares de Drell-Yan en colisiones hadrónicas.
a) Demostrar la siguiente expresión para la sección eficaz diferencial de la creación de pares de Drell-Yan

$$\left(\frac{d^2\sigma}{dm\,dy}\right)_{y=0} = \frac{8\pi\alpha^2}{9m^3} \sum_q e_q^2 [F_q^p(\sqrt{\tau}) F_{\bar{q}}^N(\sqrt{\tau}) + F_{\bar{q}}^p(\sqrt{\tau}) F_q^N(\sqrt{\tau})]$$

donde m es la masa invariante del par, $\tau = m^2/s$ y $F_{\bar{q}}^N$ son las funciones de estructura correspondientes al nucleón N.
b) Calcular esta sección eficaz diferencial usando los parámetros indicados en la figura 11.17 y las funciones de estructura EHQL. Comparar la predicción teórica con los datos experimentales.

11.7. Producción de bosones W y Z en colisiones hadrónicas.
La sección eficaz del proceso $q\bar{q} \to Z \to \ell^+ \ell^-$ se puede aproximar por la siguiente expresión, donde se ha sustituido la función de Breit-Wigner por una delta de Dirac:

$$\hat{\sigma}_q(s) = \hat{\sigma}_q^0 M_Z^2 \delta(s - M_Z^2) BR(Z \to l^+ l^-)$$

siendo $\hat{\sigma}_q^0 = (\sqrt{2}/6)\pi G_F |V_q|^2$ y $|V_q|^2$ un factor que depende únicamente de $\sin^2\theta_w$. Su valor numérico es $|V_u|^2 = 0{,}573$ y $|V_d|^2 = 0{,}739$. Igualmente, para

$$q\bar{q}' \to W \to \ell\bar{\nu}_\ell$$

se tiene:

$$\hat{\sigma}_{qq'}(s) = \hat{\sigma}_{qq'}^0 M_W^2 \delta(s - M_W^2) BR(W \to \ell\bar{\nu}_\ell)$$

siendo $\hat{\sigma}_{qq'}^0 = (\sqrt{2}/3)\pi G_F |V_{qq'}|^2$ y $V_{qq'}$ un elemento de la matriz CKM.
a) A partir de las expresiones anteriores, calcular el cociente:

$$R = \sigma(p\bar{p} \to W \to \ell\bar{\nu}_l)/\sigma(p\bar{p} \to Z \to \ell^+\ell^-)$$

a partir de las funciones de luminosidad correspondientes. (Para la sección eficaz de W, sumar las contribuciones de W^+ y W^-).
b) Utilizando las funciones de estructura EHQL, obtener el valor numérico de R para $\sqrt{s} = 630$ GeV, y comparar con las siguientes medidas:

detector	$\sqrt{s}$ (GeV)	R
UA1	630	$9{,}5 \pm 1{,}1$
UA2	630	$10{,}4 \pm 0{,}7$

11.8. Reglas de suma.
Demostrar las siguientes reglas de suma (llamadas de Gotfried, Adler y Gross-Lewellyn Smith, respectivamente):

$$S_G = \int_0^1 \frac{dx}{x}(F_2^{ep} - F_2^{en}) = 1/3$$

$$S_A = \int_0^1 \frac{dx}{x}(F_2^{\nu p} - F_2^{\nu n}) = 2$$

$$S_{GLS} = \int_0^1 dx\, \frac{1}{2}(F_3^{\nu N} + F_3^{\bar{\nu} N}) = 3$$

siendo F_2 y F_3 los factores de forma que se obtienen en la difusión inelástica de electrones o neutrinos sobre nucleones.

11.9. Dependencia en energía de α.
Utilizando la ecuación de evolución de la constante electromagnética α, determinar $\alpha(M_Z)$ a partir de $\alpha(2m_e)$=1/137.
Datos: $m_e = 0{,}5$ MeV, $m_\mu = 100$ MeV, $m_\tau = 1{,}8$ GeV, $m_u = m_d = 100$ MeV, $m_s = 300$ MeV, $m_c = 1{,}2$ GeV, $m_b = 4{,}4$ GeV, $M_Z = 91$ GeV.

11.10. Dependencia en energía de α_s.
Dibujar la curva de evolución de la constante α_s entre 100 MeV y 100 GeV, utilizando la expresión de QCD en primer orden.
Datos: $m_u = m_d = 100$ MeV, $m_s = 300$ MeV, $m_c = 1{,}2$ GeV, $m_b = 4{,}4$ GeV, $M_Z = 91$ GeV y $\alpha_s(M_Z) = 0{,}12$.

11.11. Valor experimental de α_s.
a) Determinar el valor experimental de α_s a partir de las medidas experimentales de los siguientes observables y los desarrollos perturbativos correspondientes:

$$\Gamma\tau, \quad R_{had}(10 \text{ GeV}) \quad \text{y} \quad \Gamma_Z$$

b) Determinar el valor correspondiente a la escala de energía M_Z utilizando la ecuación de evolución de α_s en primer orden y discutir si los valores obtenidos son compatibles entre ellos.

11.12. Sucesos de 3 *jets* en colisiones e^+e^-.
a) Identificar en el diagrama de Dalitz del proceso $e^+e^- \to q\bar{q}g$ la región de integración que corresponde a las condiciones:

$$M_{qg}^2 > ys \qquad M_{\bar{q}g}^2 > ys \qquad (0 < y < 1)$$

b) Demostrar que al integrar sobre dicha región se obtiene la siguiente fracción de sucesos con 3 *jets*:

$$R_3(y) = \frac{2\alpha_s}{3\pi}\left[2\text{Log}^2 y + (1-y)(1-3y)\text{Log}\left(\frac{y}{1-y}\right) + 4Li_2(y) + \frac{5}{2}(1-2y) - \frac{\pi^2}{3}\right]$$

donde la función dilogaritmo se define como:

$$Li_2(x) = -\int_0^x \frac{\mathrm{Log}(1-t)}{t} dt$$

y verifica la relación: $Li_2(y) + Li_2(1-y) = -\mathrm{Log}(y)\mathrm{Log}(1-y) + \pi^2/6$.
c) Obtener el límite de $R_3(y)$ para $y \to 0$ y discutir para qué valores de y es válida la fórmula deducida en el apartado **b)**.

11.13. Unificación de las constantes de acoplo.
a) Tomando como estados fundamentales para la primera generación de fermiones en una teoría de gran unificación las siguientes partículas: ν_{L}, e_{L}, u_{L}, d_{L}, e_{R}, u_{R} y d_{R}, demostrar que la condición de normalización de los generadores del grupo:

$$\alpha_{em} \sum_f e_f^2 = \alpha_s \sum_f C_f^2 = \alpha_w \sum_f (I_3)_f^2$$

implica la relación $8/3 \cdot \alpha_{em} = \alpha_s = \alpha_w$ a la escala de unificación.
Nota: Para los tripletes de color, tomar $C_f = -1/2, 0, +1/2$.
b) A partir de la ecuación de evolución de las constantes de acoplo:

$$\frac{1}{\alpha(M)} - \frac{1}{\alpha(m)} = 2\beta \mathrm{Log}\frac{M}{m}$$

y sabiendo que para n_g generaciones de fermiones se tiene:

$$\beta_s = \frac{1}{4\pi}\left(11 - \frac{4}{3}n_g\right) \qquad \beta_w = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{22}{3} - \frac{4}{3}n_g\right) \qquad \beta_{em} = \frac{1}{3\pi}\left(\frac{11}{2} - \frac{8}{3}n_g\right)$$

para las interacciones fuerte, débil y electromagnética, respectivamente, determinar la escala Λ_{gut} para la cuál se verifica $8/3 \cdot \alpha_{em} = \alpha_s$.
c) Calcular α_s, α_w y α_{em} a la escala Λ_{gut} (se recuerda que $\alpha_w = g^2/4\pi$ siendo $e = g \sin\theta_w$).
d) Suponiendo que $8/3 \cdot \alpha_{em} = \alpha_s = \alpha_w$ a la escala Λ_{gut}, determinar el valor de $\sin^2\theta_w$, primero a la escala Λ_{gut} y luego a la escala M_Z.

11.14. Desintegración del protón.
a) Calcular el número de desintegraciones $p \to e^+\pi^0$ observables en un detector de agua de 1000 toneladas, suponiendo que la toma de datos dura 1 año y que la eficacia de detección del modo considerado es 50 %. Utilizar $SU(5)$ como modelo teórico para la desintegración del protón.
b) Los productos de la desintegración del protón se observan utilizando la radiación Cherenkov de los electrones en el agua. Estimar cual es la longitud típica de un suceso de desintegración y los criterios que permitirían distinguirlo de un suceso producido por interacción de un neutrino cósmico dentro del detector.

Parte V

Física de astropartículas

12. Neutrinos y rayos cósmicos

12.1 Neutrinos solares, de reactores y atmosféricos

12.1.1 Neutrinos solares

Las interacciones de los neutrinos pueden estudiarse a partir de fuentes extremadamente variadas. El sol y las centrales nucleares son fuentes muy intensas de neutrinos, aunque la energía de los mismos es muy baja, del orden de 1-10 MeV. En la atmósfera terrestre se producen neutrinos como resultado de las interacciones de los rayos cósmicos. Los aceleradores también permiten crear haces de neutrinos. En ambos casos, el rango típico de energías es 1-100 GeV. Finalmente, en las estrellas y las galaxias lejanas pueden ocurrir fenómenos con emisión de neutrinos. La energía de los mismos puede ir desde los 10 MeV típicos de los neutrinos emitidos en una explosión de supernova hasta energías superiores a los 100 TeV para los neutrinos emitidos por núcleos galácticos activos, aunque en cualquier caso se trata de sucesos raros. En la tabla 12.1 se recogen las diversas fuentes, junto con el tipo de neutrinos emitidos y valores típicos de la energía e intensidad de las emisiones.

TABLA 12.1: Fuentes de neutrinos con sus características principales.

fuente	tipo de ν	rango de energía	intensidad típica
sol	ν_e	$0{,}1 - 10$ MeV	10^{11} cm^{-2}s^{-1}
reactor	$\bar{\nu}_e$	$1 - 10$ MeV	10^{11} cm^{-2}s^{-1}
atmósfera	$\nu_e, \nu_\mu, \bar{\nu}_e, \bar{\nu}_\mu$	$0{,}1 - 10$ GeV	10 cm^{-2}s^{-1}
acelerador	$\nu_\mu, \bar{\nu}_\mu$	$1 - 100$ GeV	10^{6} cm^{-2}s^{-1}
supernova	todo tipo	≈ 10 MeV	sucesos raros

Los neutrinos solares se producen en el ciclo de fusión del hidrógeno para producir helio. La producción de helio ocurre en varias etapas, con formación intermedia de deuterio y ^3He, según las reacciones $pp \to d\, e^+ \nu_e, pd \to {}^3He\ \gamma$ y por último $^3He\ {}^3He \to {}^4He\ p\, p$. El balance final es

$$4p \to {}^4He + 2e^+ + 2\nu_e + 2\gamma$$

siendo la energía liberada de $Q = 26{,}7$ MeV. La energía media de los neutrinos emitidos es de $< E_\nu >= 0{,}265$ MeV, luego la energía se libera principalmente en forma de fotones, concretamente se libera una cantidad de energía igual a $Q - 2 < E_\nu >$ por cada reacción de fusión. Por tanto, el flujo total de fotones emitidos es $\phi_\gamma = 2L_\odot/(Q - 2 < E_\nu >)$, siendo $L_\odot = 3{,}83\ 10^{26}\ Js^{-1}$ la luminosidad del sol. Dado que en cada reacción de fusión se emiten tantos neutrinos como fotones, el flujo de neutrinos sobre la superficie terrestre es

$$\phi_\nu = \frac{\phi_\gamma}{4\pi d^2} = \frac{2L_\odot}{Q - 2 < E_\nu >} \frac{1}{4\pi d^2} = 6{,}5\ 10^{10}\ \mathrm{cm}^{-2}\mathrm{s}^{-1}$$

siendo $d = 1{,}5\ 10^{11}\ m$ la distancia entre la Tierra y el Sol. Este flujo es enorme, pero la energía de los neutrinos ($E_\nu < 0{,}42$ MeV) es demasiado pequeña para que estos puedan ser detectados. Los neutrinos que se pueden detectar más fácilmente proceden normalmente de procesos secundarios que dan lugar a neutrinos más energéticos pero cuyo flujo es mucho menos intenso. Se trata principalmente de los procesos

$$^7Be + e^- \rightarrow {}^7Li + \nu_e \qquad \text{y} \qquad {}^8B \rightarrow {}^8Be + e^+ + \nu_e$$

donde la energía de los neutrinos emitidos es de $E_\nu = 0{,}86$ MeV y $E_\nu < 15$ MeV, respectivamente. La figura 12.1 resume los flujos emitidos en función de la energía de los neutrinos, para las principales reacciones solares.

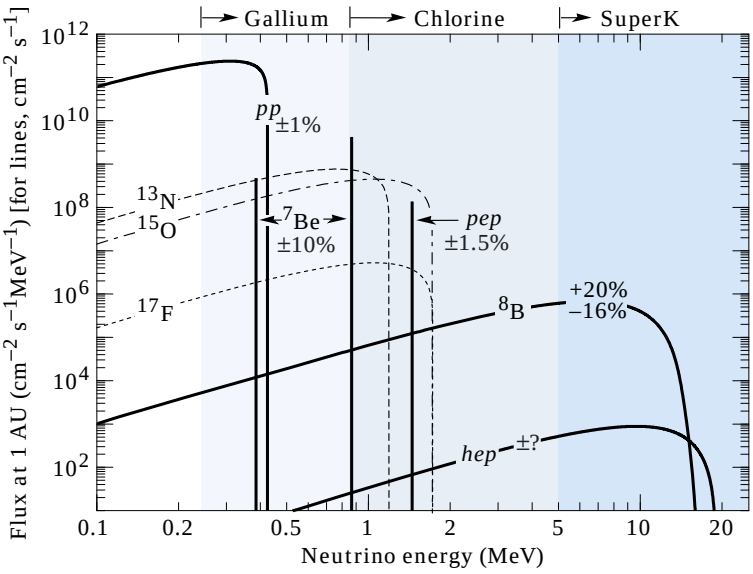


Figura 12.1: Flujo de neutrinos solares en función de la energía, para los principales procesos de emisión. *Fuente*: PDG2002, *Phys. Rev.,* **D66** (2002) 010001.

Es importante resaltar que el sol es una fuente de ν_e y no de $\bar{\nu}_e$, lo cual complica notablemente las técnicas de detección. En efecto, los ν_e interaccionan con los neutrones según el proceso

$$\nu_e + n \rightarrow p + e^-$$

pero la energía de los neutrinos considerados es normalmente muy inferior a la energía de ligadura nuclear, luego la probabilidad de interacción es muy reducida. Se han utilizado los siguientes procesos para detectar neutrinos solares:

$$\nu_e + {}^{37}Cl \rightarrow {}^{37}Ar + e^- \qquad \text{y} \qquad \nu_e + {}^{71}Ga \rightarrow {}^{71}Ge + e^-$$

cuyos umbrales son de 0,81 MeV y 0,23 MeV, respectivamente. En el experimento pionero en la detección de neutrinos solares (Davis, 1965) se utilizó el primero de estos procesos. En este experimento (HOMESTAKE), se han observado, por tanto, principalmente los neutrinos procedentes de la desintegración de ${}^8B$, con una contribución menor de la reacción del ${}^7Be$. Este experimento pertenece a la categoría de experimentos llamados radioquímicos y ha funcionado ininterrumpidamente durante cerca de 30 años en una antigua mina de oro situada en South Dakota (EEUU). Los núcleos de ${}^{37}Ar$ se detectan gracias a su desintegración radiactiva con semivida característica de 34 d. El número de sucesos observados es de aproximadamente $0{,}5$ por día. Más recientemente, los experimentos GALLEX (Gran Sasso, Italia) y SAGE (Baksan, Cáucaso) han sido capaces de detectar los neutrinos procedentes del proceso de fusión primario, utilizando un detector de galio cuyo umbral es de sólo 0,23 MeV. El flujo de estos neutrinos es bastante superior, como puede comprobarse en la figura 12.1, y además este flujo puede calcularse con mayor fiabilidad. Los núcleos de ${}^{71}Ge$ se detectan igualmente por un procedimiento radioquímico, siendo la semivida en este caso de 11 d.

El experimento KAMIOKANDE (Japón), consistente en un tanque con inicialmente 2000 Tm de agua, también ha sido capaz de detectar neutrinos solares, esta vez mediante el proceso de difusión sobre los electrones atómicos

$$\nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^-$$

que ocurre por intercambio de W (corriente cargada), con una contribución menor del Z (corriente neutra). En este experimento, los electrones difundidos se detectan gracias a la radiación Cherenkov emitida en el agua, y esto implica en la práctica un umbral de unos 7 MeV para los neutrinos incidentes. Por tanto, en este experimento se observan principalmente neutrinos solares procedentes de la desintegración de ${}^8B$. En la actualidad el experimento dispone de 50 000 Tm de agua (SUPERKAMIOKANDE), con el consiguiente incremento en el número de sucesos observados: de 1 suceso/día procedente de neutrinos solares en KAMIOKANDE, se ha pasado a unos 10 sucesos/día en SUPERKAMIOKANDE. La técnica de detección utilizada en este experimento tiene la desventaja del valor elevado en el umbral de detección, pero por otra parte tiene la ventaja

de permitir la reconstrucción de la dirección del neutrino incidente, lo cual no es posible en los experimentos radioquímicos antes citados. Es interesante observar que el experimento KAMIOKANDE fue concebido originalmente para el estudio de la desintegración del protón, y resulta, por tanto, digno de resaltar que se hayan podido obtener resultados en un campo tan distinto como el de las interacciones de los neutrinos solares o atmosféricos. El umbral de detección de electrones en las colisiones $\nu_e e^- \rightarrow \nu_e e^-$ puede reducirse considerablemente si en vez de agua se utiliza centelleador líquido, como en el experimento BOREXINO actualmente en fase de preparación en el laboratorio subterráneo del Gran Sasso (Italia).

Es un hecho notable que todos estos experimentos han observado flujos de neutrinos inferiores en aproximadamente un 50 % a las predicciones teóricas, basadas en modelos estelares que permiten determinar la composición interna y evolución del sol. Durante mucho tiempo, esta discrepancia dio lugar al llamado "problema de los neutrinos solares". Actualmente se admite que el déficit de neutrinos solares es simplemente una manifestación del fenómeno de la oscilación de los neutrinos. Un resultado clave en la solución del problema ha sido la observación reciente (a partir de 2001) por el experimento SNO, consistente en un tanque de 1000 Tm de agua pesada (D_2O), de las interacciones de los neutrinos sobre deuterio. En efecto, el deuterio es un estado pn débilmente ligado que puede interaccionar con neutrinos solares con energía $E_\nu > 2{,}2$ MeV. Estas interacciones pueden producirse tanto por corriente cargada como por corriente neutra

$$\nu_e + d \rightarrow e^- + p + p \qquad \text{y} \qquad \nu_x + d \rightarrow \nu_x + p + n$$

resultando en ambos casos en la disociación del núcleo de deuterio. La señal se detecta en el primer caso mediante la emisión Cherenkov de un electrón y en el segundo mediante la captura radiativa del neutrón. En el caso de la interacción por corriente neutra son observables todas las especies de neutrinos, y no sólo ν_e. Al ser el flujo de ν_e detectado de esta forma inferior al de ν_x, el déficit de ν_e se puede explicar como una transición $\nu_e \rightarrow \nu_x$ ocurrida entre el punto de emisión y el punto de detección.

12.1.2 Neutrinos de reactores

Los reactores nucleares son una importante fuente de neutrones y, por tanto, de antineutrinos electrónicos procedentes de la desintegración β^- de éstos y de otros fragmentos de fisión ricos en neutrones. En un reactor típico de uranio enriquecido (^{235}U) se producen en media $N_{\bar{\nu}} = 6{,}1$ antineutrinos por fisión, y en cada fisión se libera una energía de $\Delta E = 204$ MeV. Por tanto, el flujo de neutrinos producido por una planta nuclear con una potencia de $P = 1\ GW$ es, a una distancia $d = 100\ m$ del reactor,

$$\phi_{\bar{\nu}} = \frac{N_{\bar{\nu}} P}{\Delta E} \frac{1}{4\pi d^2} = 1{,}6\ 10^{11}\ \text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$$

Se trata, por tanto, de un flujo considerable, comparable al de los neutrinos solares. El espectro de los antineutrinos está en un rango $1 - 10$ MeV y se conoce con precisión. Desde el punto de vista experimental, lo más relevante es que en la desintegración β^- del neutrón ocurre el proceso

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

y, por tanto, se producen antineutrinos y no neutrinos como en el caso solar, lo cual facilita considerablemente la detección de los mismos. En efecto, mientras los neutrinos solares interaccionan en este rango de energía únicamente con neutrones, los antineutrinos reaccionan con los protones en la forma

$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$$

y, por tanto, pueden ser detectados utilizando un material que contenga protones cuasi-libres, es decir, protones ligados por energía de ligadura molecular, que puede despreciarse al ser muy inferior a la energía de los neutrinos. En una molécula de agua (H_2O), 2 de los 10 protones pueden considerarse cuasi-libres, y la relación es todavía más favorable en ciertos compuestos orgánicos como el centelleador líquido.

El experimento pionero en la detección de antineutrinos procedentes de reactores fue llevado a cabo por Cowan y Reines en 1953 utilizando la central nuclear de Savannah River (South Carolina, EEUU). En este experimento, la señal consistía en 3 fotones en coincidencia, 2 de ellos procedentes de la aniquilación del positrón, y el tercero de la captura radiativa del neutrón en cadmio. Esta técnica es básicamente la misma que se ha utilizado en todos los experimentos posteriores. En el experimento efectuado en la central nuclear de BUGEY (Jura, Francia) se han utilizado 3 detectores de 600 l de centelleador líquido situados a distancias inferiores a 100 m de la central, tal como muestra la figura 12.2. El flujo observado es de unos 50 sucesos de interacción por hora en el detector A con los dos reactores de $2{,}8$ GW encendidos (compárese con los 3 sucesos/hora del experimento de Cowan y Reines con 200 l de agua). Las medidas han de efectuarse a varias distancias para calibrar adecuadamente el flujo de antineutrinos.

En el experimento efectuado en la central nuclear de CHOOZ (Ardenas, Francia) con dos plantas nucleares de $P = 4{,}2$ GW cada una, se ha empleado un detector de 5 Tm de centelleador líquido situado a una distancia de 1 km de la central. El número de sucesos observado es en este caso de unos 25 diarios. Otros experimentos similares han sido efectuados en las centrales de GOESGEN (Suiza) y PALO VERDE (California, EEUU). En todos estos experimentos se ha buscado una disminución en el flujo observado de $\bar{\nu}_e$ superior al simple factor geométrico $1/d^2$, siendo d la distancia d al reactor. Esta disminución adicional sería una señal de la existencia de oscilaciones del tipo $\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_x$, pero no ha sido observada por ninguno de los experimentos anteriores. Más recientemente (a partir de 2002) el experimento KAMLAND situado en la mina de Kamioka en Japón ha observado una señal compatible con la existencia de la oscilación

antes mencionada. En este experimento se pretende observar el flujo procedente de una veintena de plantas nucleares situadas en Japón y Corea, a una distancia media de unos 180 km. La potencia total de estas plantas suma unos 175 GW y el flujo de antineutrinos esperado en el lugar donde se encuentra el detector es de aproximadamente 10^7 cm^{-2}s^{-1}. Teniendo en cuenta que el detector consiste en 1000 Tm de centelleador líquido, el número de sucesos esperado en este experimento es de unos 1000 por año. Dado que las medidas se efectúan para un único valor de d, es importante tener en este caso una estimación precisa del flujo teórico de neutrinos.

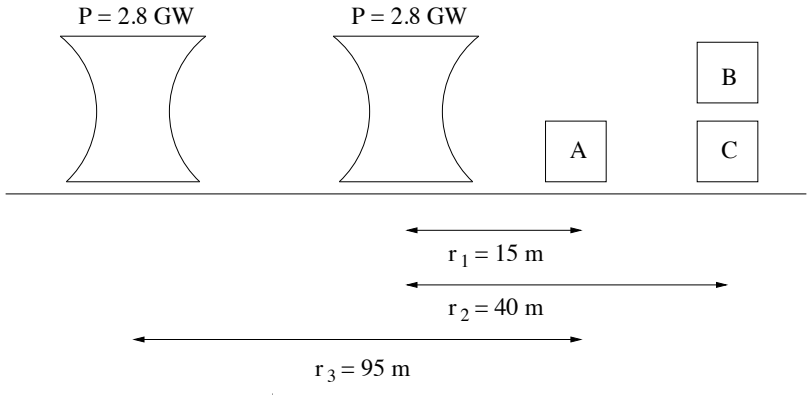


Figura 12.2: Dispositivo experimental del experimento de Bugey.

12.1.3 Neutrinos atmosféricos

Los neutrinos atmosféricos se producen como consecuencia de la interacción de los rayos cósmicos primarios con la atmósfera. Los rayos cósmicos primarios, normalmente protones que pueden ser muy energéticos, inician cascadas hadrónicas con aparición de numerosos piones (véase figura 12.3). Los piones cargados se desintegran en muones, que a su vez se desintegran en electrones, con aparición de neutrinos:

$$\pi^- \to \mu^- \bar{\nu}_\mu \to e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu \bar{\nu}_\mu \qquad \text{y} \qquad \pi^+ \to \mu^+ \nu_\mu \to e^+ \nu_e \bar{\nu}_\mu \nu_\mu$$

A partir de estas desintegraciones se llega a la conclusión de que el cociente entre neutrinos muónicos y neutrinos electrónicos es

$$R = N(\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu)/N(\nu_e + \bar{\nu}_e) = 2$$

suponiendo naturalmente que todos los muones producidos se desintegran, lo cual no es estrictamente cierto para muones de muy alta energía, pero se trata, en todo caso, de un efecto que se puede corregir fácilmente. El espectro de los neutrinos se halla en el rango típico de $0{,}1 - 10$ GeV, aunque naturalmente

está muy picado a bajas energías. Los neutrinos con energía por debajo de 100 MeV carecen de interés ya que por debajo del umbral de creación de muones no se pueden detectar. El flujo a nivel del mar es $\phi_\nu \approx 10$ cm^{-2}s^{-1}, integrando sobre todas las especies, ángulos y energías.

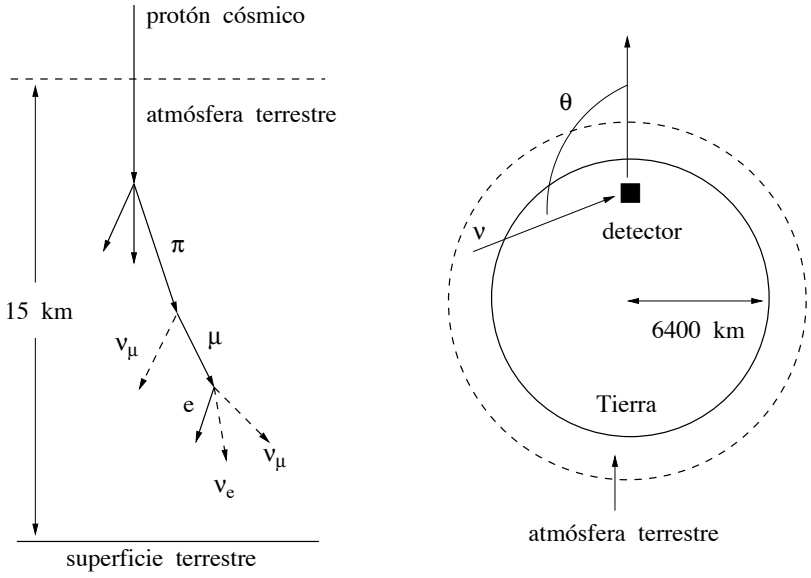


Figura 12.3: Formación de neutrinos en las cascadas hadrónicas que se producen en la atmósfera y definición del ángulo θ entre la dirección del neutrino incidente y la dirección polar.

La detección experimental de los neutrinos atmosféricos con energía superior a 100 MeV es mucho más sencilla que la de los neutrinos solares o procedentes de centrales nucleares. En efecto, la energía de estos neutrinos permite despreciar las fuerzas de ligadura nucleares y, por tanto, se producen con secciones eficaces detectables todos los procesos siguientes:

$$\nu_e n \to e^- p \quad , \quad \nu_\mu n \to \mu^- p \quad , \quad \bar{\nu}_e p \to e^+ n \quad \text{y} \quad \bar{\nu}_\mu p \to \mu^+ n$$

con aparición de electrones y muones observables en el estado final. Estos electrones y muones constituyen de hecho el principal fondo contaminante de los experimentos sobre desintegración del protón llevados a cabo a partir de 1980. Estos experimentos permiten la identificación de electrones y muones mediante la técnica de la radiación Cherenkov en agua (KAMIOKANDE, IMB), o bien mediante técnicas calorimétricas (FREJUS, NUSEX, SOUDAN). Todos estos experimentos consisten en grandes masas de material situados a gran profundidad para protegerse del fondo de muones cósmicos. El experimento IMB, por

ejemplo, consiste en 6900 Tm de agua y está situado en una mina en el estado de Cleveland (EEUU) a una profundidad de 1570 $m.w.e$ (metros de agua equivalentes). El experimento SOUDAN, con 960 Tm de hierro, se construyó en una mina del estado de Minnesota (EEUU) a una profundidad de 2100 $m.w.e$. El número de sucesos observados ha sido de unos 100 anuales en el experimento KAMIOKANDE, con 2000 Tm de agua, incrementándose hasta aproximadamente 2000 anuales en SUPERKAMIOKANDE con 50 000 Tm.

La mayoría de estos experimentos observaron anomalías en los flujos de neutrinos medidos en relación con las predicciones teóricas. En particular, el cociente R entre el número de neutrinos muónicos y electrónicos resultaba ser inferior al valor esperado en aproximadamente un 50 %. Esta discrepancia constituyó el llamado "problema de los neutrinos atmosféricos", y sólo fue resuelta de forma convincente cuando SUPERKAMIOKANDE logró acumular suficiente número de sucesos para poder determinar la distribución angular de los neutrinos. En efecto, los neutrinos observados pueden proceder de cualquier dirección, pero los que llegan desde arriba recorren distancias típicas de unos 15 km, mientras que los que llegan desde abajo han de recorrer distancias comparables al radio terrestre (6400 km). Dado que la oscilación de neutrinos es un fenómeno dependiente de la distancia recorrida, es de esperar la aparición de un efecto angular en los flujos observados de neutrinos electrónicos y muónicos. La figura 12.4 muestra los flujos medidos en función del ángulo θ definido en la figura 12.3.

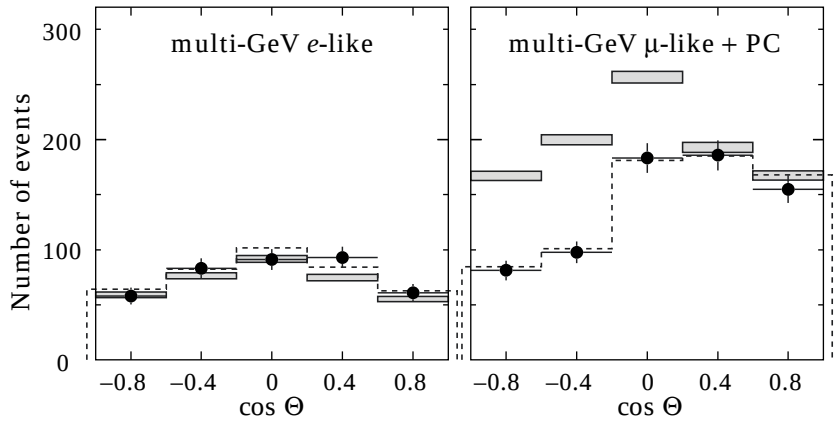


Figura 12.4: Distribución angular de los neutrinos electrónicos (izquierda) y muónicos (derecha) observados por SUPERKAMIOKANDE en función de la dirección θ respecto al ángulo polar. Sobre los datos experimentales aparece la predicción teórica suponiendo que no hay oscilación (rectángulos grises) y suponiendo una oscilación que ajuste los datos experimentales de forma óptima (línea discontinua). *Fuente*: PDG2002, *Phys. Rev.*, **D66** (2002) 010001.

Los neutrinos con $\cos\theta = 1$ son los que recorren menos distancia, mientras que los neutrinos con $\cos\theta = -1$ recorren unos 12 800 km antes de ser detectados. Puede observarse claramente en la figura un déficit de neutrinos muónicos que aumenta con la distancia recorrida, mientras que el flujo de neutrinos electrónicos corresponde con la predicción teórica. El resultado se puede, por tanto, interpretar como una oscilación $\nu_\mu \to \nu_x$, siendo ν_x posiblemente el neutrino del τ. Dado que la oscilación $\nu_e \to \nu_x$ ocurre sobre distancias muchos mayores, tal como sugieren los datos solares, no es de esperar ninguna desviación notable en el flujo de neutrinos electrónicos.

12.2 Neutrinos de aceleradores

Los aceleradores de protones permiten construir haces intensos de neutrinos según una técnica desarrollada a partir de los años 1960. En el SPS del CERN, por ejemplo, con un haz primario de protones de 400 GeV, se consiguen haces de neutrinos en un rango de energía típico de 1-100 GeV, siendo el valor medio en torno a los 20 GeV. La intensidad del haz depende de la intensidad del haz primario. En el caso del SPS se utilizan pulsos de unos 10^{14} protones por cada ciclo, de unos 10 s de duración, y esto permite obtener haces de neutrinos con intensidades del orden de 10^6 cm^{-2}s^{-1} a la salida del túnel de desintegración. Es importante observar que los neutrinos proceden de las desintegraciones de mesones π y K y, por tanto, se trata predominantemente de neutrinos muónicos. La polaridad del haz secundario permite construir haces tanto de ν_μ como de $\bar{\nu}_\mu$. En el haz de ν_μ del SPS, por ejemplo, la contaminación estimada de otros neutrinos es la siguiente: $\bar{\nu}_\mu$ (7 %), ν_e (1 %), $\bar{\nu}_e$ (0,1 %) y $\nu_\tau + \bar{\nu}_\tau$ ($4\,10^{-6}$).

Los experimentos llevados a cabo con haces de neutrinos durante los años 1980 y 1990 han permitido efectuar mediciones precisas del proceso de interacción sobre nucleones $\nu_\mu N \to \mu N'$. Un exceso (no observado) de electrones finales habría sido una indicación de la oscilación $\nu_\mu \to \nu_e$. Más recientemente (a partir de 1995), los experimentos NOMAD y CHORUS han intentado observar, también sin éxito, una señal del proceso $\nu_\tau N \to \tau N'$, indicativa de la oscilación $\nu_\mu \to \nu_\tau$. Uno de los principales problemas en el estudio de la oscilación $\nu_\mu \to \nu_e$ es la presencia en los haces de ν_μ de una contaminación de ν_e. Esta contaminación puede reducirse al mínimo en aceleradores de baja energía, con protones de 800 MeV. En efecto, la interacción de estos protones con la materia produce mayor número de π^+ que de π^-. Por otra parte, la sección eficaz de captura de π^- en la materia es también mayor que la de π^+. Dado que los piones se desintegran según

$$\pi^+ \to \mu^+ \to e^+\nu_e \qquad \text{y} \qquad \pi^- \to \mu^- \to e^-\bar{\nu}_e$$

se espera una presencia reducida de $\bar{\nu}_e$ en el haz. El contenido de estos haces es de hecho $\bar{\nu}_e/\bar{\nu}_\mu \approx 10^{-3}$, un orden de magnitud inferior al valor en los haces convencionales, y permite estudiar la oscilación $\bar{\nu}_\mu \to \bar{\nu}_e$. El espectro de los $\bar{\nu}_e$

está en torno a los 10 MeV y, por tanto, las técnicas experimentales utilizadas en su detección son similares a las empleadas en los reactores nucleares. Se han llevado a cabo 2 experimentos de este tipo, LSND en el acelerador LAMPF (Los Alamos, EEUU) y KARMEN en el acelerador ISIS (RAL, Reino Unido). Los resultados de estos experimentos no han sido conclusivos.

En la actualidad, los experimentos de oscilación con aceleradores se centran en la búsqueda de la oscilación $\nu_\mu \rightarrow \nu_x$ sobre distancias mucho mayores a las empleadas hasta ahora, de varios cientos de kilómetros. Existen dos formas de detectar la oscilación: observando una disminución en el flujo de ν_μ con la distancia, para lo cual se requiere un primer detector próximo, y observando la aparición de ν_τ en el detector lejano, para lo cual se requiere una técnica adecuada que permita la reconstrucción del vértice secundario producido por la desintegración de un leptón τ. Existen 3 de estos proyectos en curso, cuyas principales características aparecen en la tabla 12.2.

TABLA 12.2: Principales proyectos en curso con haces de neutrinos creados mediante un acelerador.

nombre del proyecto	origen del haz	destino del haz	energía del haz primario	L(km)
K2K	KEK	mina Kamioka	12 GeV	250
NUMI	FNAL	mina Soudan	120 GeV	730
CNGS	CERN	Gran Sasso	400 GeV	732

En el proyecto K2K, el único que dispone actualmente de datos, el haz de neutrinos se dirige sobre el experimento SUPERKAMIOKANDE situado en la mina de Kamioka, a 225 km de distancia (véase figura 12.5).

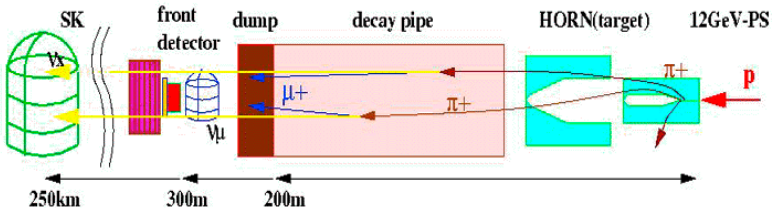


Figura 12.5: Dibujo esquemático del haz de neutrinos del proyecto K2K. El haz se produce en el laboratorio KEK y se dirige hacia el detector SUPERKAMIOKANDE, en la mina de Kamioka, a 250 km de distancia. Una primera medida del flujo de neutrinos se realiza en el detector frontal. *Fuente*: proyecto K2K.

Este detector únicamente permite la identificación de electrones y muones, pero por otra parte la energía media de los neutrinos, del orden de 1 GeV, tampoco permite la creación de leptones τ al interaccionar con el agua del detector.

La aparición de leptones τ es posible tanto en el proyecto CNGS (experimentos ICARUS y OPERA) como en el de FNAL (experimento MINOS), aunque aquí el problema reside en la baja intensidad de las interacciones previstas. En el proyecto CNGS, por ejemplo, teniendo en cuenta la divergencia prevista del haz, se espera un flujo de ν_μ del orden de 1 $\mathrm{cm}^{-2}\mathrm{s}^{-1}$ en el punto de destino, lo cual significa unos 2600 sucesos de tipo $\nu_\mu N \to \mu N'$ por año y kTm de detector.

12.3 Neutrinos de supernova

Una explosión de supernova (SN) constituye uno de los fenómenos astrofísicos más espectaculares que puedan ser observados, siempre que sea visible desde la Tierra. Se trata sin embargo de un suceso particularmente raro. Ha quedado constancia de unas 6 explosiones, llamadas 'históricas', ocurridas en los últimos 1000 años, cuyas características principales se resumen en la tabla 12.3.

TABLA 12.3: Explosiones de supernova 'históricas'.

año	constelación	magnitud	denominación
1006	Lupus	-9(?)	SN-1006
1054	Taurus	-5	M1 (Cangrejo)
1181	Cassiopeia	+0	3C58
1572	Cassiopeia	-4	SN de Tycho
1604	Ophiucus	-3	SN de Kepler
1667(?)	Cassiopeia	+6(?)	Cas-A

Todas estas explosiones han dejado remanentes en forma de nebulosas, y en algún caso excepcional como M1 (Nebulosa del Cangrejo) puede observarse igualmente un púlsar en el lugar de la explosión. El objeto conocido como Cas-A es una fuente intensa de rayos X (sólo superada por la radiación solar) y existe la duda sobre si la explosión fue realmente observada (en cuyo caso la fecha de la observación sería 1680). Las nebulosas formadas en estas explosiones han sido localizadas en la actualidad con precisión gracias a detectores de rayos X instalados en satélites (CHANDRA, ROSAT, etc.). Estos satélites han observado igualmente remanentes más antiguos, entre los cuales los objetos conocidos como 'Vela' o 'Cygnus Loop', procedentes de explosiones ocurridas hace más de 10 000 años. Todas estas explosiones históricas han ocurrido dentro de la galaxia en la cual se encuentra el sistema solar (Vía Láctea, VL) y, por tanto, la frecuencia de estas explosiones en la VL puede estimarse en 1 cada 100 años, aunque naturalmente han podido ocurrir otras no visibles desde la Tierra.

La explosión de 1604 fue la última realmente observada desde la Tierra. Aunque su evolución fue estudiada con detalle por Kepler, esta observación es anterior a la invención del telescopio, efectuada por Galileo tan sólo unos años después. La era moderna en lo que respecta a la observación de explosiones de

SN se inicia con la observación por primera vez , gracias a potentes telescopios, de una explosión ocurrida en una galaxia distinta a la VL: se trata de la SN conocida como SN-1885A, ocurrida en 1885 en Andrómeda (M31), que llegó a alcanzar una magnitud aparente de $+6$. Desde entonces han sido observadas más de 2000 explosiones. La mejora de las técnicas de observación permiten por otra parte un incremento continuo en el número de sucesos observados, como puede comprobarse en la tabla 12.4.

TABLA 12.4: Explosiones de SN observadas en los últimos 1000 años.

periodo	duración	SN observadas
1000-1900	900 años	9
1900-1950	50 años	50
1950-1990	40 años	673
1990-2000	10 años	927
2000-2002	2 años	469

La mayoría de estas explosiones ocurren en galaxias muy distantes. Las únicas ocurridas con magnitud aparente inferior o igual a $+10$ se resumen en la tabla 12.5

TABLA 12.5: Explosiones de SN recientes con magnitud aparente inferior a 10.

SN	magnitud	tipo	galaxia	distancia (Mly)
1885A	$+7{,}1$	Ia	M31	$2{,}6$
1895B	$+8{,}3$	Ia	NGC5253	$11{,}7$
1937C	$+8{,}8$	Ia	IC4182	≈ 10
1954A	$+9{,}3$	Ib	NGC4214	$13{,}4$
1972E	$+8{,}5$	Ia	NGC5253	$11{,}7$
1987A	$+4{,}8$	II	GNM	$0{,}15$
1993J	$+10{,}8$	II	M81	$12{,}0$

Entre todas estas explosiones, la más notable es sin duda SN-1987A, ocurrida en la gran nube de Magallanes (GNM) a tan sólo 150 000 años-luz (50 kpc) de la Tierra. Junto con SN-1885A, es la única ocurrida en una de las galaxias del llamado 'Grupo Local' de la VL. Además de las notables observaciones astrofísicas que pudieron efectuarse, SN-1987A tiene un interés particular en el campo de la física de partículas, al haber sido detectado el fenómeno de emisión de neutrinos que según los modelos existentes ha de acompañar este tipo de explosiones. La explosión fue descubierta en el observatorio de Las Campanas (Chile) el 24 de febrero de 1987 tras examinarse unas placas fotográficas, y en ese momento la magnitud estaba entre 6 y 7, con lo cual el fenómeno era observable a simple vista desde el hemisferio sur. Posteriormente alcanzaría una magnitud por debajo de 5. La estrella que había explotado fue identificada como

una supergigante azul de unas 15 $M_\odot$. La presencia de hidrógeno en el espectro reveló que se trataba de una explosión de tipo II. La expansión de la nebulosa resultante y las diversas radiaciones emitidas han sido estudiadas hasta la fecha con todo tipo de instrumentos, tanto terrestres como desde satélites. Hasta el momento no se ha detectado la presencia de ningún remanente compacto (púlsar). Una emisión de neutrinos fue observada por los experimentos IMB y KAMIOKANDE (ambos detectores de agua) y tal vez por otros dos detectores de centelleador líquido (en los observatorios de Baksan y Mont Blanc). Las observaciones se resumen en la tabla 12.6.

TABLA 12.6: Observaciones de neutrinos relativas a la supernova 1987A.

detector	masa	tipo detector	sucesos
Kamioka	2,1 kT	agua	11
IMB	5,0 kT	agua	8
Baksan	0,13 kT	cent. líquido	3
Mont Blanc	0,09 kT	cent. líquido	2

Un hecho notable es que el tiempo estimado de la emisión de los neutrinos es anterior en unas 2 horas al momento en el que se supone que debieron producirse las primeras emisiones luminosas. A partir de los sucesos observados por los detectores de agua (véase figura 12.6) puede estimarse que los neutrinos fueron emitidos en un pulso de unos 10 s de duración, y que la energía media de los neutrinos era de unos 10 MeV.

Hay que tener en cuenta que, dado el rango de energía de los neutrinos considerados, lo que se observa realmente es el proceso $\bar{\nu}_e p \rightarrow n e^+$, similar al de los neutrinos de las centrales nucleares, pero con una energía para los neutrinos algo superior. Este hecho permite la identificación de los sucesos a partir del positrón emitido. El número de sucesos observados, teniendo en cuenta que únicamente son observables los $\bar{\nu}_e$, es compatible con el número esperado según los modelos teóricos de explosiones de SN. El hecho de que el umbral de detección era de unos 25 MeV para IMB, muy por encima de los 7 MeV de KAMIOKANDE, explica el menor número de sucesos observados por el primer detector, a pesar de ser su masa superior.

En una explosión de SN se libera en forma de luz visible una cantidad enorme de energía, del orden de $10^{50}\ erg$, repartida a lo largo de varios meses, aunque el pico de luminosidad se alcanza algunos días después de la explosión. En el momento de mayor brillo, la luminosidad de la SN es del orden de 10^{43} erg/s, es decir, 10^{10} veces la luminosidad solar y, por tanto, comparable a la luminosidad de toda una galaxia. Ya desde los primeros trabajos teóricos sobre este fenómeno (Baade y Zwicky, 1934), esta energía tan enorme se asociaba a la energía de ligadura de una estrella de neutrones, un objeto puramente hipotético introducido por Landau tras el descubrimiento del neutrón en 1932. En 1960, Hoyle y Fowler proponen un mecanismo alternativo de generación de energía: la

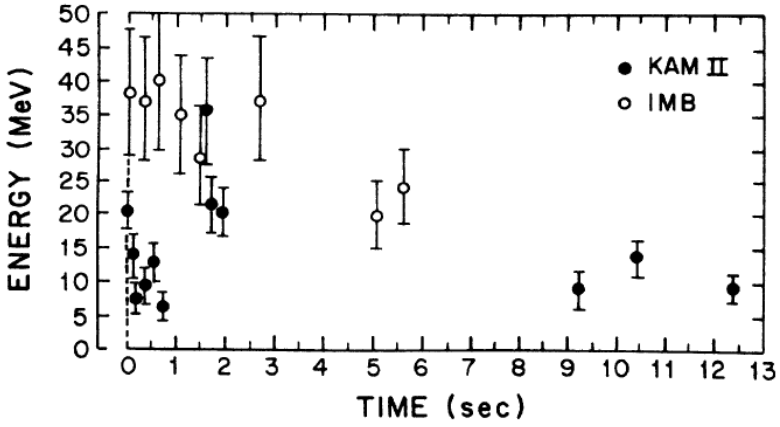


Figura 12.6: Espectro y tiempo de llegada de los neutrinos procedentes de SN-1987A, según las medidas efectuadas por los detectores IMB y KAMIOKANDE. *Fuente*: *Phys. Rev.*, **D38** (1988) 448.

fusión del núcleo de carbono de la estrella para producir elementos más pesados. En la actualidad se admite que el mecanismo de Hoyle-Fowler es el responsable de la explosiones de tipo Ia, mientras el mecanismo de Baade-Zwicky explica todas las demás explosiones (Ib, Ic y II). La clasificación del tipo de explosión es puramente espectroscópica y se basa en la existencia de hidrógeno, silicio y helio en los espectros de la luz emitida, según se indica en la tabla 12.7.

TABLA 12.7: Tipos de explosiones de supernova.

hidrógeno	silicio	helio	tipo de SN
si			II
no	si		Ia
	no	si	Ib
		no	Ic

Las explosiones de tipo Ia presentan curvas de luz y luminosidades absolutas prácticamente idénticas, motivo por el cual se pueden utilizar incluso para medir distancias. La estrella desaparece tras la explosión sin dejar ningún remanente compacto. Las demás explosiones (Ib, Ic y II) presentan curvas de luz mucho más variables, son menos luminosas que las de tipo Ia, y dan lugar a la aparición de un remanente compacto.

Según las teorías actuales, las estrellas con masa inferior a unas 8 $M_\odot$ acaban su ciclo de vida produciendo a partir de la combustión de los elementos más ligeros (H y He) un núcleo de carbono con una masa inferior a $1{,}4\ M_\odot$

(masa de Chandrasekhar). Este núcleo es estable y la estrella formada se llama 'enana blanca'. Si la masa inicial es superior a 8 $M_\odot$, la combustión prosigue tras la creación del carbono, formándose un núcleo de hierro de masa superior a la masa de Chandrasekhar y, por tanto, muy inestable. Este núcleo colapsa formándose una estrella de neutrones con una masa de aproximadamente 1 $M_\odot$ y un radio de 10 km. La energía de ligadura gravitacional de este objeto es de unos 10^{53} erg, es decir, el 10 % de su masa, y ha de liberarse de forma explosiva, dando lugar de esta forma a una SN de tipo Ib, Ic o II, según la abundancia de los elementos presentes en las capas externas de la estrella. La parte visible de la explosión ocurre al llegar la onda de choque producida en el núcleo de la estrella a las capas exteriores, pero esta parte visible en forma de luz supone una fracción muy pequeña de la energía total liberada (del orden de 10^{-4}). El 99 % de la energía se libera en forma de neutrinos, únicas partículas que pueden desplazarse dentro del núcleo de la estrella, cuya densidad es del orden de 10^{14} g/cm^3. Se pueden producir todas las especies de neutrinos y antineutrinos, aproximadamente en igual número. La energía media de estos neutrinos se puede estimar en unos 10 MeV. Las supernovas de tipo Ia se producen en los sistemas binarios, cuando el núcleo de una enana blanca se desestabiliza por acreción de materia de la estrella compañera. En tal caso la combustión del núcleo de carbono prosigue, pero únicamente hasta la creación de silicio. Esta combustión es igualmente explosiva (se liberan unos 10^{53} erg, principalmente en forma de luz), pero la estrella desaparece sin dejar remanente compacto y, en todo caso, sin emisión de neutrinos.

El suceso SN-1987A corresponde a una explosión de tipo II y, por tanto, era de esperar que fuera acompañado de la emisión de neutrinos. La observación de estos neutrinos constituye, por tanto, una importante confirmación de las teorías que explican el fenómeno. Es interesante mencionar que una explosión similar dentro de la VL, a una distancia típica de 10 kpc, produciría una señal espectacular en algunos de los detectores de neutrinos actualmente en servicio: 8000 sucesos en SUPERKAMIOKANDE, 800 en SNO, 300 en KAMLAND, etc. El estudio de esta señal sería de gran utilidad para progresar en la comprensión del fenómeno.

12.4 Oscilaciones de neutrinos

Las anomalías observadas en los flujos de neutrinos, particularmente en el caso de los neutrinos solares y atmosféricos, apuntan hacia la existencia de un fenómeno de oscilación. Este fenómeno de oscilación se produce si los neutrinos tienen una masa no nula. Los intentos de medir directamente las masas de los neutrinos sólo han proporcionado hasta el momento límites superiores, que se recogen en la tabla 12.8. Estos límites superiores están todavía lejos de los valores que se obtienen a partir de las oscilaciones, tal como se describe a continuación.

TABLA 12.8: Límites superiores para las masas de los neutrinos.

masa	límite superior	proceso utilizado
m_{ν_e}	5 eV	${}^3H \to ({}^3He)e\nu_e$
m_{ν_μ}	170 keV	$\pi \to \mu\nu_\mu$
m_{ν_τ}	18 MeV	$\tau \to 5\pi^{\pm}\pi^0\nu_\tau$

El fenómeno de oscilación ocurre al no coincidir la base de estados propios que diagonaliza la matriz de masas en el lagrangiano libre de los neutrinos (estados ν_1, ν_2, ν_3) con la base de estados observados en la interacción débil (estados ν_e, ν_μ, ν_τ). Ambas bases de estados están sin embargo relacionadas por una transformación unitaria U:

$$|\nu_\alpha >= \sum_{i=1}^{3} U_{\alpha i}|\nu_i > \qquad (\alpha = e, \mu, \tau)$$

Esta matriz U recibe a veces el nombre de 'matriz NMS' o matriz de Maki-Nakagawa-Sakata, y juega el mismo papel que la matriz CKM para los quarks. En efecto, la matriz CKM conecta los autoestados de la matriz de masas d, s, b con los estados observados en la interacción débil d', s', b'. En el caso de los neutrinos, sin embargo, los estados producidos por interacción débil (ν_e, ν_μ, ν_τ) son estables y, por tanto, es posible estudiar su evolución temporal. Es justamente en la evolución temporal de estos estados donde ocurre el fenómeno de oscilación, es decir, de la transformación de una especie en otra. En efecto, si en el instante $t = 0$ se produce un neutrino ν_α de forma que

$$|\nu_\alpha(0) >= \sum_i U_{\alpha i}|\nu_i(0) >$$

en un instante t posterior, este estado ha evolucionado en la forma

$$|\nu_\alpha(t) >= \sum_i U_{\alpha i}|\nu_i(t) >= \sum_i U_{\alpha i}e^{-iE_i t}|\nu_i(0) >$$

siendo E_i la energía de ν_i. Esta ecuación de evolución implica que los estados ν_α oscilan, al contrario que los autoestados ν_i. La probabilidad de que un neutrino con sabor α se transforme en otro con sabor β tras un tiempo t es

$$P_{\alpha\to\beta}(t) = | < \nu_\beta|\nu_\alpha(t) > |^2 = \left|\sum_i U^*_{\beta i}U_{\alpha i}e^{-iE_i t}\right|^2$$

Dado que en todos los casos prácticos que se presentan las masas de los neutrinos son muy pequeñas frente al momento p de los mismos, se puede efectuar la aproximación

$$E_i = \sqrt{p^2 + m_i^2} \approx p\left(1 + \frac{m_i^2}{2p^2}\right) \approx E\left(1 + \frac{m_i^2}{2E^2}\right) = E + \frac{m_i^2}{2E}$$

donde implícitamente se supone que todas las especies que oscilan tienen un momento común p y energías ligeramente distintas E_i, pero cuyo valor medio E se conserva en la oscilación. Al ser E común a las 3 especies, la parte de la fase que depende de E no contribuye a la oscilación y resulta finalmente

$$\boxed{P_{\alpha\to\beta}(t) = \left|\sum_i U^*_{\beta i} U_{\alpha i} e^{-i\frac{m_i^2}{2E}t}\right|^2} \tag{12.1}$$

Esta ecuación se simplifica considerablemente para una oscilación donde únicamente sean relevantes 2 de las 3 especies. En tal caso la transformación de estados puede escribirse en la forma

$$\begin{pmatrix} \nu_\alpha \\ \nu_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}$$

ya que la matriz U depende de un único parámetro tras eliminar las fases no relevantes. La probabilidad de oscilación resulta (para $\alpha \neq \beta$)

$$P_{\alpha\to\beta}(t) = 2\sin^2\theta\ \cos^2\theta\Big[1-\cos\Big(\frac{\Delta m^2}{2E}t\Big)\Big] = \sin^2 2\theta\ \sin^2\Big(\frac{\Delta m^2}{4E}t\Big)$$

siendo $\Delta m^2 = m_1^2 - m_2^2$. Si L es la distancia recorrida por los neutrinos ($L \approx ct$), se tiene finalmente la siguiente probabilidad de oscilación en función de L, tras restablecer los factores $\hbar$ y c omitidos:

$$P_{\alpha\to\beta}(L) = \sin^2 2\theta\ \sin^2\Big[\frac{(\Delta mc^2)^2}{4E}\frac{L}{\hbar c}\Big]$$

que a efectos prácticos se puede escribir en la forma

$$\boxed{P_{\alpha\to\beta}(L) = \sin^2 2\theta\ \sin^2\Big(1{,}27\frac{\Delta m^2}{E}L\Big)} \tag{12.2}$$

a condición de expresar Δm^2, E y L en eV^2, GeV y km, respectivamente. Esta ecuación muestra claramente que la existencia de masas distintas para las diversas especies de neutrinos produce oscilaciones, y que recíprocamente la existencia de oscilaciones implica que al menos una de las masas de los neutrinos es no nula. Sin embargo, para que la oscilación sea experimentalmente observable, han de darse dos requisitos: el factor $\sin^2 2\theta$ introducido por el ángulo de mezcla ha de ser suficientemente grande, y el parámetro de oscilación $\Delta m^2 L/E$ no ha de ser muy inferior a 1. El valor mínimo del ángulo de mezcla necesario para observar oscilaciones está normalmente determinado por el número de sucesos observados (estadística), mientras que el valor mínimo de Δm^2 es característico de cada experimento y se encuentra en torno a E/L. A partir de esta observación puede establecerse una aproximación de los valores mínimos de Δm^2 (véase tabla 12.9) accesibles en los diversos experimentos que han sido descritos en las secciones anteriores.

TABLA 12.9: Valores mínimos de Δm^2 según el tipo de experimento.

fuente de ν	oscilación	E	L	Δm^2 mínimo
sol	$\nu_e \to \nu_x$	1 MeV	1.5 10^{11} m	10^{-11} eV^2
atmósfera	$\nu_\mu \to \nu_x$	1 GeV	6400 km	10^{-4} eV^2
reactor	$\nu_e \to \nu_x$	1 MeV	100 m	10^{-2} eV^2
acelerador	$\nu_\mu \to \nu_\tau$	10 GeV	1 km	10^{+1} eV^2

Es interesante observar que, por encima del valor mínimo de Δm^2, siempre ocurre una oscilación observable, pero cuanto mayor sea el valor de Δm^2 respecto al valor mínimo, más difícil resulta extraer el valor de Δm^2 a partir de los datos experimentales. En efecto, al aumentar la frecuencia de la oscilación, la probabilidad de oscilación $P_{\alpha\to\beta}(L)$ se hace insensible a L.

El análisis detallado de los resultados experimentales utilizando neutrinos solares, atmosféricos, procedentes de reactores y de aceleradores permite establecer un mapa de las regiones del plano $\sin^2 2\theta - \Delta m^2$ permitidas y excluidas, tal como muestran las figuras 12.7 y 12.8 de forma simplificada. Estos datos hacen aparecer la existencia de dos oscilaciones distintas, la de los neutrinos solares con $\Delta m^2 \approx 10^{-5} - 10^{-4}$ eV^2, y la de los neutrinos atmosféricos con $\Delta m^2 \approx 10^{-3} - 10^{-2}$ eV^2, en ambos casos con ángulos de mezcla altos.

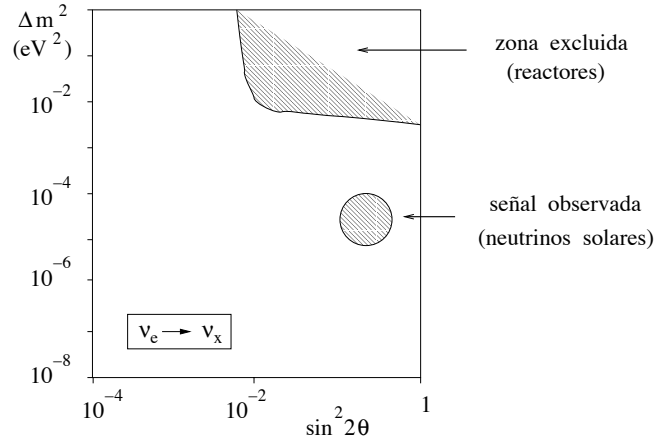


Figura 12.7: Regiones del plano $\sin^2 2\theta - \Delta m^2$ permitidas y excluidas según los datos sobre neutrinos solares y procedentes de reactores.

En el caso de la oscilación solar, el análisis se complica por la existencia de oscilaciones adicionales dentro del sol (este efecto se conoce como 'oscilaciones en la materia' o bien efecto MSW). Esto explica por qué se obtiene un valor en torno a $\Delta m^2 \approx 10^{-5}$ eV^2, muy por encima del valor de sensibilidad máxima para la oscilación solar en el vacío. La medidas efectuadas por KAMLAND

(neutrinos de centrales nucleares a una distancia $L \approx 200$ km) y por K2K (neutrinos de un acelerador a una distancia $L \approx 250$ km), confirman los resultados anteriores obtenidos a partir de neutrinos solares y atmosféricos, respectivamente. La conclusión es, por tanto, la existencia de dos oscilaciones diferenciadas, una de las cuales es muy inferior a la otra $\Delta m^2 \ll \Delta M^2$. La descripción de esta doble oscilación ha efectuarse mediante una matriz de mezcla 3×3 con 3 ángulos de mezcla θ_1, θ_2 y θ_3, y una fase ϕ, que introduce potencialmente violación de CP en el sector leptónico, de la misma forma que la matriz CKM en el sector quark. Los valores de Δm^2 y ΔM^2 obtenidos anteriormente siguen siendo válidos para la oscilación triple. Sin embargo subsisten incertidumbres sobre los valores de los los ángulos de mezcla y se desconoce igualmente si el espectro de masas de los neutrinos es de tipo 'normal' o 'invertido', según indica la figura 12.9.

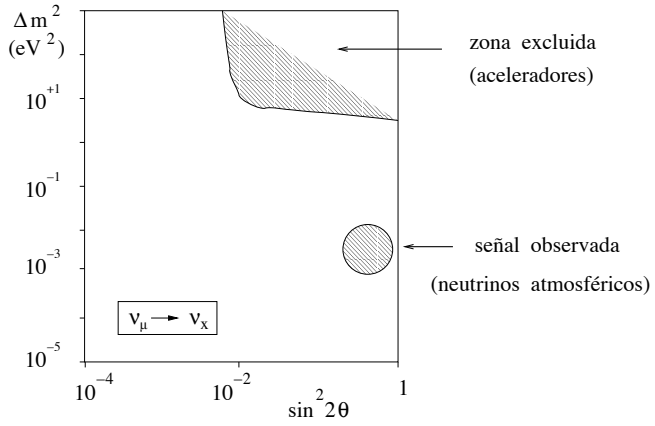


Figura 12.8: Regiones del plano $\sin^2 2\theta - \Delta m^2$ permitidas y excluidas según los datos sobre neutrinos atmosféricos y procedentes de aceleradores.

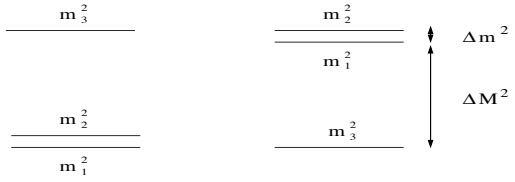


Figura 12.9: Posibles espectros de masa para los neutrinos. El primer caso se conoce como espectro normal y el segundo como espectro invertido.

12.5 Neutrinos de Majorana

Los bosones neutros pueden ser idénticos a su antipartícula (caso de π^0 o γ) o bien distintos (caso de K^0 o B^0). La cuestión es también relevante en el caso de fermiones neutros, es decir, en el caso del neutrino. Si se describe el neutrino mediante un espinor de Dirac, ν y $\bar{\nu}$ son necesariamente partículas distintas. Se puede sin embargo describir igualmente el neutrino mediante un espinor autoconjugado, también llamado 'espinor de Majorana':

$$\psi_M = \psi + \psi^c \qquad \text{siendo} \qquad \psi^c = C\psi$$

donde C es el operador de conjugación de carga. Es este caso, el neutrino es su propia antipartícula. Si el neutrino tiene masa nula, se puede demostrar que ambos formalismos son equivalentes. Si por el contrario la masa del neutrino es distinta de cero, el formalismo de Majorana puede dar lugar a fenómenos que no son posibles en el formalismo de Dirac. El más interesante de estos fenómenos es la llamada 'desintegración β doble'.

La desintegración β doble es un proceso del tipo

$$(A, Z) \rightarrow (A, Z+2) + 2e^- + 2\bar{\nu}_e$$

que puede ocurrir (aunque lógicamente con una probabilidad muy pequeña) cuando la correspondiente transición β simple está energéticamente prohibida, pero no la β doble. Un ejemplo bien conocido es la transición ${}^{130}_{52}Te \rightarrow {}^{130}_{54}Xe$ cuya existencia puede ponerse de manifiesto por la presencia de trazas de xenón en minerales de telurio con una antigüedad de unos 10^9 años. En este caso se verifica que la transición β simple ${}^{130}_{52}Te \rightarrow {}^{130}_{53}I$ es cinemáticamente imposible. Si el neutrino es idéntico a su antipartícula, según el formalismo de Majorana, puede darse igualmente el proceso

$$(A, Z) \rightarrow (A, Z+2) + 2e^-$$

sin presencia de neutrinos en el estado final. Los diagramas correspondientes a neutrinos de Dirac y de Majorana se muestran en la figura 12.10.

Desde el punto de vista experimental, los electrones producidos en el formalismo de Dirac tienen un espectro continuo, mientras que en el formalismo de Majorana la suma de las energías de los electrones emitidos es un pico cuyo valor es justamente la diferencia de masa entre el núcleo inicial y el final. En el caso del telurio no es posible medir la energía de los electrones finales, pero se han efectuado experimentos donde esta medida si es posible, utilizando ${}^{76}_{32}Ge \rightarrow {}^{76}_{34}Se$ o bien ${}^{82}_{34}Se \rightarrow {}^{82}_{36}Kr$. En el primer caso la energía de los electrones es de unos 2 MeV y su energía se puede medir en el propio cristal de germanio, que es un excelente detector de electrones. El problema es la semivida del isótopo de germanio, del orden de 10^{25} y. En el segundo caso los electrones tienen unos 3 MeV y se han podido detectar mediante una TPC de helio. La semivida del isótopo de selenio es en este caso de unos 10^{20} y. De momento ninguno de estos experimentos ha visto una señal clara de un pico de electrones, limitando la masa de los neutrinos a valores inferiores a 1 eV.

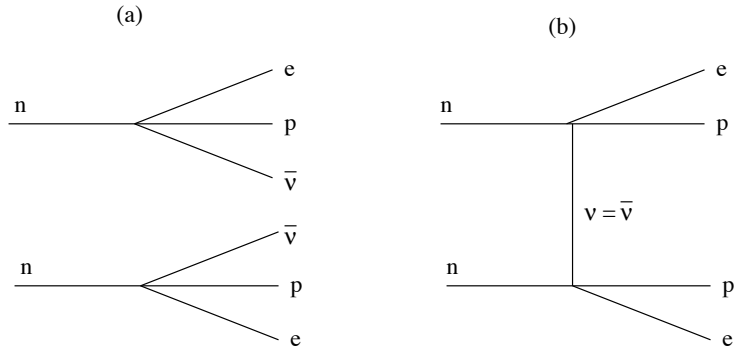


Figura 12.10: Desintegración β doble, según el formalismo de Dirac (a) y según el formalismo de Majorana (b).

12.6 La radiación cósmica

La radiación cósmica es una radiación ionizante incidente sobre la Tierra desde el espacio exterior. Su intensidad varía con la altura, la latitud y la actividad solar. El desarrollo de la física de partículas hasta 1950 está íntimamente ligado con el estudio de la radiación cósmica. Importantes resultados como el descubrimiento del pión y del muón han sido efectuados gracias a esta radiación. Con el desarrollo de los aceleradores a partir de 1950, la física de los rayos cósmicos entra en declive, pero actualmente vuelve a ganar interés, esta vez en conexión con la astrofísica y la cosmología.

El descubrimiento de la radiación cósmica se atribuye a V. Hess que observó en 1912 la existencia de radiación a varias miles de metros de altura, gracias a una cámara de ionización instalada en un globo. Este tipo de radiaciones residuales habían sido ya observadas en la superficie terrestre, pero V. Hess demostró que aumentaban considerablemente con la altura. La naturaleza de esta radiación permaneció siendo una incógnita mucho tiempo después de estas primeras observaciones y actualmente subsisten todavía numerosos interrogantes sobre el origen de la misma. En 1933 Compton dio el primer paso importante en la comprensión del fenómeno al observar que la radiación cósmica depende de la latitud y es, por tanto, sensible al campo magnético terrestre. Esto significa que los rayos cósmicos son principalmente partículas cargadas. Otro resultado importante fue la observación, realizada por Auger, de que los rayos cósmicos llegan a la superficie terrestre en coincidencia, separados por distancias que pueden alcanzar los 200 m. Esto significa la existencia de cascadas de partículas en la atmósfera originadas por rayos cósmicos primarios de hasta 10^3 TeV. Esta energía resultaba sorprendentemente elevada en una época en la cual apenas se conseguía acelerar protones hasta 10 MeV. Incluso hoy día los aceleradores más

potentes no sobrepasan una energía de 1 TeV. Desde entonces, no ha cesado de crecer el límite máximo de la energía observada. En 1962, Linsley observó en el desierto de New Mexico (EEUU) un rayo cósmico con una energía de 10^8 TeV, abriendo un nuevo campo experimental, el de los rayos cósmicos de energía ultra-alta.

En el estudio de las radiación cósmica es conveniente diferenciar los rayos cósmicos primarios, que son aquellos que inciden sobre la atmósfera terrestre, de los rayos cósmicos secundarios, observables en la superficie terrestre. Los rayos cósmicos primarios se componen en un 80 % de protones, pero incluyen igualmente helio y núcleos ionizados de elementos más pesados. La abundancia de los diversos elementos es similar a la que se observa en las estrellas. El flujo de rayos cósmicos primarios sigue una ley del tipo

$$dN/dE \sim E^{-\alpha} \qquad \text{siendo} \qquad \alpha \approx 3 \tag{12.3}$$

Esto significa que el flujo disminuye aproximadamente en un factor 100 cada vez que la energía aumenta en un factor 10 (véase figura 12.11). Para energías superiores a 10^{11} eV, el flujo es de 1 partícula/m^2/s, para 10^{15} eV el flujo ha disminuido hasta 1 partícula/m^2/año, y para 10^{18} eV, es de sólo 1 partícula/km^2/año. Antes de 10^{15} eV se observa un índice espectral α ligeramente inferior a 3, y después de 10^{18} eV se observa un índice ligeramente superior a 3. La primera zona se conoce como la 'rodilla' ($knee$) y la segunda como el 'tobillo' ($ankle$).

Al incidir los rayos primarios sobre las capas altas de la atmósfera, se producen cascadas hadrónicas formadas por piones y los productos de la desintegración de los mismos, es decir, muones, electrones y neutrinos para piones cargados (véase figura 12.3) y fotones para piones neutros. Estas cascadas pueden llegar a tener un número considerable de partículas secundarias, aunque la fracción que alcanza la superficie terrestre es muy reducida. Esto es debido a que la atmósfera tiene un espesor considerable, equivalente a 28 X_0 para la interacción electromagnética y 11 λ_I para la hadrónica, de forma que absorbe prácticamente todo salvo la mayoría de los muones y, naturalmente, los neutrinos. La figura 12.12 muestra los flujos de partículas secundarias calculadas en función de la altura sobre la superficie terrestre. A nivel del mar, se observa aproximadamente un flujo de 1 muón/cm^2/minuto. Este flujo constituye el principal fondo de contaminación para numerosos experimentos que han de efectuarse a gran profundidad bajo tierra (por ejemplo los experimentos sobre desintegración del protón, sobre neutrinos solares y atmosféricos, etc.).

Un tema muy importante, pero sobre el que subsisten numerosas dudas, es el origen de la radiación cósmica y, ligado a éste, los mecanismos de aceleración que permiten alcanzar energías tan increíblemente elevadas como 10^{20} eV. El primero en especular sobre estos temas fue Fermi, hacia 1944, ideando varios mecanismos posibles de aceleración basados en la presencia dentro de la galaxia de nubes magnéticas en movimiento. Más recientemente, hacia 1983, Drury propuso las explosiones de SN como origen más probable de la radiación cósmica, hipótesis que hoy día se considera como muy plausible aunque no esté suficientemente probada. Un argumento en favor de esta hipótesis resulta

del cálculo de la potencia almacenada en la radiación cósmica. Partiendo de un flujo primario de

$$dN/dE \approx 2\,E^{-3} \quad \text{nucleones/cm}^2\text{/s/sr/GeV}$$

donde E es la energía en GeV, se llega tras integrar sobre energías y ángulos a una densidad de energía almacenada del orden de 1 eV/cm^3.

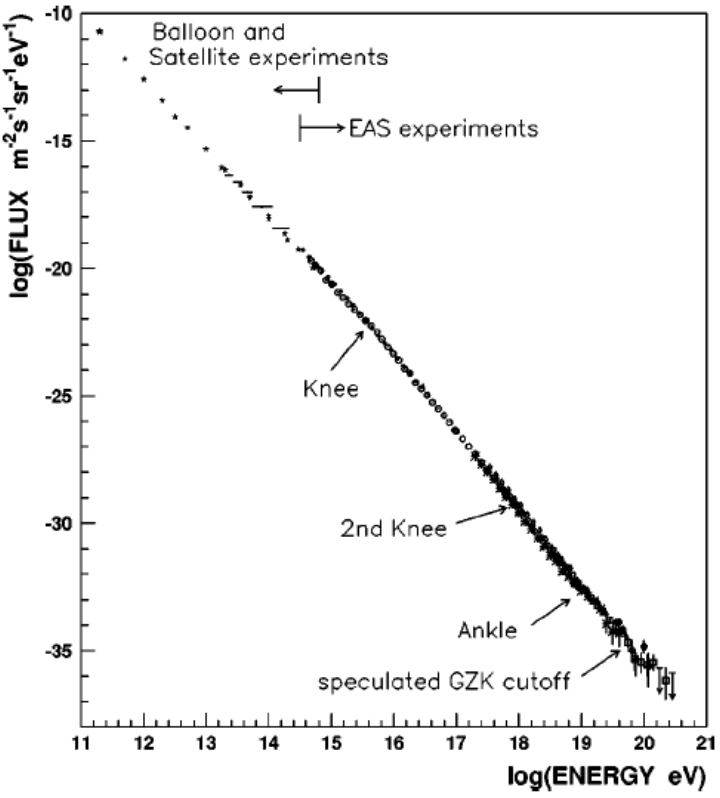


Figura 12.11: Espectro de energía de la radiación cósmica primaria. *Fuente*: *Rev. Mod. Phys.*, **72** (2000) 689.

Teniendo en cuenta que la galaxia es un disco con radio de unos 15 kpc y espesor de unos $0{,}3$ kpc, y que la vida media de un cósmico atrapado por los campos magnéticos galácticos se puede estimar en unos $6\ 10^6$ años, resulta que la fuente que alimenta la radiación cósmica ha de tener una potencia de

$$P_{\text{cosm}} \approx 3{,}4\,10^{46} \text{ MeV/s}$$

Por otra parte, en una explosión de SN de tipo II, por ejemplo, se libera una energía de $2\,10^{53}$ erg, equivalente a $1{,}2\,10^{59}$ MeV. Tal como se discutió anteriormente la mayor parte de esta energía se libera en forma de neutrinos, pero basta suponer que se produce una explosión cada 100 años y que el $0{,}1\,\%$ de la energía pasa a la radiación cósmica para llegar a un resultado muy próximo al valor observado de P_{cosm}.

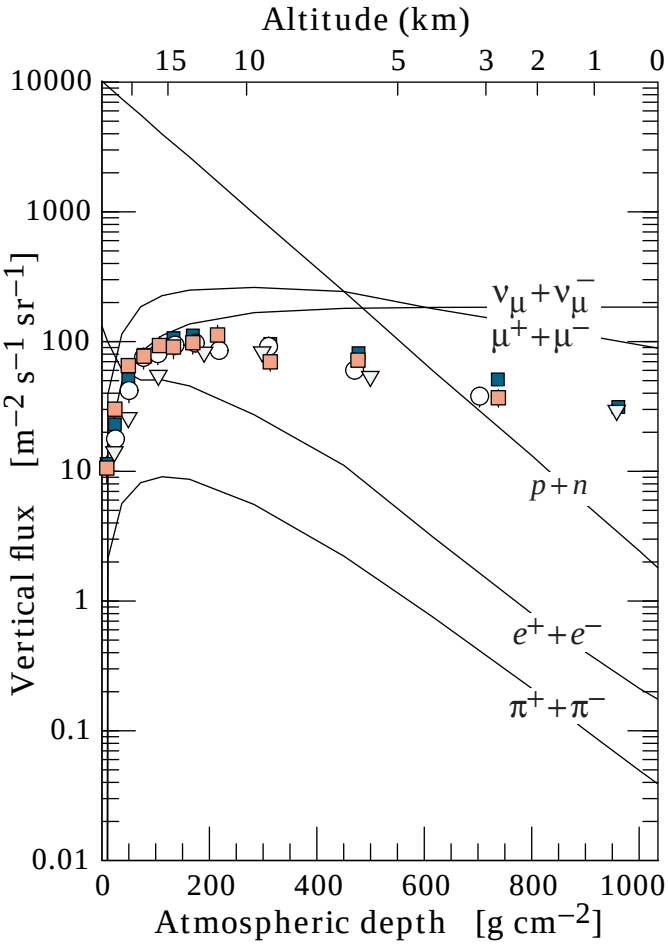


Figura 12.12: Flujo vertical de rayos cósmicos secundarios en función de la altura sobre la superficie terrestre. *Fuente*: PDG2002, *Phys. Rev.*, **D66** (2002) 010001.

12.6.1 Rayos cósmicos de energía ultra-alta

Por encima de los 10^{18} eV, el origen de los rayos cósmicos plantea nuevos enigmas todavía no resueltos. Las medidas del flujo de rayos cósmicos primarios efectuados por 4 experimentos (HAVERAH PARK, YAKUTSK, FLY'S EYE y AGASA) con técnicas muy dispares indican una reducción del flujo a partir de esta energía (figura 12.13). Esta reducción es esperada ya que los campos magnéticos galácticos, cuyos valores se estiman en unos 2 μG, no pueden retener las partículas cargadas con energía superior a 10^{18} eV. Sin embargo, el flujo parece remontar por encima de 10^{19} eV, según los datos del experimento AGASA (no confirmados por HI-RES) y este efecto resulta difícilmente explicable.

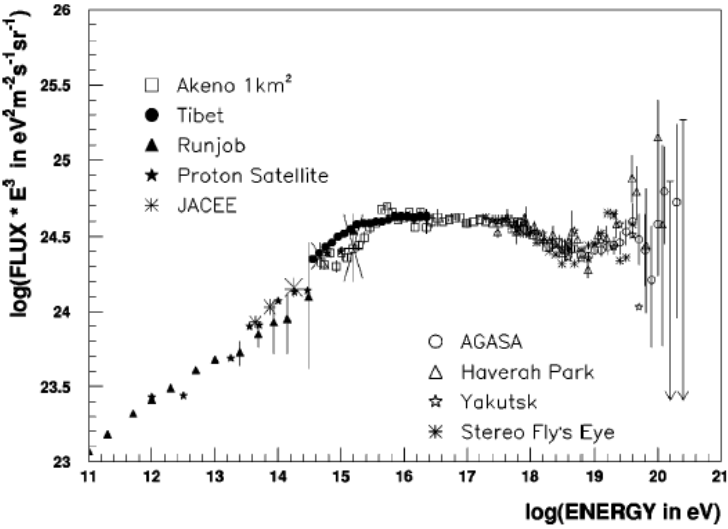


Figura 12.13: Espectro de energía de la radiación cósmica primaria. Obsérvese que el flujo está multiplicado por E^3. *Fuente*: *Rev. Mod. Phys.*, **72** (2000) 689.

El origen de estos rayos cósmicos de energía ultra-alta debe, por tanto, de ser extragaláctico, pero tampoco puede situarse demasiado lejos ya que la radiación de fondo impediría su propagación más allá de unos 100 Mpc (aproximadamente el 1 % del universo visible). En efecto, la radiación de fondo está constituida por fotones a una temperatura de $2{,}7\ ^\circ K$, es decir, con una energía media de $E_\gamma = 6\ 10^{-4}$ eV. Estos fotones pueden interaccionar con los protones cósmicos según el proceso $p\gamma \rightarrow p\pi^0,\ n\pi^+$, a condición de que la energía de los protones supere el umbral de la colisión, cuyo valor se puede estimar en torno a $m_N m_\pi/(2E_\gamma) \approx 10^{20}\ eV$. Para esta energía, la longitud de interacción no supera los 10 Mpc, aumentando hasta 100 Mpc para 10^{19} eV. Este límite máximo para las energía de los cósmicos se conoce como límite GZK (Greisen-Zatsepin-

Kuzmin). Dado que los campos magnéticos extragalácticos no superan el valor de 1 nG, la dirección de llegada de estos cósmicos debería revelar el origen de los mismos. Sin embargo, el estudio del centenar de sucesos detectados no es de momento concluyente (véase figura 12.14).

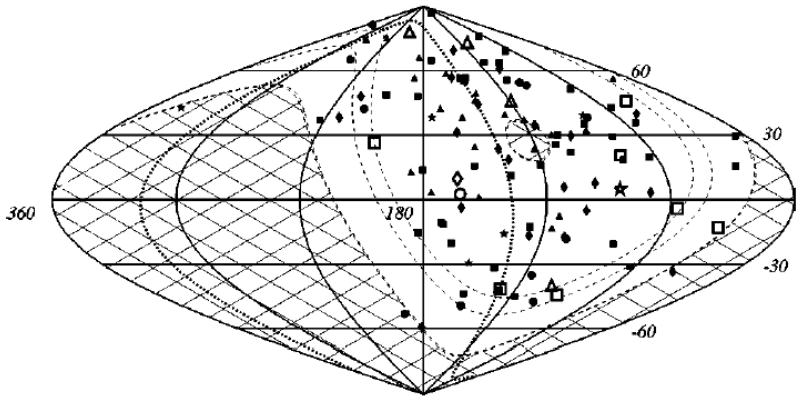


Figura 12.14: Dirección de llegada de los rayos cósmicos detectados con energía superior a $4\,10^{19}$ eV. Los ejes horizontal y vertical muestran la longitud y la latitud galáctica, respectivamente. La muestra contiene un centenar de sucesos procedentes de 5 experimentos, todos ellos situados en el hemisferio norte, razón por la cual sólo es accesible una parte del mapa. *Fuente*: *Rev. Mod. Phys.*, **72** (2000) 689.

Otro punto de interés es el mecanismo que permite acelerar una partícula cargada hasta una energía de 10^{19} eV. Aunque se desconoce prácticamente todo sobre este mecanismo, la siguiente relación entre la energía máxima E_{max} de una partícula acelerada, el campo magnético B y el radio de curvatura R

$$E_{max}(\text{TeV}) = 0{,}3 \cdot B\,(\text{tesla}) \cdot R(\text{km}) \tag{12.4}$$

permite limitar considerablemente las estructuras cósmicos que pueden dar origen a energías ultra-altas, según un razonamiento inicialmente propuesto por Hillas. En función de las dimensiones y de los campos magnéticos conocidos, estas estructuras se limitan a estrellas de neutrones, núcleos galácticos activos (AGN), algunas radiogalaxias y algunos grupos galácticos, según se muestra en la tabla 12.10. En todo caso, se puede comprobar que los remanentes de SN no pueden ser el lugar de origen de las energías ultra-altas.

Finalmente, es interesante detenerse sobre las técnicas experimentales utilizadas en la detección de estos cósmicos. Estas técnicas se basan en la construcción de retículos gigantes de detectores que cubren superficies de muchos km^2. Estos detectores han de captar de forma simultánea el paso de las partículas secundarias procedentes de la cascada hadrónica iniciada por un protón de energía

10^{19} eV. Estas cascadas pueden atravesar la atmósfera y, por tanto, no es necesario situar los detectores a demasiada altura. A partir de la información de los diversos detectores del retículo (energía de las partículas y tiempo de llegada) se puede reconstruir la energía y dirección del cósmico primario.

TABLA 12.10: Valor máximo de la energía de una partícula acelerada para diversas estructuras cósmicas.

estructuras cósmicos	R (km)	B (Gauss)	E_{max} (eV)
estrella de neutrones	10	10^{12}	$3 \cdot 10^{20}$
núcleos gal. activos	10^{9}	10^{4}	$3 \cdot 10^{20}$
radiogalaxias	10^{17}	10^{-4}	$3 \cdot 10^{20}$
grupos galácticos	10^{20}	10^{-7}	$3 \cdot 10^{20}$
remanentes de SN	10^{15}	10^{-5}	$3 \cdot 10^{17}$

Recientemente ha sido ensayada con éxito una técnica alternativa basada en la fluorescencia de las moléculas de nitrógeno del aire, al ser excitadas por una radiación ionizante. Los detectores basados en esta técnica se conocen como 'ojo de mosca'. La tabla 12.11 resume las características de los principales experimentos realizados o en curso de realización. Se puede observar que el experimento AGASA tardó unos 5 años en observar una veintena de sucesos por encima de $5\ 10^{19}$ eV, mientras que el experimento AUGER espera observar unos 450 sucesos/año en este rango de energía una vez que su construcción haya sido finalizada.

TABLA 12.11: Principales experimentos sobre rayos cósmicos de energía ultra-alta.

experimento	localización	área (km^2)	técnica
HAVERAH PARK	Reino Unido	12	Cherenkov
YAKUTSK	Siberia	18	centelleo+Ch.
FLY'S EYE	Utah (EEUU)	–	fluorescencia
AGASA	Japón	100	centelleo
HI-RES	Utah (EEUU)	–	fluorescencia
AUGER	Argentina	3000	Ch.+fluor

12.6.2 Rayos γ de energía ultra-alta

Los rayos γ constituyen sólo una pequeña fracción de la radiación cósmica (del orden de 1 %). Sin embargo, a diferencia de los rayos cósmicos cargados, no se desvían en los campos magnéticos y, por tanto, su dirección de llegada revela también su procedencia. Se han observado rayos γ procedentes de púlsares, de remanentes de SN (SNR), de núcleos galácticos activos (AGN) y finalmente de los misteriosos 'estallidos de rayos γ' (*gamma ray burst*, GRB). Todos estos objetos astrofísicos son fuentes potenciales de la radiación cósmica, pero sus

estructuras no se conocen todavía suficientemente bien, o incluso se desconocen totalmente como en el caso de los GRB. El estudio de las emisiones γ, junto con el de las emisiones en las demás frecuencias (radio, IR, visible, UV y rayos X) es, por tanto, del máximo interés para poder entender el funcionamiento de estos objetos. En el estudio de los rayos γ de energía ultra-alta hay que tener en cuenta que el universo se hace opaco para energías superiores a los 10^{14} eV. En efecto, estos γ interaccionan con la radiación de fondo según el proceso $\gamma\,\gamma \rightarrow e^+e^-$ cuyo umbral es aproximadamente igual a $m_e^2/(E_\gamma)_{fondo}$. Dado que $(E_\gamma)_{fondo} \approx 6\,10^{-4}$ eV, se obtiene un umbral de 10^{14} eV. Por debajo de 10^{12} eV, el universo es prácticamente transparente a la radiación γ.

Las observaciones de rayos γ se han efectuado desde satélites o desde detectores terrestres. Los satélites pueden cubrir un rango de energía típico entre $0{,}1$ y 10 GeV, mientras que los detectores terrestres tienen su umbral por encima de los 100 GeV. El detector EGRET del satélite CGRO (*Compton Gamma Ray Observatory*) ha estudiado con detalle la radiación γ cósmica por encima de los 100 MeV, que es principalmente radiación difusa procedente del plano de la galaxia. Sobre este fondo difuso, EGRET ha observado sin embargo una gran cantidad de fuentes puntuales. El catálogo publicado en 1999, conocido como 'tercer catálogo de EGRET', incluye 271 fuentes puntuales, la mayoría de las cuales (170) no se observan en otras longitudes de onda y, por tanto, no pueden ser identificadas. Entre las fuentes identificadas, la mayoría (93) son posibles 'blazares', es decir, AGN particularmente activos en el rango de las emisiones γ. El catálogo incluye igualmente 5 púlsares situados en el plano de la galaxia, entre ellos los objetos conocidos como CRAB, VELA y PSR1706-44, que también han sido observados con detectores terrestres.

En lo que respecta a la fuentes de rayos γ en el rango del TeV, la nebulosa del Cangrejo (CRAB) ha sido la primera en ser detectada, durante los años 1980, por el detector WHIPPLE (Arizona, EEUU). En la actualidad sirve de fuente de referencia en el hemisferio norte. De la misma forma, el detector CANGAROO (Australia) ha detectado a principio de los años 1990 otras dos fuentes puntuales que sirven de referencia en el hemisferio sur, VELA y PSR1706-44. Todos estos objetos son púlsares situados dentro nuestra galaxia, pero resulta notable que también hayan sido observados objetos extragalácticos, concretamente los blazares MRK-421 y MRK-501. Las primeras observaciones de estos objetos fueron efectuadas por WHIPPLE, y posteriormente han sido confirmadas por HEGRA (Canarias). En la actualidad existen unas 15 fuentes potenciales de rayos γ en el rango del TeV, no todas confirmadas, que se muestran en la figura 12.15.

El objeto mejor estudiado para rayos γ en el rango del TeV es sin duda CRAB, el remanente de la famosa explosión de SN ocurrida en 1054. Existe en su interior un púlsar que es una fuente muy intensa de rayos X. Esta emisión (por debajo de los 100 MeV) está modulada por el periodo del púlsar que es de $33\ ms$, y presenta todas las características de una radiación sincrotrón emitida por electrones girando en campos magnéticos intensos. Las emisiones γ, por el contrario, no están pulsadas y son de mucha menor intensidad. La figura 12.16

muestra el espectro de las emisiones de CRAB en el rango del TeV. En este rango, el espectro es del tipo $E^{-2,4}$ y la luminosidad emitida es del orden de $10^{34}\ erg/s$. Se piensa que el origen de ésta es el 'efecto Compton inverso', es decir, la difusión de electrones energéticos sobre fotones blandos para dar lugar a fotones energéticos. En lo que respecta a las emisiones de los blazares, son mucho más intensas que las de los púlsares, pero también mucho más variables. Se piensa que los blazares son tipos particulares de AGN, y que los AGN son agujeros negros supermasivos situados en el núcleo de las galaxias. Algunos AGN exhiben la presencia de un *jet* formado posiblemente por plasma emitido en forma bipolar. Un blazar sería justamente un AGN con un *jet* dirigido hacia el observador. Sobre el origen de la emisión en el rango del TeV, podría ser debida al efecto Compton inverso, como en un púlsar, o bien a una interacción hadrónica con creación de piones, seguida de la desintegración $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$. En esta segunda hipótesis, deberían también producirse neutrinos en el rango del TeV, como consecuencia de la desintegración de los piones cargados.

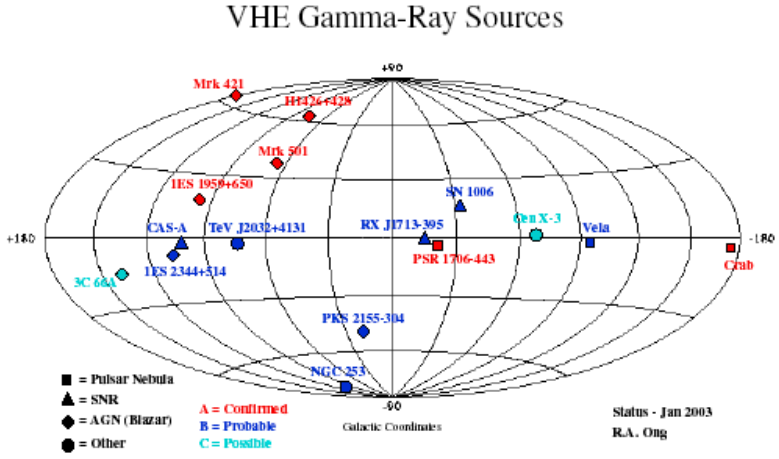


Figura 12.15: Fuentes potenciales de rayos γ en el rango del TeV. Los ejes horizontal y vertical muestran la longitud y la latitud galáctica, respectivamente. *Fuente*: astro-ph/0304336.

Los estallidos de rayos γ (GRB) fueron inicialmente observados por satélites militares durante los años 1960. Se trata de emisiones repentinas de radiación (principalmente rayos X) cuya duración puede ir desde $0{,}1$ s hasta cerca de 100 s. Durante mucho tiempo se discutió si se trataba de un fenómeno galáctico o extragaláctico. La observación durante los años 1990 de más de un millar de GRB por el detector BATSE (en el rango de energía de los 100 keV) instalado en el satélite CGRO, ha zanjado este polémica en favor de la opción extragaláctico.

En efecto, la distribución de los estallidos no se concentra en el plano galáctico, sino que es perfectamente uniforme en el mapa del universo. Para algunos GRB se han logrado también detectar emisiones en la parte del espectro visible, confirmando que se trata de emisiones muy lejanas. El detector EGRET del CGRO también ha sido capaz de detectar rayos γ por encima de los 100 MeV procedentes de un GRB. Si la emisión de radiación fuera isótropa, podría alcanzar los $10^{54}\ erg$, superando, por tanto, la emisión estimada en una explosión de SN. Sobre el mecanismo capaz de producir estos estallidos existen en la actualidad varios modelos, sin que haya todavía consenso sobre la validez de los mismos.

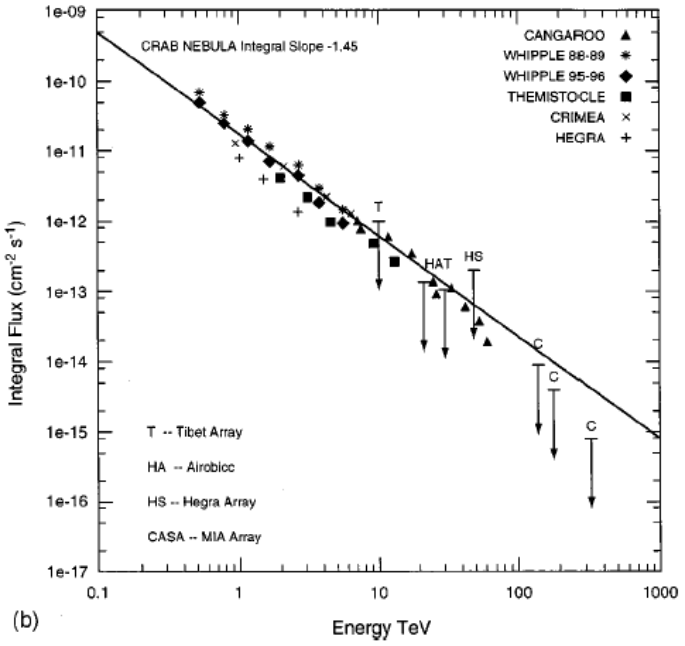


Figura 12.16: Espectro de las emisiones γ de CRAB en el rango del TeV.
Fuente: *Rev. Mod. Phys.*, **71** (1999) 897.

En lo que respecta a las técnicas de detección de los rayos γ, los detectores instalados en satélites utilizan pequeños calorímetros (por ejemplo, un cristal de NaI en el caso de EGRET) precedidos por un detector de trazas que sea capaz de medir la dirección del fotón, tras provocar la conversión $\gamma \rightarrow e^+e^-$. En el detector GLAST, actualmente en construcción, la medida direccional está notablemente mejorada gracias a la utilización de detectores de silicio. La superficie útil de detección en los detectores de satélite impide la observación de rayos γ por encima de los 10 GeV. La detección de rayos γ en el rango del TeV, cuyos flujos son muy reducidos, se efectúa desde observatorios terrestres. Dado que

el máximo la cascada electromagnética producida por estos γ en la atmósfera se encuentra a demasiada altura (del orden de los 8 km), la detección no se basa en las partículas de la cascada, sino en la radiación Cherenkov emitida por éstas. La altura del detector no es, por tanto, el parámetro fundamental, sino más bien la calidad del aire para la observación nocturna. Los detectores terrestres (WHIPPLE, HEGRA, CANGAROO-II) consisten básicamente en un espejo parabólico capaz de focalizar y analizar las emisiones atmosféricas de radiación Cherenkov. La intensidad mínima necesaria para la detección coloca el umbral de de los γ observados por encima de los 250 GeV. Los detectores de nueva generación se han diseñado de forma que el umbral se encuentre por debajo de los 100 GeV. Esto se consigue aumentando el tamaño del espejo en el caso de MAGIC (Canarias) o bien acoplando varios detectores en el caso de HESS (Namibia), VERITAS (Arizona, EEUU) y CANGAROO-III (Australia). La zona intermedia entre los 10 y los 100 GeV queda cubierta por detectores que utilizan antiguas plantas solares. Es el caso de los detectores STACEE (New Mexico, EEUU) y CELESTE (Pirineos, Francia).

12.6.3 Neutrinos de energía ultra-alta

La detección de neutrinos de energía ultra-alta, en el rango del TeV, tiene un interés comparable al de los fotones en este mismo rango de energía. En efecto, en ambos casos la dirección de llegada revela el origen de la fuente emisora. En el caso de los neutrinos existe además la ventaja de que el universo es completamente transparente a los mismos. El inconveniente es por supuesto el formidable problema que representa la detección de estos neutrinos, cuyos flujos son extremadamente reducidos. La principal contaminación procede de los muones atmosféricos, extremadamente penetrantes en este rango de energía. En efecto, teniendo en cuenta tanto las pérdidas por ionización como las pérdidas por radiación, el alcance típico de un muón de energía ultra-alta es

$$R_\mu = (R_0/\rho)\mathrm{Log}(E/E_c + 1) \tag{12.5}$$

donde $R_0 = 2{,}9$ km, ρ es la densidad del medio atravesado en g/cm^3, E es la energía del muón y $E_c = 0{,}7$ TeV es la energía crítica. Esto significa por ejemplo un alcance de $2{,}5$ km en agua para muones de 1 TeV y, por tanto, resulta inefectivo blindar el experimento introduciéndolo en un lugar profundo. Esta contaminación puede sin embargo eliminarse considerando únicamente los muones procedentes del interior de la Tierra, tal como muestra la figura 12.17, que sólo pueden proceder de la interacción de un neutrino.

El siguiente problema lo constituye el fondo de neutrinos atmosféricos. El flujo de estos neutrinos se puede estimar en

$$\phi_\nu(E > 1 \text{ TeV}) \approx 10^{-7} - 10^{-8} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}\text{sr}^{-1} \qquad \text{y}$$

$$\phi_\nu(E > 100 \text{ TeV}) \approx 10^{-12} - 10^{-13} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}\text{sr}^{-1} \quad ,$$

que superaría el flujo estimado de neutrinos extragalácticos hasta energías del orden de los 100 TeV. Por tanto, para detectar fuentes extragalácticas es preciso construir un detector capaz de observar flujos del orden de 10^{-12} cm^{-2}s^{-1}. Este criterio fija en la práctica el volumen del detector en 1 km^3 de agua. Un detector de esta características conseguiría observar unos 4 sucesos por año procedentes de neutrinos con energía superior a 100 TeV. Es interesante observar que la Tierra empieza a ser opaca a neutrinos de esta energía.

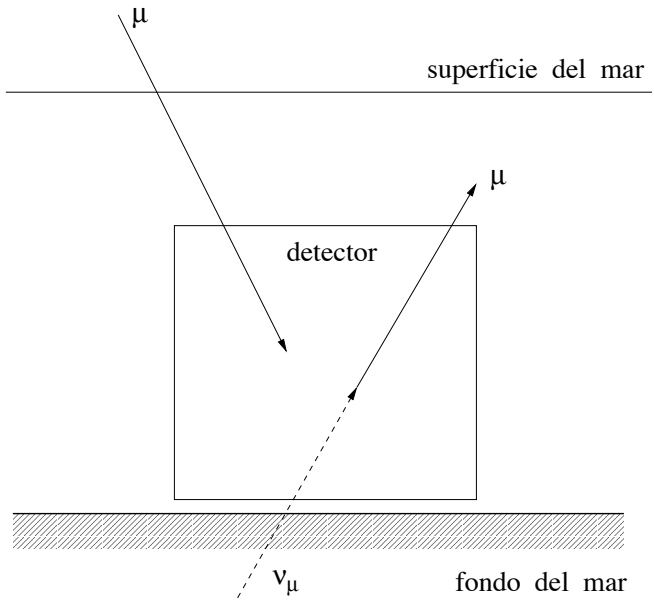


Figura 12.17: Detector de neutrinos de energía ultra-alta. La figura muestra un muón procedente del interior de la Tierra (señal) y un muón atmosférico (contaminación).

Esta técnica ha sido ya ensayada con éxito en la detección de neutrinos de energía ultra-alta, aunque ningún detector ha alcanzado de momento un volumen cercano al km^3 que permitiría observar desviaciones por encima del flujo atmosférico. El experimento pionero se ha llevado a cabo en el lago BAIKAL (Siberia). En este experimento se utiliza la capa de hielo que recubre el lago en invierno para excavar pozos profundos donde se insertan los detectores. Estos detectores son fotomultiplicadores capaces de detectar la radiación Cherenkov emitida por los muones que atraviesan la capa de hielo. La misma técnica ha sido empleada por el experimento AMANDA, utilizando esta vez la capa de hielo del Polo Sur, cuyo espesor es de 3 km. Esto permite situar el detector en profundidad, entre 800 y 2400 m. Con una superficie efectiva de unos 100×100

m^2, ha sido ya posible observar los primeros sucesos procedentes de neutrinos atmosféricos. Se pretende aumentar el volumen de este experimento hasta llegar al km^3 (proyecto ICECUBE). Un proyecto alternativo es ANTARES, cuyo detector se construye a 2400 m de profundidad, pero en este caso en el fondo marino cerca de Marsella (Francia).

12.7 Ejercicios

12.1. Sección eficaz del proceso $\nu_e p \to e^+ n$ a baja energía.
La amplitud de difusión del proceso $\nu_e p \to e^+ n$ se puede escribir en la forma

$$\overline{|T|^2} = \frac{G_{\rm F}^2}{m_1 m_2 m_3 m_4}[T_1(C_{\rm V}+C_{\rm A})^2 + T_2(C_{\rm V}-C_{\rm A})^2 + T_3(C_{\rm V}^2 - C_{\rm A}^2)$$

donde m_i son las masas de las partículas, $C_{\rm V}$ y $C_{\rm A}$ son las constantes vectorial y axial de la corriente del nucleón y finalmente T_i son los siguientes invariantes relativistas:
$T_1 = (p_n \cdot p_\nu)(p_p \cdot p_e), T_2 = (p_n \cdot p_e)(p_p \cdot p_\nu)$ y $T_3 = -m_p m_n (p_e \cdot p_\nu)$.
a) Calcular $|T|^2$ en el límite $E_\nu \ll m_p$, es decir, despreciando el retroceso del nucleón, y demostrar que entonces la sección eficaz se escribe en la forma

$$\sigma \approx \frac{G_{\rm F}^2}{\pi} p_e E_e (C_{\rm V}^2 + 3C_{\rm A}^2) \qquad \text{con} \quad E_e \approx E_\nu - \Delta \quad \text{y} \quad \Delta = m_n - m_p$$

b) Utilizando los mismos valores de $C_{\rm V}$ y $C_{\rm A}$ que en la desintegración del neutrón, deducir que $\sigma \approx 10^{-43} p_e E_e$ cm^2, donde E_e y p_e están expresados en MeV.

12.2. Sección eficaz del proceso $\nu_e e^- \to \nu_e e^-$.
a) El proceso $\nu_e e^- \to \nu_e e^-$ puede ocurrir por intercambio de W (corriente cargada) o de Z (corriente neutra). Dibujar los diagramas de Feynman y escribir los correspondientes hamiltonianos de interacción efectiva a baja energía.
b) Utilizando la transformación de Fierz:

$$[\bar{e}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\nu_e][\bar{\nu}_e\gamma_\mu(1-\gamma_5)e] = [\bar{\nu}_e\gamma^\mu(1-\gamma_5)\nu_e][\bar{e}\gamma_\mu(1-\gamma_5)e]$$

demostrar que la sección eficaz para $E_\nu \gg m_e$ es de la forma

$$\sigma \approx \frac{G_{\rm F}^2}{4\pi} s[(C_{\rm V}+C_{\rm A})^2 + \frac{1}{3}(C_{\rm V}-C_{\rm A})^2]$$

y calcular los valores de $C_{\rm V}$ y $C_{\rm A}$. Deducir $\sigma \approx 9{,}5\,10^{-45} E_\nu$ cm^2, donde E_ν está expresado en MeV.
c) Deducir igualmente que para $\nu_x e^- \to \nu_x e^-$, donde ν_x es un neutrino distinto de ν_e, sólo existe el proceso de corriente neutra y resulta una sección eficaz $\sigma \approx 1{,}5\,10^{-45} E_\nu$ cm^2 con E_ν en MeV.

12.3. Neutrinos solares.
a) En el experimento HOMESTAKE se detecta la reacción

$$\nu_e + {}^{37}Cl \to e^- + {}^{37}Ar$$

cuyo umbral es $0{,}86$ MeV y, por tanto, permite detectar los neutrinos solares procedentes de la desintegración $^8B \rightarrow {}^8Be\ e^+\nu_e$. El flujo de estos neutrinos es $\phi_\nu = 5\,10^6$ cm^{-2}s^{-1} y su sección eficaz efectiva $< \sigma_\nu >= 1{,}1\,10^{-42}$ cm^2. Calcular el número de sucesos esperados por día, sabiendo que el detector contiene 615 toneladas de C_2Cl_4 y que la abundancia del isótopo ^{37}Cl en el cloro natural es de 24 %. Comparar este resultado con la medida experimental de $2{,}6$ SNU (1 SNU se define como 1 suceso por segundo y 10^{36} átomos de ^{37}Cl). Se tendrá en cuenta que los neutrinos de ^8B suponen el 78 % de los neutrinos procedentes del sol observables por este experimento.
b) En el experimento KAMIOKANDE se detecta la reacción $\nu_e e^- \rightarrow \nu_e e^-$ gracias a la radiación Cherenkov producida por el electrón en agua. Suponiendo un umbral de 7 MeV para la energía del neutrino y una eficacia de 10 % para la detección del electrón, calcular el número de sucesos esperados por día, sabiendo que la masa del detector es de 2000 toneladas. El espectro de los neutrinos procedentes de la desintegración de ^8B se puede parametrizar mediante $dN/dE \sim E^2(E_{max} - E)^2$ con $E_{max} \approx 15$ MeV. Comparar con la medida experimental de aproximadamente 1 suceso al día.

12.4. Neutrinos de reactores.
Los experimentos de BUGEY, CHOOZ y KAMLAND utilizan los $\bar{\nu}_e$ procedentes de reactores nucleares. En los tres casos el detector contiene centelleador líquido. La masa M de estos detectores, la potencia P de los reactores y la distancia d entre los reactores y el detector se indican en la tabla siguiente:

experimento	M (T)	P (MW)	d (m)
BUGEY	$0{,}6$	$2{,}8$	15
CHOOZ	$5{,}0$	$8{,}4$	1000
KAMLAND	1000	175	180 000

Utilizando una sección eficaz efectiva de 10^{-43} cm^2 para la interacción de los $\bar{\nu}_e$ con los protones libres del centelleador, calcular el número de sucesos esperados por día en los tres experimentos anteriores. Los valores observados son 1200, 25 y 3, respectivamente. Demostrar que los valores calculados coinciden con los observados a condición de suponer eficacias del orden de 15 % para BUGEY y 50 % para CHOOZ y KAMLAND.

12.5. Oscilaciones de neutrinos de reactores.
El espectro de los $\bar{\nu}_e$ procedentes de reactores nucleares se puede describir aproximadamente mediante una función exponencial del tipo $exp(-E/E_0)$, donde E es la energía de $\bar{\nu}_e$ y E_0 una constante cuyo valor es $1{,}4$ MeV. En lo que sigue se utilizará esta expresión y los datos del problema anterior.
a) Calcular la energía media de los neutrinos, la fracción del flujo por encima del umbral de colisión y la sección eficaz efectiva de la colisión con los protones libres del detector.
b) Determinar la distribución de energía de los positrones emitidos y el valor correspondiente al máximo de esta distribución.
c) Determinar la distribución del apartado anterior suponiendo que existe una oscilación de tipo $\nu_e \rightarrow \nu_x$ con $\Delta m^2 = 5\,10^{-5}$ eV^2 y ángulo de mezcla $\sin^2 2\theta = 0{,}75$. Considerar distancias de 15 m, 1 km y 180 km.

d) Calcular la reducción del flujo observado en función de Δm^2 para la distancia de 180 km.

12.6. Neutrinos atmosféricos.
El flujo de los neutrinos atmosféricos ($\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu$) para un observador situado a nivel del mar se puede parametrizar aproximadamente por la siguiente expresión

$$d\phi/dE = \phi_0 (E/E_0)^{-a}$$

siendo E la energía del neutrino, E_0 una constante cuyo valor es aproximadamente $0{,}7$ GeV, a un exponente que depende de la energía y que se puede parametrizar en la forma $a = 2 + 0{,}2 \ln(E/E_0)$, y finalmente $\phi_0 \approx 0{,}77$ cm^{-2}s^{-1}GeV^{-1}. El flujo de los neutrinos electrónicos es aproximadamente la mitad del flujo de los neutrinos muónicos.
a) Calcular el flujo total de neutrinos atmosféricos y la energía media de los mismos para umbrales de detección de 0, 100 y 200 MeV. Efectuar igualmente el cálculo para un rango de energía entre $0{,}2$ y $1{,}5$ GeV.
b) Calcular el número de sucesos observados por día en KAMIOKANDE, con una masa de agua de 2 kT, para neutrinos en el rango entre $0{,}2$ y $1{,}5$ GeV. Comparar con el valor experimental de $0{,}3$ sucesos/día.

12.7. Oscilaciones de neutrinos atmosféricos.
Se considera el experimento KAMIOKANDE para neutrinos atmosféricos. Se utilizarán los datos del problema anterior cuando sea necesario.
a) Calcular la distancia L recorrida por los neutrinos atmosféricos en función del ángulo polar θ respecto a la vertical del experimento. Se podrá suponer que los neutrinos se producen a una altura de 15 km sobre el nivel del mar.
b) Suponiendo una oscilación $\nu_\mu \to \nu_x$ con $\Delta m^2 = 3{,}5\ 10^{-3}$ eV^2 y ángulo de mezcla $\sin^2 2\theta = 1$, calcular la reducción en el número de neutrinos muónicos observados en función de la distancia recorrida por los mismos. Se supondrá que el espectro de los neutrinos no depende del ángulo polar y se utilizará el rango de detección entre $0{,}2$ y $1{,}5$ GeV.
c) Suponiendo un flujo de neutrinos isótropo, calcular la reducción en el flujo total de neutrinos observados debida a la oscilación descrita en el apartado anterior.

12.8. Neutrinos de acelerador.
a) El haz de neutrinos ν_μ del proyecto CNGS tiene un espectro aproximadamente plano entre 7 y 25 GeV. Calcular la sección eficaz efectiva para la interacción por corriente cargada con aparición de un muón en el estado final.
b) Por cada 85 protones del haz primario se consigue un neutrino en el haz de ν_μ, cuyo radio es aproximadamente igual a 1 m a una distancia de 1 km del blanco de protones. Estimar el flujo de neutrinos a una distancia de 730 km, suponiendo un flujo acumulado de $4{,}5\ 10^{19}$ protones/año para el haz primario.
c) Estimar el número de sucesos con aparición de muón esperados en un experimento a 730 km de distancia, por kton de detector y año de exposición.

12.9. Oscilaciones de neutrinos de acelerador.
a) Utilizando los datos del problema anterior calcular la reducción del flujo de ν_μ que se espera observar en el proyecto CNGS en función de Δm^2. Se considerarán valores de Δm^2 en el rango entre 10^{-3} y 10^{-2} eV^2, y un ángulo de mezcla tal que $\sin^2 2\theta = 1$.
b) Calcular el umbral E_0 para la producción de leptones τ por corriente cargada.

Suponiendo que la sección eficaz para dicho proceso es de la forma $\sigma = \sigma_0(1 - E_0/E)^2$ donde E es la energía del neutrino y σ_0 el valor asintótico de la sección eficaz a alta energía, calcular el número de sucesos esperados con aparición de τ en función de Δm^2. Se podrá suponer una eficacia para la detección de leptones τ de 10 %.

12.10. Neutrinos de Supernova (I).
El 23 de febrero de 1987 ocurrió una explosión de supernova de tipo II en la Gran Nube de Magallanes (distante de la Tierra en unos 50 kpc). En este tipo de explosiones se supone que una estrella colapsa formándose una estrella de neutrones de aproximadamente 1 $M_\odot$ y 10 km de radio. La mayor parte de la energía de ligadura gravitacional de la estrella de neutrones es expulsada en unos 10 segundos en forma de neutrinos.
a) Sabiendo que la energía media de los neutrinos es de unos 12 MeV, calcular el número de neutrinos emitidos y el flujo sobre la Tierra.
b) Se supone que se producen todo tipo de neutrinos y antineutrinos, en igual número y con la misma energía media. Razonar por qué, con un detector de agua, sólo son observables los $\bar{\nu}_e$ a través del proceso $\bar{\nu}_e p \to e^+ n$.
c) Demostrar que el número de sucesos esperados es de 5 ó 6 por kT de agua, sabiendo que en el rango de energía considerado la sección eficaz de interacción es $\sigma_{\bar{\nu}p} \approx 10^{-43} E_\nu^2$ cm^2, siendo E_ν la energía del antineutrino en MeV.
d) Discutir si las predicciones anteriores están de acuerdo con las siguientes observaciones experimentales:

detector	masa	tipo detector	sucesos observados
Kamioka	2,1 kT	agua	11
IMB	5,0 kT	agua	8
Baksan	0,13 kT	cent. líquido	3
Mont Blanc	0,09 kT	cent. líquido	2

Datos: 1 kpc =3,1 10^{21} cm, 1 $M_\odot$ = 2,0 10^{33} g.

12.11. Neutrinos de Supernova (II).
En este problema se intenta mejorar los resultados del problema anterior teniendo en cuenta el espectro de energía de los neutrinos procedentes de la explosión. Dicho espectro se puede aproximar por una distribución de Fermi-Dirac del tipo

$$dN/dE = N_0 E^2/(1 + e^{E/T})$$

siendo N_0 y T el parámetro de normalización y la temperatura del gas de neutrinos, respectivamente.
a) Calcular la temperatura T, sabiendo que la energía media de los neutrinos es 12 MeV. Deducir el valor de la sección eficaz efectiva para la interacción, suponiendo una dependencia en energía de la sección eficaz del tipo $\sigma = \sigma_0(E - E_0)^2$, siendo E_0 el umbral de la colisión.
b) Dibujar el espectro de los positrones emitidos y calcular la posición del máximo de dicho espectro. Calcular el número de sucesos esperados para umbrales de detección del positrón de 5 MeV (Kamioka) y 25 MeV (IMB). Comparar estos valores con los resultados experimentales del problema anterior.

c) Discutir si los sucesos observados permiten obtener alguna información sobre la masa de los neutrinos.

12.12. Rayos γ cósmicos.
a) Calcular la longitud de radiación del aire a nivel del mar ($\rho_0 = 1{,}25 \cdot 10^{-3}$ [g/cm^3]) y comparar con el valor de las tablas.
b) La densidad del aire decrece con la altura según la fórmula

$$\rho = \rho_0\, exp(-h/h_0) \qquad \text{siendo} \qquad h_0 = 8{,}27 \text{ km}$$

Calcular el espesor de la atmósfera en longitudes de radiación en función de la altura sobre el nivel del mar h. Calcular la probabilidad de que un fotón cósmico alcance una altura de 5000 m sin interaccionar.
c) El máximo de la cascada creada por un fotón cósmico de energía E se alcanza tras recorrer una distancia $X_{max} = X_0 \ln(E/E_c)$ siendo X_0 la longitud de radiación del aire y E_c la energía crítica. Calcular a qué altura h sobre el nivel del mar se alcanza dicho máximo, para energías del γ cósmico de 10^{12} y 10^{19} eV.

12.13. Área efectiva de un detector de rayos γ cósmicos.
a) Calcular a qué altura sobre el nivel del mar se produce el máximo de una cascada originada por rayos γ de 1 TeV.
b) Sabiendo que el ángulo de la radiación Cherenkov en el aire es aproximadamente igual a 1° a una altura de 10 km, calcular el área efectiva de un detector terrestre situado a 2 km de altura sobre el nivel del mar.

12.14. Emisiones de rayos γ de CRAB.
El espectro de energía de los rayos γ emitidos por CRAB con $E > 1$ TeV es del tipo

$$dN/dE \sim E^{-\alpha} \qquad \text{siendo} \qquad \alpha = 2{,}4$$

y el valor del flujo integral es $\phi(E > 1 \text{ TeV}) = 1{,}5\, 10^{-11}$ cm^{-2}s^{-1}.
a) Calcular el flujo de energía emitido por CRAB por encima de 1 TeV, sabiendo que la distancia a la Tierra es aproximadamente 2 kpc.
b) Calcular el número de rayos γ con $E > 1$ TeV observados por año con un detector terrestre de área efectiva $A = 5\, 10^4$ m^2, suponiendo una eficacia de $0{,}1\,\%$ para las observaciones.
c) Calcular el cociente entre el número de rayos γ y el número total de rayos cósmicos observados para $E > 1$ TeV, suponiendo una resolución angular de 3°.

12.15. Neutrinos de energía ultra-alta.
a) Sabiendo que el flujo de neutrinos atmosféricos de energía ultra-alta ($E_\nu > 100$ TeV) es $\phi_\nu \approx 10^{-12}$ cm^{-2}s^{-1}, demostrar que con un detector de agua se pueden observar 4 ó 5 sucesos por km^3 y año.
b) Demostrar que, sin embargo, la Tierra empieza a ser opaca a los neutrinos de dicha energía.

Apéndices

Apéndice A: Constantes físicas

Cantidad	Símbolo	Valor
velocidad de la luz en el vacío	c	2,99792458 $\times 10^{8}$ m s^{-1}
constante de Planck	h	6,626069 $\times 10^{-34}$ J s
	$\hbar$	1,054572 $\times 10^{-34}$ J s
		= 6,582119 $\times 10^{-22}$ MeV s
carga del electrón	e	1,60217653 $\times 10^{-19}$ C
		= 4,8032044 $\times 10^{-10}$ esu
constante de conversión	$\hbar c$	197,327 MeV fm
constante de conversión	$(\hbar c)^2$	0,389379 GeV^2 mbarn
permitividad del vacío	ϵ_0	$8,854187 \times 10^{-12}$ F/m
permeabilidad del vacío	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ N A^{-2}
		$=12,566370 \times 10^{-7}$ N A^{-2}
	$\epsilon_0 \mu_0$	$1/c^2$
unidad de masa atómica (uma)		$\mathcal{M}$(átomo de $^{12}C)/12 =$
	$= (1\ g)/(\mathcal{N}_A$ mol)	931,494043 MeV/c^2
masa del electrón	m_e	0,510998918 MeV/c^2
		= 9,1093826 $\times 10^{-31}$ kg
masa del protón	m_p	938,272029 MeV/c^2
		= 1,67262171 $\times 10^{-27}$ kg
		= 1,007276467 uma
		= 1836,152673 m_e
masa del neutrón	m_n	939,56536 MeV/c^2
		= 1,008664916 uma
masa del deuterón	m_d	1875,61282 MeV/c^2
masa de la partícula α	m_α	3727,379 MeV/c^2

Cantidad	Símbolo	Valor
magnetón de Bohr	$\mu_B = e\hbar/2m_e$	5,7883818$\times 10^{-11}$ MeV T^{-1}
magnetón nuclear	$\mu_N = e\hbar/2m_p$	3,1524513$\times 10^{-14}$ MeV T^{-1}
constante de estructura fina	α=$e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$	1/137,036
		$=7,297352 \times 10^{-3}$
radio clásico del electrón	$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}$	2,817940$\times 10^{-15}$ m
longitud de onda Compton del e$^-$	$\lambda\!\!\!^{-} = h/m_e c =$	
	$= r_e/\alpha$	3,861593$\times 10^{-13}$ m
radio de Bohr ($M_{\text{núcleo}} = \infty$)	$a_\infty = r_e/\alpha^2$	0,529177$\times 10^{-10}$ m
energía de Rydberg	$R_\infty hc =$	
	$=m_e c^2\alpha^2/2$	13,605692 eV
sección eficaz Thomson	$\sigma_{\text{T}} = 8\pi r_e^2/3$	0,665246 barn
constante de Fermi	$G_{\text{F}}/(\hbar c)^3$	1,16637 $\times 10^{-5}$ GeV^{-2}
ángulo de mezcla débil	$\sin^2\hat{\theta}(m_Z)$	0,23120
masa del bosón W$^{\pm}$	m_{W}	$80,425 \pm 0,038$ GeV/c^2
masa del bosón Z^0	m_{Z}	$91,1876 \pm 0,0021$ GeV/c^2
constante de acoplamiento fuerte	$\alpha_s(m_Z)$	0,1187$\pm$0,0020
constante de Newton	G_{N}	6,6742 $\times 10^{-11}$ m^{3}kg^{-1}s^{-2}
aceleración de la gravedad (mar)	g	9,80665 m s^{-2}
número de Avogadro	$\mathcal{N}_{\text{A}}$	6,0221415 $\times 10^{23}$ mol^{-1}
constante de Boltzmann	k	$1,38065 \times 10^{-23}$ J K^{-1}
		$= 8,617343 \times 10^{-5}$ eV K^{-1}
volumen molar gas ideal STP	$\mathcal{N}_{\text{A}} k \frac{T}{P}$	$22,414 \times 10^{-3}$ m^3 mol^{-1}
constante de la ley de Wien	$b = \lambda_{\text{max}} T$	2,8977685$\times 10^{-3}$ m K
constante de Stefan-Boltzmann	$\sigma = \frac{\pi^2 k^4}{60\hbar^3 c^2}$	5,67040$\times 10^{-8}$ W m^{-2} K^{-4}

Apéndice B: Múltiplos y submúltiplos

La siguiente tabla muestra los múltiplos y submúltiplos utilizados, para la unidad de longitud y para la unidad de energía.

mm	10^{-3}	milímetro	keV	10^{3}	kiloelectronvoltio
μm	10^{-6}	micrómetro	MeV	10^{6}	megaelectronvoltio
nm	10^{-9}	nanómetro	GeV	10^{9}	gigaelectronvoltio
pm	10^{-12}	picometro	TeV	10^{12}	teraelectronvoltio
fm	10^{-15}	femtometro	PeV	10^{15}	petaelectronvoltio
am	10^{-18}	attometro	EeV	10^{18}	exaelectronvoltio
zm	10^{-21}	zeptometro	ZeV	10^{21}	zettaelectronvoltio
ym	10^{-24}	yoctometro	YeV	10^{24}	yottaelectronvoltio

Apéndice C: Tablas de partículas

TABLA C.1: Magnitudes físicas de los constituyentes de la materia (fermiones). Existen también las doce antipartículas correspondientes, con las cargas cambiadas de signo. Cada quark, además, posee tres grados de libertad de color, propiedad que se supone ser la responsable de la fuerza fuerte, descrita por la cromodinámica cuántica (teoría llamada QCD).

LEPTONES $\mathbf{S}=\frac{1}{2}, \mathcal{B}=0$	M (MeV/c^2)	Vida media τ(s)	Q	L_e	L_μ	L_τ
e^-	0,5109989	estable	-1	1	0	0
ν_e	≤ 3 eV	-	0	1	0	0
μ^-	105,65835	$2{,}19703\times10^{-6}$	-1	0	1	0
ν_μ	$\leq$0,19	-	0	0	1	0
τ^-	1777,0	$0{,}2906\times10^{-12}$	-1	0	0	1
ν_τ	$\leq$18,2	-	0	0	0	1

QUARKS $\mathbf{S}=\frac{1}{2}, \mathcal{B}=\frac{1}{3}$	M (GeV/c^2)	Q	I	I_3	C	S	T	B
u	0,39	2/3	1/2	1/2	0	0	0	0
d	0,39	$-1/3$	1/2	$-1/2$	0	0	0	0
c	1,60	2/3	0	0	1	0	0	0
s	0,51	$-1/3$	0	0	0	-1	0	0
t	174.3	2/3	0	0	0	0	1	0
b	5,4	$-1/3$	0	0	0	0	0	-1

TABLA C.2: Magnitudes físicas de los bosones fundamentales (partículas fuerza).

BOSÓN ($\mathcal{B}=0, L_\ell=0$)	fuente del campo	M (GeV/c^2)	**S**	Q
fotón, γ	carga eléctrica	0	1	0
$W^\pm, Z^0$	carga débil	80,425; 91,1876	1	$\pm$1,0
gluón, g_i(i=1,8)	color	0	1	0
gravitón, ϵ	masa	0	2	0

TABLA C.3: Tabla de mesones pseudoescalares ($J^\mathcal{P}=0^-$) estables (bajo interacción fuerte). El símbolo X representa una o varias partículas; se dice que son modos inclusivos, por ejemplo, eX significa una desintegración en un e^+ o un e^- más otra u otras partículas, verificándose que la carga eléctrica total sea igual a la del mesón inicial.

Mesones

Partícula (estructura en quarks)	Masa MeV/c^2	Vida media τ (s)	Modos de desintegración
Mesones sin extrañeza			
$\pi^\pm$ $(u\bar{d},\bar{u}d)$	139,570	2,603$\times10^{-8}$	$\mu\nu$
π^0 $(u\bar{u},\bar{d}d)$	134,977	8,4$\times10^{-17}$	$\gamma\gamma$
η^0 $(u\bar{u},\bar{d}d)$	547,75	$5,58\times10^{-19}$	$\gamma\gamma, 3\pi^0, \pi^+\pi^-\pi^0$
Mesones con extrañeza			
$K^\pm$ $(u\bar{s},\bar{u}s)$	493,68	1,238$\times10^{-8}$	$\mu\nu_\mu, \pi^\pm\pi^0, 3\pi, \pi^0\ell^\pm\nu_\ell$
$K^0, \overline{K}^0$ $(d\bar{s},\bar{d}s)$	497,65		50 % K_S^0, 50 % K_L^0
K_S^0		0,895$\times10^{-10}$	$\pi^+\pi^-, 2\pi^0$
K_L^0		5,18$\times10^{-8}$	$\pi^+\pi^-\pi^0, 3\pi^0, \pi^\pm\ell^\mp\nu_\ell$
Mesones con encanto			
$D^\pm$ $(c\bar{d},\bar{c}d)$	1869,4	1,04$\times10^{-12}$	$eX, K^\pm X, K^0/\overline{K}^0 X$
$D^0, \overline{D}^0$ $(u\bar{c},\bar{u}c)$	1864,6	0,410$\times10^{-12}$	$eX, \mu X, KX, K^0/\overline{K}^0 X$
Mesones con encanto y con extrañeza			
$D_s^\pm$ $(c\bar{s},\bar{c}s)$	1968,3	0,490$\times10^{-12}$	$KX, K^0/\overline{K}^0 X$
Mesones con belleza			
$B^\pm$ $(b\bar{d},\bar{b}d)$	5279,0	1,67$\times10^{-12}$	$DX, D^0X/\overline{D}^0X, D^*X$
$B^0, \overline{B}^0$ $(b\bar{u},\bar{b}u)$	5279,4	1,536$\times10^{-12}$	$DX, D^0X/\overline{D}^0X, D^*X$
Mesones con belleza y con extrañeza			
B_s^0 $(b\bar{s},\bar{b}s)$	5369,6	1,46$\times10^{-12}$	$D_s^-X, D_s^-\pi^+$

TABLA C.4: Tabla de bariones estables (bajo interacción fuerte). Todos ellos con $J^{\mathcal{P}} = \frac{1}{2}^+$ excepto el Ω^- con $J^{\mathcal{P}} = \frac{3}{2}^+$. El símbolo X representa una o varias partículas; se dice que son modos inclusivos, por lo tanto ΛX significa una desintegración en un Λ^0 más otra u otras partículas.

Bariones

Partícula (estructura en quarks)		Masa MeV/c^2	Vida media τ (s)	Modos de desintegración
Bariones sin extrañeza				
p	(uud)	938,272	estable	
n	(udd)	939,565	885,7±0,8	$pe^-\overline{\nu}_e$
Bariones con $S=-1$				
Λ^0	(uds)	1115,683	$2,63\times10^{-10}$	$p\pi^-$, nπ^0
Σ^+	(uus)	1189,37	$0,802\times10^{-10}$	$p\pi^0$, nπ^+
Σ^0	(uds)	1192,64	$7,4\times10^{-20}$	$\Lambda\gamma$
Σ^-	(dds)	1197,45	$1,48\times10^{-10}$	$n\pi^-$
Bariones con $S=-2$				
Ξ^0	(uss)	1314,83	$2,90\times10^{-10}$	$\Lambda\pi^0$
Ξ^-	(dss)	1321,31	$1,64\times10^{-10}$	$\Lambda\pi^-$
Bariones con $S=-3$				
Ω^-	(sss)	1672,45	$0,82\times10^{-10}$	ΛK^-, $\Xi^0\pi^-$, $\Xi^-\pi^0$
Bariones con encanto				
Λ_c^+	(udc)	2284,9	$0,20\times10^{-12}$	ΛX, $pK^-\pi^+$, pK^0
Σ_c	(uuc, udc, ddc)	2452,5	-	$\Lambda_c^+\pi$
Ξ_c^+	(usc)	2466,3	$0,44\times10^{-12}$	$\Lambda K^-\pi^+\pi^+$, $\Sigma^+K^-\pi^+$
Ξ_c^0	(dsc)	2471,8	$0,11\times10^{-12}$	$\Xi^-\pi^+$, $\Xi^-\pi^+\pi^+\pi^-$
Ω_c^0	(ssc)	2697.5	$0,07\times10^{-12}$	$\Sigma KK\pi$, $\Omega^-\pi^+$, $\Xi K\pi\pi$
Bariones con belleza				
Λ_b^0	(udb)	5624	$1,23\times10^{-12}$	J/ψ(1S)Λ, $pD^0\pi^-$

TABLA C.5: Tabla de modos de desintegración y cocientes de desintegración (*branching ratios*, BR), de bariones estables (bajo interacción fuerte).

partícula	modo desintegración	BR
$n \to$	$pe^-\bar{\nu}_e$	$\approx 100\,\%$
$\Lambda \to$	$p\pi^-$	$63{,}9 \pm 0{,}5\,\%$
	$n\pi^0$	$35{,}8 \pm 0{,}5\,\%$
	$pe^-\bar{\nu}_e$	$8{,}3(1)\,10^{-4}$
$\Sigma^+ \to$	$p\pi^0$	$51{,}6 \pm 0{,}3\,\%$
	$n\pi^+$	$48{,}3 \pm 0{,}3\,\%$
	$\Lambda e^+\nu_e$	$2{,}0(5)\,10^{-5}$
$\Sigma^0 \to$	$\Lambda\gamma$	$\approx 100\,\%$
$\Sigma^- \to$	$n\pi^-$	$99{,}85 \pm 0{,}01\,\%$
	$\Lambda e^-\bar{\nu}_e$	$5{,}7(3)\,10^{-5}$
	$ne^-\bar{\nu}_e$	$1{,}02(3)\,10^{-3}$
$\Xi^0 \to$	$\Lambda\pi^0$	$99{,}52 \pm 0{,}03\,\%$
	$\Sigma^+e^-\bar{\nu}_e$	$2{,}7(4)\,10^{-4}$
$\Xi^- \to$	$\Lambda\pi^-$	$99{,}89 \pm 0{,}03\,\%$
	$\Lambda e^-\bar{\nu}_e$	$5{,}6(3)\,10^{-4}$
	$\Sigma^0e^-\bar{\nu}_e$	$0{,}9(2)\,10^{-4}$

TABLA C.6: Tabla de modos de desintegración y cocientes de desintegración (*branching ratios*, BR), de mesones pseudoescalares.

partícula	modo desintegración	BR
$\pi^+ \rightarrow$	$\mu^+\nu_\mu$	$\approx 100\,\%$
	$e^+\nu_e$	$1{,}230(4) \cdot 10^{-4}$
	$\pi^0 e^+\nu_e$	$1{,}025(34) \cdot 10^{-8}$
$\pi^0 \rightarrow$	$\gamma\gamma$	$98{,}80 \pm 0{,}03\,\%$
$\eta \rightarrow$	$\gamma\gamma$	$39{,}4 \pm 0{,}3\,\%$
	$\pi^0\pi^0\pi^0$	$32{,}5 \pm 0{,}3\,\%$
	$\pi^+\pi^-\pi^0$	$22{,}6 \pm 0{,}4\,\%$
	$\pi^+\pi^-\gamma$	$4{,}7 \pm 0{,}1\,\%$
$\eta' \rightarrow$	$\pi^+\pi^-\gamma$	$44{,}3 \pm 1{,}5\,\%$
	$\rho^0\gamma$	$29{,}5 \pm 1{,}0\,\%$
	$\pi^0\pi^0\eta$	$20{,}9 \pm 1{,}2\,\%$
	$\omega\gamma$	$3{,}0 \pm 0{,}3\,\%$
	$\gamma\gamma$	$2{,}1 \pm 0{,}1\,\%$
$K^+ \rightarrow$	$\mu^+\nu_\mu$	$63{,}4 \pm 0{,}2\,\%$
	$e^+\nu_e$	$1{,}55(7) \cdot 10^{-5}$
	$\pi^+\pi^0$	$21{,}1 \pm 0{,}1\,\%$
	$\pi^+\pi^+\pi^-$	$5{,}58 \pm 0{,}03\,\%$
	$\pi^+\pi^0\pi^0$	$1{,}73 \pm 0{,}04\,\%$
	$\pi^0\mu^+\nu_\mu$	$3{,}3 \pm 0{,}1\,\%$
	$\pi^0 e^+\nu_e$	$4{,}9 \pm 0{,}1\,\%$
$K_S \rightarrow$	$\pi^+\pi^-$	$68{,}6 \pm 0{,}3\,\%$
	$\pi^0\pi^0$	$31{,}4 \pm 0{,}3\,\%$
$K_L \rightarrow$	$\pi^0\pi^0\pi^0$	$21{,}1 \pm 0{,}3\,\%$
	$\pi^+\pi^-\pi^0$	$12{,}6 \pm 0{,}2\,\%$
	$\pi^\pm\mu^\mp\nu_\mu$	$27{,}2 \pm 0{,}3\,\%$
	$\pi^\pm e^\mp\nu_e$	$38{,}8 \pm 0{,}3\,\%$
	$\pi^+\pi^-$	$2{,}08(3) \cdot 10^{-3}$
	$\pi^0\pi^0$	$0{,}94(2) \cdot 10^{-3}$
	$\mu^+\mu^-$	$7{,}3(2) \cdot 10^{-9}$

TABLA C.7: Tabla de modos de desintegración y cocientes de desintegración (*branching ratios*, BR), de mesones con encanto.

partícula	modo desintegración	BR
$D^+ \to$	$e^+\nu_e + X$	$17{,}2 \pm 1{,}9\,\%$
$D^0 \to$	$e^+\nu_e + X$	$6{,}9 \pm 0{,}3\,\%$
$D^+ \to$	$\mu^+\nu_\mu$	$11(6)\cdot 10^{-4}$
	$\bar{K}^0 l^+\nu_l$	$6{,}8 \pm 0{,}8\,\%$
	$\bar{K}^{*0} l^+\nu_l$	$4{,}7 \pm 0{,}4\,\%$
	$\rho^0 l^+\nu_l$	$2{,}5 \pm 0{,}6\,\%$
	$\pi^0 l^+\nu_l$	$3{,}1 \pm 1{,}5\,\%$
	$\bar{K}^0\pi^+$	$2{,}8 \pm 0{,}2\,\%$
	$\bar{K}^{*0}\pi^+$	$1{,}3 \pm 0{,}1\,\%$
	$\bar{K}^0\rho^+$	$6{,}6 \pm 2{,}5\,\%$
	$\pi^+\pi^0$	$2{,}5(7)10^{-3}$
	$\pi^+\rho^0$	$1{,}0(2)10^{-3}$
	$K^+\bar{K}^0$	$5{,}8(6)10^{-3}$
	$\phi\pi^+$	$6{,}1(6)10^{-3}$
	$K^+\rho^0$	$0{,}25(12)10^{-3}$
$D^0 \to$	$K^- l^+\nu_l$	$3{,}4 \pm 0{,}2\,\%$
	$K^{*-} e^+\nu_e$	$1{,}4 \pm 0{,}2\,\%$
	$\pi^- e^+\nu_e$	$3{,}6(6)10^{-3}$
	$K^-\pi^+$	$3{,}8 \pm 0{,}1\,\%$
	$\bar{K}^0\pi^0$	$2{,}3 \pm 0{,}2\,\%$
	$\bar{K}^0\rho^0$	$1{,}5 \pm 0{,}3\,\%$
	$K^-\rho^+$	$10{,}2 \pm 0{,}9\,\%$
	$K^{*-}\pi^+$	$2{,}0 \pm 0{,}2\,\%$
	$K^{*0}\pi^0$	$1{,}9 \pm 0{,}3\,\%$
	$\pi^+\pi^-$	$1{,}4(1)10^{-3}$
	$\pi^0\pi^0$	$0{,}8(2)10^{-3}$
	K^+K^-	$4{,}1(1)10^{-3}$
	$K^0\bar{K}^0$	$0{,}7(2)10^{-3}$
	$K^+\pi^-$	$1{,}5(2)10^{-4}$

TABLA C.8: Tabla de modos de desintegración y cocientes de desintegración (*branching ratios*, BR), de mesones con belleza.

partícula	modo desintegración	BR
$B^+ \to$	$l^+\nu_l + X$	$10{,}2 \pm 0{,}9\,\%$
$B^0 \to$	$l^+\nu_l + X$	$10{,}5 \pm 0{,}8\,\%$
$B^+ \to$	$\bar{D}^0 l^+\nu_l$	$2{,}15 \pm 0{,}22\,\%$
	$\bar{D}^{*0} l^+\nu_l$	$5{,}30 \pm 0{,}80\,\%$
	$\pi^0 l^+\nu_l$	$0{,}9(3)10^{-4}$
	$\rho^0 l^+\nu_l$	$1{,}3(3)10^{-4}$
	$\mu^+\nu_\mu$	$< 2{,}1 \cdot 10^{-5}$
	$\bar{D}^0\pi^+$	$0{,}53 \pm 0{,}05\,\%$
	$\bar{D}^0\rho^+$	$1{,}34 \pm 0{,}18\,\%$
	$\bar{D}^{*0}\pi^+$	$0{,}46 \pm 0{,}04\,\%$
	$\bar{D}^{*0}\rho^+$	$1{,}55 \pm 0{,}31\,\%$
	$\bar{D}^0 D_s^+$	$1{,}3 \pm 0{,}4\,\%$
	$\bar{D}^{*0} D_s^+$	$1{,}2 \pm 0{,}5\,\%$
	$J/\psi K^+$	$1{,}0(1)10^{-3}$
	$J/\psi K^{*+}$	$1{,}4(1)10^{-3}$
	$K^0\pi^+$	$1{,}7(3)10^{-5}$
	$\Lambda_c^- p\pi^+$	$0{,}6(3)10^{-3}$
$B^0 \to$	$D^- l^+\nu_l$	$2{,}11 \pm 0{,}14\,\%$
	$D^{*-} l^+\nu_l$	$4{,}60 \pm 0{,}21\,\%$
	$\pi^- l^+\nu_l$	$1{,}8(6)10^{-4}$
	$\rho^- l^+\nu_l$	$2{,}6(6)10^{-4}$
	$\mu^+\mu^-$	$< 6{,}1 \cdot 10^{-7}$
	$D^-\pi^+$	$0{,}30 \pm 0{,}04\,\%$
	$D^-\rho^+$	$0{,}78 \pm 0{,}14\,\%$
	$D^{*-}\pi^+$	$0{,}28 \pm 0{,}02\,\%$
	$D^{*-}\rho^+$	$0{,}73 \pm 0{,}15\,\%$
	$D^- D_s^+$	$0{,}80 \pm 0{,}30\,\%$
	$D^{*-} D_s^+$	$1{,}11 \pm 0{,}33\,\%$
	$J/\psi K^0$	$0{,}9(1)10^{-3}$
	$J/\psi K^{*0}$	$1{,}3(1)10^{-3}$
	$K^+\pi^-$	$1{,}7(2)10^{-5}$
	$\Lambda_c^- p\pi^+\pi^-$	$1{,}3(6)10^{-3}$

TABLA C.9: Tabla de multipletes de isospín de mesones conocidos. Entre paréntesis, la masa en MeV; el isospín y la paridad G, I^G, así como el espín, paridad y conjugación de carga, J^{PC}. Los mesones con el signo ▶ están, experimentalmente, bien establecidos.

Mesones sin extrañeza ($S = 0; C, B = 0$)

Mesón		$I^G(J^{PC})$	Mesón	$I^G(J^{PC})$
▶ π		$1^-(0^{-+})$	▶ ρ (1600)	$1^+(1^{--})$
▶ η		$0^+(0^{-+})$	▶ ω_3(1670)	$0^-(3^{--})$
▶ ρ	(770)	$1^+(1^{--})$	▶ π_2(1680)	$1^-(2^{-+})$
▶ ω	(783)	$0^-(1^{--})$	▶ ϕ (1680)	$0^-(1^{--})$
▶ η'	(958)	$0^+(0^{-+})$	▶ ρ_3(1690)	$1^+(3^{--})$
▶ f_0	(975)	$0^+(0^{++})$	X(1700)	$^+$
▶ a_0	(980)	$1^-(0^{++})$	▶ f_2(1720)	$0^+(2^{++})$
▶ ϕ	(1020)	$0^-(1^{--})$	f_0(1730)	$0^+(0^{++})$
▶ h_1	(1190)	$0^-(1^{+-})$	π (1770)	$1^-(0^{-+})$
▶ b_1	(1235)	$1^+(1^{+-})$	f_2(1810)	$0^+(2^{++})$
f_0	(1240)	$0^+(0^{++})$	▶ ϕ_J(1850)	0
ρ	(1250)	$1^+(1^{--})$	X(1935)	
▶ f_2	(1270)	$0^+(2^{++})$	▶ f_4(2030)	$0^+(4^{++})$
▶ a_1	(1270)	$1^-(1^{++})$	a_4(2040)	$1^-(4^{++})$
η	(1275)	$0^+(0^{-+})$	a_3(2050)	$1^-(3^{++})$
▶ f_1	(1285)	$0^+(1^{++})$	π_2(2100)	$1^-(2^{-+})$
▶ f_0	(1300)	$0^+(0^{++})$	ρ (2150)	$1^+(1^{--})$
▶ π	(1300)	$1^-(0^{-+})$	f_2(2150)	$0^+(2^{++})$
▶ a_2	(1320)	$1^-(2^{++})$	X(2220)	$0\ (^{++})$
f_2	(1410)	$0^+(2^{++})$	f_2(2240)	$0^+(2^{++})$
▶ f_1	(1420)	$0^+(1^{++})$	ρ_3(2250)	$1^+(3^{--})$
▶ η	(1440)	$0^+(0^{-+})$	f_4(2300)	$0^+(4^{++})$
▶ f_2'	(1525)	$0^+(2^{++})$	ρ_5(2350)	$1^+(5^{--})$
f_1	(1530)	$0^+(1^{++})$	a_6(2450)	$1^-(6^{++})$
▶ f_0	(1590)	$0^+(0^{++})$	f_6(2510)	$0^+(6^{++})$

TABLA C.10: Tabla de multipletes de isospín de mesones conocidos, ordenados según su extrañeza, S, encanto, C y belleza, B. Entre paréntesis, se indica la masa en MeV, el isospín y la paridad G, I^G, así como el espín, paridad y conjugación de carga, J^{PC}. Los mesones con el signo ▶ están, experimentalmente, bien establecidos.

Sin extrañeza ($S=0; C, B=0$)			Extrañeza ($\|S\|=1$)	
Mesón		$I^G(J^{PC})$	Mesón	$I(J^P)$
e^+e^-	(1100-2200)	(1^{--})	▶ K	$\frac{1}{2}(0^-)$
$\bar{N}N$	(1200-3600)		▶ $K^\star$ (892)	$\frac{1}{2}(1^-)$
X	(1900-3600)		▶ K_1 (1280)	$\frac{1}{2}(1^+)$
▶ η_c	(2980)	$0^+(0^{-+})$	▶ $K_0^\star$ (1350)	$\frac{1}{2}(0^+)$
▶ J/ψ	(3097)	$0^-(1^{--})$	▶ K_1 (1400)	$\frac{1}{2}(1^+)$
▶ χ_0	(3415)	$0^+(0^{++})$	$K^\star$ (1410)	$\frac{1}{2}(1^-)$
▶ χ_1	(3510)	$0^+(1^{++})$	▶ $K_2^\star$ (1430)	$\frac{1}{2}(2^+)$
▶ χ_2	(3555)	$0^+(2^{++})$	K (1460)	$\frac{1}{2}(0^-)$
η_c	(3590)	$(\ ^+)$	K_2 (1580)	$\frac{1}{2}(2^-)$
▶ ψ	(3685)	$0^-(1^{--})$	▶ K_2 (1770)	$\frac{1}{2}(2^-)$
▶ ψ	(3770)	(1^{--})	▶ $K_3^\star$ (1780)	$\frac{1}{2}(3^-)$
▶ ψ	(4030)	(1^{--})	$K^\star$ (1790)	$\frac{1}{2}(1^-)$
▶ ψ	(4160)	(1^{--})	K (1830)	$\frac{1}{2}(0^-)$
▶ ψ	(4415)	(1^{--})	▶ $K_4^\star$ (2060)	$\frac{1}{2}(4^+)$
▶ Υ	(9460)	(1^{--})	K_2 (2250)	$\frac{1}{2}(2^-)$
▶ χ_{b0}	(9860)	$(\ ^{++})$	K_3 (2320)	$\frac{1}{2}(3^+)$
▶ χ_{b1}	(9895)	$(\ ^{++})$	K_4 (2500)	$\frac{1}{2}(4^-)$
▶ χ_{b2}	(9915)	$(\ ^{++})$		
			Encanto ($\|C\|=1$)	
▶ Υ	(10023)	(1^{--})	▶ D	$\frac{1}{2}(0^-)$
χ_{b0}	(10235)	$(\ ^{++})$	▶ $D^\star$ (2010)	$\frac{1}{2}(1^-)$
▶ χ_{b1}	(10255)	$(\ ^{++})$	$D^\star$ (2420)	$\frac{1}{2}(\ \ )$
▶ χ_{b2}	(10270)	$(\ ^{++})$	▶ D_s	$0\,(0^-)$
▶ Υ	(10355)	(1^{--})	$D_s^\star$ (2110)	
▶ Υ	(10575)	(1^{--})		
			Belleza ($\|B\|=1$)	
▶ Υ	(10860)	(1^{--})	▶ B	
▶ Υ	(11020)	(1^{--})	$B^\star$ (5325)	

TABLA C.11: Tabla de bariones conocidos. Entre paréntesis, se indica la masa en MeV. También se dan los números cuánticos de la resonancia en la notación $L_{2I,2J}$ (L la onda resonante, I el isospín y J el momento angular total, que es el espín del barión). El número de estrellas representa la calidad de los datos experimentales. Una estrella indica evidencia débil y cuatro estrellas significa total certeza sobre la existencia del barión.

$N(939)P11$	⋆⋆⋆⋆	$\Delta(1232)P33$	⋆⋆⋆⋆	$Z_0(1780)P01$	⋆	$\Sigma(1193)P11$	⋆⋆⋆⋆	$\Xi(1318)P11$	⋆⋆⋆⋆
$N(1440)P11$	⋆⋆⋆⋆	$\Delta(1600)P33$	⋆⋆⋆	$Z_0(1865)D03$	⋆	$\Sigma(1385)P13$	⋆⋆⋆⋆	$\Xi(1530)P13$	⋆⋆⋆⋆
$N(1520)D13$	⋆⋆⋆⋆	$\Delta(1620)S31$	⋆⋆⋆⋆	$Z_1(1725)P11$	⋆	$\Sigma(1480)P13$	⋆	$\Xi(1620)$	⋆
$N(1535)S11$	⋆⋆⋆⋆	$\Delta(1700)D33$	⋆⋆⋆⋆	$Z_1(1900)P13$	⋆	$\Sigma(1560)$	⋆⋆	$\Xi(1690)$	⋆⋆⋆
$N(1540)P13$	⋆	$\Delta(1750)P31$	⋆	$Z_1(2150)$	⋆	$\Sigma(1580)D13$	⋆⋆	$\Xi(1820)D13$	⋆⋆⋆
$N(1650)S11$	⋆⋆⋆⋆	$\Delta(1900)S31$	⋆⋆⋆	$Z_1(2500)$	⋆	$\Sigma(1620)S11$	⋆⋆	$\Xi(1950)$	⋆⋆⋆
$N(1675)D15$	⋆⋆⋆⋆	$\Delta(1905)F35$	⋆⋆⋆⋆			$\Sigma(1660)P11$	⋆⋆⋆	$\Xi(2030)$	⋆⋆⋆
$N(1680)F15$	⋆⋆⋆⋆	$\Delta(1910)P31$	⋆⋆⋆⋆	$\Lambda(1116)P01$	⋆⋆⋆⋆	$\Sigma(1670)D13$	⋆⋆⋆⋆	$\Xi(2120)$	⋆
$N(1700)D13$	⋆⋆⋆	$\Delta(1920)P33$	⋆⋆⋆	$\Lambda(1405)S01$	⋆⋆⋆⋆	$\Sigma(1690)$	⋆⋆	$\Xi(2250)$	⋆⋆
$N(1710)P11$	⋆⋆⋆	$\Delta(1930)D35$	⋆⋆⋆	$\Lambda(1520)D03$	⋆⋆⋆⋆	$\Sigma(1750)S11$	⋆⋆⋆	$\Xi(2370)$	⋆⋆
$N(1720)P13$	⋆⋆⋆⋆	$\Delta(1940)D33$	⋆	$\Lambda(1600)P01$	⋆⋆⋆	$\Sigma(1770)P11$	⋆	$\Xi(2500)$	⋆
$N(1900)P13$	⋆⋆	$\Delta(1950)F37$	⋆⋆⋆⋆	$\Lambda(1670)S01$	⋆⋆⋆⋆	$\Sigma(1775)D15$	⋆⋆⋆⋆		
$N(1990)F17$	⋆⋆	$\Delta(2000)F35$	⋆⋆	$\Lambda(1690)D03$	⋆⋆⋆⋆	$\Sigma(1840)P13$	⋆	$\Omega(1672)P03$	⋆⋆⋆⋆
$N(2000)F15$	⋆⋆	$\Delta(2150)S31$	⋆	$\Lambda(1800)S01$	⋆⋆⋆	$\Sigma(1880)P11$	⋆⋆	$\Omega(2250)$	⋆⋆⋆
$N(2080)D13$	⋆⋆	$\Delta(2200)G37$	⋆	$\Lambda(1810)P01$	⋆⋆⋆	$\Sigma(1915)F15$	⋆⋆⋆⋆	$\Lambda_c(2285)$	⋆⋆⋆⋆
$N(2090)S11$	⋆	$\Delta(2300)H39$	⋆⋆	$\Lambda(1820)F05$	⋆⋆⋆⋆	$\Sigma(1940)D13$	⋆⋆⋆	$\Lambda_c(2593)$	⋆⋆⋆
$N(2100)P11$	⋆	$\Delta(2350)D35$	⋆	$\Lambda(1830)D05$	⋆⋆⋆⋆	$\Sigma(2000)S11$	⋆	$\Lambda_c(2625)$	⋆⋆⋆
$N(2190)G17$	⋆⋆⋆⋆	$\Delta(2390)F37$	⋆	$\Lambda(1890)P03$	⋆⋆⋆⋆	$\Sigma(2030)F17$	⋆⋆⋆⋆	$\Sigma_c(2455)$	⋆⋆⋆⋆
$N(2200)D15$	⋆⋆	$\Delta(2400)G39$	⋆⋆	$\Lambda(2000)$	⋆	$\Sigma(2070)F15$	⋆	$\Sigma_c(2520)$	⋆⋆⋆
$N(2220)H19$	⋆⋆⋆⋆	$\Delta(2420)H3,11$	⋆⋆⋆⋆	$\Lambda(2020)F07$	⋆	$\Sigma(2080)P13$	⋆⋆		
$N(2250)G19$	⋆⋆⋆⋆	$\Delta(2750)I3,13$	⋆⋆	$\Lambda(2100)G07$	⋆⋆⋆⋆	$\Sigma(2100)G17$	⋆	$\Xi_c(2465)$	⋆⋆⋆
$N(2600)I1,11$	⋆⋆⋆	$\Delta(2950)K3,15$	⋆⋆	$\Lambda(2110)F05$	⋆⋆⋆	$\Sigma(2250)$	⋆⋆⋆	$\Xi_c(2645)$	⋆⋆⋆
$N(2700)K1,13$	⋆⋆	$\Delta(3000)$		$\Lambda(2325)D03$	⋆⋆	$\Sigma(2455)$	⋆⋆		
$N(3000)$				$\Lambda(2350)H09$	⋆⋆⋆	$\Sigma(2620)$	⋆⋆	$\Omega_c(2704)$	⋆⋆⋆

Apéndice D: La ecuación de Dirac

La ecuación de Dirac surge de la idea de invariancia relativista (lineal en p y en t),

$$\boxed{(\vec{\alpha}\cdot\vec{\mathbf{p}}+\beta m)\psi(\mathbf{x})=0} \tag{D.1}$$

que al exigir cumplir la ecuación de Klein-Gordon queda

$$\boxed{(\gamma_\mu p^\mu - m)\psi(x)=0} \tag{D.2}$$

siendo $\psi(\mathbf{x})$ el llamado espinor de Dirac, de cuatro componentes; p^μ, el cuadrivector energía-momento $(E,\vec{\mathbf{p}})$ y γ^μ, las matrices (4×4) de Dirac, que cumplen las relaciones de anticonmutación:

$$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}=2g^{\mu\nu} \tag{D.3}$$

En física de partículas es necesario recurrir a la ecuación de Dirac debido a la naturaleza relativista de los procesos entre partículas.

El espinor de Dirac describe dos estados, uno de energía positiva y otro negativa: $E=\pm\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$ asociados respectivamente a estados de partícula y antipartícula. También contiene los dos estados de polarización de las partículas de espín 1/2. Con esto, las partículas y antipartículas tienen las mismas propiedades $(M, J, \ldots)$ excepto las magnitudes electromagnéticas, (carga, momento magnético), que cambian de signo.

Una representación (llamada de Dirac-Pauli) de las matrices γ de Dirac es

$$\gamma^0=\begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix}\qquad \vec{\gamma}=\begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma}\\ -\vec{\sigma} & 0\end{pmatrix}\qquad \gamma^5=\begin{pmatrix} 0 & I\\ I & 0\end{pmatrix}$$

siendo $\vec{\sigma}$ las matrices de Pauli:

$$\sigma_1=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\qquad \sigma_2=\begin{pmatrix} 0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\qquad \sigma_3=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

que cumplen $\vec{\sigma}^2 = 1$, $Tr(\sigma_i) = 0$, $det(\sigma_i) = -1$ y donde la matriz $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$.

Los espinores $\psi(x)$ dan lugar, en el espacio de momentos, a los $u(p)$, al escribir

$$\psi(\mathbf{x}) = u(\mathbf{p})e^{-ip \cdot x} \tag{D.4}$$

y tras cuantizarlos, se interpretan como operadores de creación ($\overline{u}$) o destrucción (u).

Apéndice E: Funciones de estructura del protón

Las funciones de estructura del protón $q(x)$ dependen, en principio, sólo de la variable x, si se supone invariancia de escala. En la práctica existe violación de la invariancia de escala y, por tanto, es necesario considerar funciones $q(x, Q^2)$, siendo Q^2 la transferencia de cuadrimomento al cuadrado para el proceso considerado. No existe ninguna expresión analítica de estas funciones, sino únicamente diversas parametrizaciones basadas en los datos experimentales y en la evolución esperada de estas funciones de acuerdo con los cálculos de QCD. Estas parametrizaciones se obtienen en forma de tablas disponibles en diversas bases de datos, por ejemplo en las librerías del CERN. Estas tablas se renuevan de forma periódica a medida que se dispone de nuevos datos experimentales. Aunque hoy día están obsoletas, es útil considerar las funciones de estructura llamadas EHQL (Eichten *et al.,* 1984), obtenidas a partir de la difusión de neutrinos sobre nucleones a una escala de energía en torno a $Q^2 \approx 5\ GeV^2$; es decir, una escala muy baja, pero típica de las reacciones de neutrinos estudiadas a principio de los años 1980. Estas funciones se detallan a continuación. En primer lugar se definen las funciones para los 'quarks de valencia'

$$x u_v(x) = x[u(x) - \bar{u}(x)] \quad \text{y} \quad x d_v(x) = x[d(x) - \bar{d}(x)]$$

donde se ha utilizado $xq(x)$ en vez de simplemente $q(x)$, ya que las tablas permiten extraer justamente $xq(x)$. En las funciones EHQL se supone invariancia de isospín en el mar de quarks, lo cual significa que $\bar{u}(x) = \bar{d}(x)$. Se supone igualmente que $s(x) = \bar{s}(x)$ y que la contribución de los quarks pesados (c y b) es despreciable. Por tanto, basta especificar las 5 siguientes funciones de estructura

$$x u_v(x) = 1{,}78\, x^{0{,}5}(1 - x^{1{,}51})^{3{,}5} \quad \text{y} \quad x d_v(x) = 0{,}67\, x^{0{,}4}(1 - x^{1{,}51})^{4{,}5}$$

para los quarks de valencia, y de la misma forma para los quarks del mar

$$x\bar{u}(x) = 0{,}182(1 - x)^{8{,}54} \quad \text{y} \quad xs(x) = 0{,}081(1 - x)^{8{,}54}$$

siendo finalmente la función de estructura del gluón de la forma

$$xg(x) = (2{,}62 + 9{,}17\,x)(1-x)^{5{,}90}$$

Aunque estas expresiones están muy simplificadas respecto a las funciones que se manejan actualmente, exhiben sin embargo todas las características esenciales de las funciones de estructura del protón, y pueden utilizarse para hacer estimaciones de las secciones eficaces a baja energía.

Apéndice F: Funciones especiales

F.1 Los armónicos esféricos

El hamiltoniano que describe el movimiento de una partícula en un campo central $V(r)$,

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V(r)$$

cumple$[H, L^2] = 0$ y $[H, L_z] = 0$ siendo L el operador momento angular. Por lo tanto, la función de ondas se puede escribir,

$$\Psi(\vec{r}) = R(r)Y(\theta, \phi)$$

y los armónicos esféricos son funciones propias de los operadores L^2 y L_z:

$$\begin{aligned} L^2\ Y_{\ell,m} &= \ell(\ell+1)\hbar^2\ Y_{\ell,m} \\ L_z\ Y_{\ell,m} &= m\hbar\ Y_{\ell,m} \end{aligned}$$

Su expresión es:

$$Y_{\ell,m}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{4\pi(\ell+1)!}} P_{\ell,m}(\cos\theta) e^{im\phi}$$

estando las funciones $Y_{\ell,m}$, convenientemente normalizadas:

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} -d(\cos\theta) Y^{\star}_{\ell,m} Y_{\ell',m'} = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}$$

Se cumplen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} &Y_{\ell,-m} = (-1)^m Y^{\star}_{\ell,m} \\ &Y_{\ell,m}(\pi-\theta, \pi+\phi) = (-1)^{\ell} Y_{\ell,m}(\theta, \phi) \\ &Y_{\ell,m}(0, \phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4}}\delta_{m0} \end{aligned}$$

Es muy útil introducir $L_{\pm} = L_x \pm iL_y$ con lo que

$$L_{\pm} Y_{\ell,m} = \hbar\sqrt{(\ell \mp m)(\ell \pm m + 1)} Y_{\ell,m\pm 1}$$

Los polinomios de Legendre coinciden con

$$P_\ell(\cos(\theta)) = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} Y_{\ell,0}(\theta)$$

F.2 Tabla de armónicos esféricos

$$\begin{aligned}
Y_{0,0} &= \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \\
Y_{1,0} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta & Y_{1,1} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{i\phi} \\
Y_{2,0} &= \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\tfrac{3}{2} \cos^2\theta - \tfrac{1}{2} \right) & Y_{2,1} &= -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta \cos\theta e^{i\phi} \\
& & Y_{2,2} &= \tfrac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2\theta e^{2i\phi}
\end{aligned}$$

F.3 Tensores esféricos

Un tensor esférico $\Psi_{j\,m}$ se transforma bajo una rotación:

$$\Psi_{j\,m'} = \sum_m \Psi_{j\,m} \mathcal{D}^J_{m\,m'}(\alpha, \beta, \gamma)$$

es decir, forma un grupo irreducible bajo rotaciones, con lo que puede simplificarse:

$$\mathcal{D}^J_{m\,m'}(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-(\alpha m * \gamma n)} d^J_{m\,n}(\beta)$$

siendo $d^J_{m\,n}(\beta) \equiv \langle j\,m \mid e^{-i\beta J_y} \mid j\,n \rangle$, las matrices de rotación reducidas.

F.4 Matrices de rotación $d^{(j)}_{m\,m'}(\theta)$

Las matrices de rotación $d^{(j)}_{m\,m'}(\theta)$ dan los coeficientes de la transformación

$$R_y(\theta)|j\,m\rangle = e^{-i\theta J_y}|j\,m\rangle = \sum_{m'} d^{(j)}_{m\,m'}(\theta)|j\,m'\rangle$$

y sus valores se pueden obtener como se describe a continuación.

Caso j=$\frac{1}{2}$

Se tiene en este caso $J_y = \sigma_y$, y como

$$R_y(\theta) = e^{-i\frac{\theta}{2}\sigma_y} = I\cos\frac{\theta}{2} - i\sigma_y \sin\frac{\theta}{2} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

con lo que

$$d^{(1/2)}_{-1/2,1/2} = -d^{(1/2)}_{1/2,-1/2} = \sin\frac{\theta}{2}$$

$$d^{(1/2)}_{1/2,1/2} = d^{(1/2)}_{-1/2,-1/2} = \cos\frac{\theta}{2}$$

Caso j=1

Análogamente se obtiene

$$d^{(1)}_{0,0} = \cos\theta$$

$$d^{(1)}_{1,0} = -d^{(1)}_{0,1} = d^{(1)}_{0,-1} = -d^{(1)}_{-1,0} = -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}$$

$$d^{(1)}_{1,1} = d^{(1)}_{-1,-1} = \tfrac{1}{2}(1+\cos\theta)$$

$$d^{(1)}_{-1,1} = d^{(1)}_{1,-1} = \tfrac{1}{2}(1-\cos\theta)$$

Se cumple la igualdad $d^{(\ell)}_{m,0} = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} Y_{\ell,m} e^{-im\phi}$.

F.5 Coeficientes de momento angular

En general, el producto de dos tensores esféricos no es un tensor esférico. Por ejemplo el producto de dos vectores puede dar lugar a

- un escalar $\vec{r}\cdot\vec{r}'$,
- un vector axial $\vec{r}\times\vec{r}'$
- o al producto tensorial $\frac{1}{2}(r_i r'_j + r_j r'_i) - \frac{1}{2}\delta_{ij}\sum_{k=1}^{3} r_k r'_k$

con respectivamente una, tres y cinco componentes.

Los coeficientes de Clebsch-Gordan dan la proyección del estado $|jm\rangle$ sobre el producto $|j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle$.

$$\mathcal{C}^{j_1 j_2 j}_{m_1 m_2 m} \equiv \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm\rangle \equiv \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 jm\rangle$$

Los símbolos de Wigner (3-j), los de Racah (6-j) así como los símbolos 9-j son coeficientes del producto de dos, tres o cuatro tensores esféricos.

F.6 La fórmula de Landé

Permite calcular el valor esperado de un operador vectorial $\vec{V}$ (tensor esférico de rango 1), a partir del producto escalar $\vec{J}\cdot\vec{V}$:

$$\langle JM|V_q|JM'\rangle = \frac{1}{J(J+1)}\langle JM|\vec{J}\cdot\vec{V}|JM\rangle\langle JM|\hat{J}_q|JM\rangle$$

F.7 Propiedades de la función δ de Dirac

1. $\displaystyle\int_V f(\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)d\vec{r} = f(\vec{r}_0) \;\longrightarrow\; \int f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0)\,,$
2. $\displaystyle\int f(x)\delta[g(x)]dx = \frac{f(x_0)}{|g'(x_0)|} \;\longrightarrow\; \int \delta[g(x)]dx = \frac{1}{|g'(x_0)|}\,.$

F.8 Tablas de coeficientes de Clebsch-Gordan

En las tablas que siguen, se dan ejemplos de coeficientes de Clebsch-Gordan, utilizables en casos sencillos de composición de estados de momento angular (o de isospín).

Sean dos partículas (o núcleos) con momento angular $\vec{j}_1$ y $\vec{j}_2$, con terceras componentes m_1 y m_2. El momento angular total será $\vec{J} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2$, tomará cualquier valor entre $|j_1 - j_2| \leq J \leq |j_1 + j_2|$ y la tercera componente será $M = m_1 + m_2$ (véase la sección 7.4).

Los coeficientes de Clebsch-Gordan, C_J, dan las amplitudes del estado formado por las dos partículas teniendo en cuenta los valores permitidos de J:

$$\phi_1(j_1, m_1)\phi_2(j_2, m_2) = \Sigma_J C_J \psi(J, M)$$

por ello se suelen denominar también $C^{JM}_{m_1 m_2}$ o $(j_1 m_1 j_2 m_2|JM)$.

Ejemplo, sean dos partículas con $j_1 = 1, m_1 = 1$ y $j_2 = 1, m_2 = -11$. La cuarta línea de la tabla 1×1, da la descomposición:

$$\phi_1(1,1)\phi_2(1,-1) = \sqrt{\frac{1}{6}}\psi(2,0) + \sqrt{\frac{1}{2}}\psi(1,0) + \sqrt{\frac{1}{3}}\psi(0,0)$$

Alternativamente, como $J = 0, 1, 2$, se puede encontrar la forma del estado con $J = 1$ y $M = 0$ (úsese entonces la quinta columna de la tabla):

$$\psi(1,0) = \sqrt{\frac{1}{2}}\phi_1(1,1)\phi_2(1,-1) - \sqrt{\frac{1}{2}}\phi_1(1,-1)\phi_2(1,1)$$

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

m_1	m_2	$J=$	1	1	0	1
		$M=$	$+1$	0	0	-1
$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$		1			
$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$			$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	
$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$			$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$					1

$1 \times \frac{1}{2}$

m_1	m_2	$J=$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
		$M=$	$+\frac{3}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$
$+1$	$+\frac{1}{2}$		1					
$+1$	$-\frac{1}{2}$			$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$			
0	$+\frac{1}{2}$			$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$			
0	$-\frac{1}{2}$					$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	
-1	$+\frac{1}{2}$					$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	
-1	$-\frac{1}{2}$							1

1×1

m_1	m_2	$J=$	2	2	1	2	1	0	2	1	2
		$M=$	$+2$	$+1$	$+1$	0	0	0	-1	-1	-2
$+1$	$+1$		1								
$+1$	0		$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$							
0	$+1$		$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$							
$+1$	-1				$\sqrt{\frac{1}{6}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$				
0	0				$\sqrt{\frac{2}{3}}$	0	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$				
-1	$+1$				$\sqrt{\frac{1}{6}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$				
0	-1							$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$		
-1	0							$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$		
-1	-1									$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$
										$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$
										1	

Apéndice G: La tabla de Mendeleiev

TABLA PERIÓDICA DE LOS ELEMENTOS

	IA	IIA	IIIB	IVB	VB	VIB	VIIB	VIII	VIII	VIII	IB	IIB	IIIA	IVA	VA	VIA	VIIA	VIIIA
1s	1 H 1.00794																	2 He 4.002602
2s	3 Li 6.941	4 Be 9.012182											5 B 10.811	6 C 12.0107	7 N 14.0067	8 O 15.9994	9 F 18.99840	10 Ne 20.1797
3s	11 Na 22.989770	12 Mg 24.3050											13 Al 26.9815	14 Si 28.0855	15 P 30.9737	16 S 32.066	17 Cl 35.4527	18 Ar 39.948
4s	19 K 39.0983	20 Ca 40.078	21 Sc 44.955910	22 Ti 47.867	23 V 50.9415	24 Cr 51.9961	25 Mn 54.93805	26 Fe 55.845	27 Co 58.93320	28 Ni 58.6934	29 Cu 63.546	30 Zn 65.409	31 Ga 69.723	32 Ge 72.61	33 As 74.9216	34 Se 78.96	35 Br 79.904	36 Kr 83.80
5s	37 Rb 85.4678	38 Sr 87.62	39 Y 88.90585	40 Zr 91.224	41 Nb 92.90638	42 Mo 95.94	43 Tc (97.9072)	44 Ru 101.07	45 Rh 102.90550	46 Pd 106.42	47 Ag 107.8682	48 Cd 112.411	49 In 114.818	50 Sn 118.710	51 Sb 121.760	52 Te 127.6	53 I 126.904	54 Xe 131.29
6s	55 Cs 132.90545	56 Ba 137.327	57–71 lantánidos	72 Hf 178.49	73 Ta 180.9479	74 W 183.84	75 Re 186.207	76 Os 190.23	77 Ir 192.217	78 Pt 195.078	79 Au 196.96655	80 Hg 200.59	81 Tl 204.3833	82 Pb 207.2	83 Bi 208.98037	84 Po (208.9824)	85 At (209.9871)	86 Rn (222.0176)
7s	87 Fr (223.0197)	88 Ra (226.0254)	89–103 actínidos	104 Rf (261.1088)	105 Db (262.1141)	106 Sg (266.1219)	107 Bh (264.12)	108 Hs (277)	109 Mt (266.1388)	110 Ds (271)	111	112						
	s^1	s^2	d^1	d^2	d^3	d^4	d^5	d^6	d^7	d^8	d^9	d^{10}	p^1	p^2	p^3	p^4	p^5	p^6

4f	57 La 138.9055	58 Ce 140.116	59 Pr 140.90765	60 Nd 144.24	61 Pm (144.9127)	62 Sm 150.36	63 Eu 151.964	64 Gd 157.25	65 Tb 158.92534	66 Dy 162.50	67 Ho 164.93032	68 Er 167.26	69 Tm 168.93421	70 Yb 173.04	71 Lu 174.967	Lantánidos
5f	89 Ac (227.0278)	90 Th 232.0381	91 Pa 231.03588	92 U 238.0289	93 Np (237.0482)	94 Pu (244.0642)	95 Am (243.0614)	96 Cm (247.0703)	97 Bk (247.0703)	98 Cf (251.0796)	99 Es (252.0830)	100 Fm (257.0951)	101 Md (258.0984)	102 No (259.1011)	103 Lr (262.1098)	Actínidos
		f^1	f^2	f^3	f^4	f^5	f^6	f^7	f^8	f^9	f^{10}	f^{11}	f^{12}	f^{13}	f^{14}	

Índice de figuras

1.1 Esquema del experimento de Thomson 19
1.2 Experimento de Rutherford 21
1.3 Fotografía del positrón en una cámara de niebla 21
1.4 Diagrama de intercambio de π de Yukawa 36
1.5 Diagramas de Feynman básicos de la electrodinámica cuántica .. 41
1.6 Diagrama de Feynman de la difusión elástica $e^- e^-$ 41
1.7 Diagramas de Feynman para $e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^-$ 42
1.8 Diagrama de Feynman para la desintegración beta del neutrón ... 46
1.9 Diagramas de Feynman de intercambio de $W^{\pm}$ 46
1.10 Diagrama de Feynman de la interacción qqg de la teoría QCD ... 48
1.11 Diagramas de quarks del sistema $\Delta(1232)$ 49
1.12 Diagrama de quarks de la interacción $\pi^- p$ 49
1.13 Medidas de α_s en función de Q 51
1.14 Evolución de los acoplamientos *gauge* en función de Q 52

2.1 Parámetros de la superconductividad 60
2.2 Enfriamiento estocástico 61
2.3 La carta de Livingston 61
2.4 Acelerador lineal 62
2.5 Acelerador lineal 63
2.6 Estabilidad de fase 64
2.7 Imanes dipolares y cuadrupolares 66
2.8 Aceleradores del CERN 70
2.9 El colisionador SLC de SLAC 71

3.1 Colisión entre partículas $a + X \rightarrow b + Y$ 74
3.2 Sección eficaz de difusión $n + p$ a baja energía 78
3.3 Secciones eficaces totales 79
3.4 Secciones eficaces protón+protón 80
3.5 Secciones eficaces totales 81
3.6 Sección eficaz total de interacción $\nu_\mu N$ y $\overline{\nu}_\mu N$ 82
3.7 Haz de fotones 83
3.8 Sección eficaz de fotoproducción de hadrones 84

3.9 Secciones eficaces totales 84
3.10 La curva de Bethe-Bloch 88
3.11 Curva de transmisión 91
3.12 La curva de Bragg 92
3.13 Colisión Compton 102
3.14 Espectro Compton 103
3.15 Coeficiente de absorción 105

4.1 Espectro del efecto Comptom 112
4.2 Resolución energética de un detector 114
4.3 Eficiencia geométrica de un detector 116
4.4 Modelo de un contador gaseoso 118
4.5 La curva de Montgomery 119
4.6 Emisión de luz de centelleo 123
4.7 Contador de centelleo 124
4.8 Pulso electrónico 128
4.9 Detector de estado sólido 130
4.10 Carga y potencial en la unión $p-n$ 130
4.11 Esquema del efecto Cherenkov 134
4.12 El calorímetro hadrónico de ATLAS 140
4.13 Lectura del calorímetro de ATLAS 141
4.14 Celdas del calorímetro de ATLAS 141

5.1 La distribución uniforme 150
5.2 La distribución de Poisson 152
5.3 La distribución de Gauss 154

6.1 El detector OMEGA del CERN 169
6.2 El detector ATLAS del LHC del CERN 170
6.3 Simulación del detector DELPHI 178

7.1 Sistemas inerciales de coordenadas 186
7.2 La colisión $\pi^- + p \rightarrow\ m_1 + m_2$ 189
7.3 Desintegración $M \rightarrow\ m_1 + m_2$ 192
7.4 Desintegración a tres cuerpos 194
7.5 Colisión con dos cuerpos 196
7.6 Definición de los momentos angulares 208
7.7 Espectro de momentos del electrón 210
7.8 Verificación de la simetría $\mathcal{T}$ 213
7.9 Oscilaciones $K^0\bar{K}^0$ 216
7.10 Oscilaciones de extrañeza 217

8.1 Representación fundamental del modelo $SU(3)$ de quarks 230
8.2 Técnica gráfica del producto $3 \otimes \overline{3}$ 232
8.3 Multipletes de $SU(3)$ 234
8.4 Octete $J^{\mathcal{P}} = 0^-$ de $SU(3)$ 240

8.5 Mecanismo de producción de los mesones vectoriales 249
8.6 Cociente R entre secciones eficaces 250
8.7 Descubrimiento del mesón J/ψ 251
8.8 La regla de OZI 253
8.9 Umbrales energéticos 255
8.10 Diagrama de la desintegración leptónica $V \rightarrow e^+e^-$ 256
8.11 Multipletes de $SU(4)$ 257
8.12 Multipletes de bariones en $SU(4)$ 258
8.13 El positronio 259
8.14 Potencial de QCD 261
8.15 Aniquilación del charmonio 262
8.16 Desintegración del charmonio 263

9.1 La desintegración β 272
9.2 Experimento de Reines y Cowan 274
9.3 Medida de la vida media del muón 276
9.4 Experimento de los dos neutrinos 276
9.5 Los sucesos observados por MARK I 277
9.6 Cociente de secciones eficaces 278
9.7 Medida de la vida media del leptón τ 279
9.8 Paridad y rotación de 180° 281
9.9 Violación de paridad 282
9.10 Violación de paridad con muones 282
9.11 Violación de la paridad en la desintegración del $\pi \rightarrow \mu \rightarrow e$ ... 283
9.12 Cinemática de $\pi^- p \rightarrow \Lambda K^0$ 284
9.13 Operaciones $\mathcal{P}$, $\mathcal{C}$ y $\mathcal{CP}$ sobre un neutrino 284
9.14 Diagramas de Feynman de algunas desintegraciones débiles 286
9.15 Cinemática de la desintegración del pión 289
9.16 Cinemática de la desintegración del muón 291
9.17 Diagramas de Feynman 292
9.18 Posibles transiciones del quark u 295
9.19 Diagramas de la desintegración $K_L \rightarrow \mu^+\mu^-$ 297
9.20 Diagramas de Feynman de bariones encantados 299
9.21 Desintegraciones del quark c 299
9.22 Desintegraciones inclusivas de D^+ y D^0 300
9.23 Desintegraciones del quark b 303
9.24 Espectros normalizados de electrones 305
9.25 Diagrama que explica la diferencia de masa 308
9.26 Definición de los radios r_1, r_2 309

10.1 Elementos principales de un haz de neutrinos 313
10.2 Espectro de energía de los neutrinos 314
10.3 Ejemplo de detector de neutrinos 315
10.4 Diagramas de Feynman de corrientes cargadas 316
10.5 Secciones eficaces $\nu + Fe$ 318

10.6 Suceso de corriente cargada 319
10.7 Diagramas de Feynman $\nu+$ quark 320
10.8 Suceso de interacción neutrino-electrón 323
10.9 Diagrama de Feynman para el bosón W 324
10.10 Modos de desintegración del bosón W^+ 332
10.11 Modos de desintegración del bosón Z 332
10.12 Autoacoplos de los campos *gauge* no abelianos 336
10.13 Diagramas de Feynman del bosón de Higgs 339
10.14 Modos de desintegración del bosón de Higgs 340
10.15 Diagrama de Feynman $e^+e^- \to f\bar{f}$ 342
10.16 Definición del ángulo de difusión 343
10.17 Diagramas de Feynman e^+e^- 344
10.18 Distribuciones angulares para e^+e^- 344
10.19 Sección eficaz diferencial Bhabha 345
10.20 Diagramas de Feynman $e^+e^- \to f\bar{f}$ 345
10.21 Secciones eficaces σ_γ y σ_Z en función de s 347
10.22 Variación de los observables σ_f y A_{FB}^f con $\sqrt{s}$ 348
10.23 Diagramas de Feynman para ISR y FSR 350
10.24 Sección eficaz $e^+e^- \to had$ 351
10.25 Diagramas de Feynman $e^+e^- \to W^+W^-$ y $e^+e^- \to ZZ$ 353
10.26 Secciones eficaces para e^+e^- 354
10.27 Diagrama de Feynman $e^+e^- \to ZH$ 354
10.28 Sucesos de colisión $e^+e^- \to e^+e^-$ y $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 356
10.29 Sucesos de colisión $e^+e^- \to \tau^+\tau^-$ y $e^+e^- \to had$ 356
10.30 Medidas experimentales del proceso $e^+e^- \to had$ 357
10.31 Identificación de un suceso $b\bar{b}$ 358
10.32 Secciones eficaces de $e^+e^- \to WW$ y $e^+e^- \to ZZ$ 361
10.33 Distribución típica de masa invariante para sucesos de 2 *jets* 362
10.34 Distribución de masa invariante para sucesos de 4 *jets* 363

11.1 Modelos para la interacción fuerte según Q. 370
11.2 Procesos de colisión a alta energía 371
11.3 Difusión elástica de un electrón sobre un protón. 372
11.4 Difusión inelástica de un electrón sobre un protón. 372
11.5 Experimento de MIT-SLAC 374
11.6 Función de estructura del protón W_2 multiplicada por ν 375
11.7 Verificación de la relación de Callan-Gross 376
11.8 La difusión profundamente inelástica 376
11.9 Momento de los partones dentro del protón 377
11.10 Diversos modelos del interior de un protón 380
11.11 Creación de un par $f\bar{f}$ en una colisión e^+e^- 381
11.12 Sección eficaz de producción de pares $f\bar{f}$ 381
11.13 Medidas experimentales de R_{had} 382
11.14 Suceso con dos *jets* en e^+e^- 383
11.15 Proceso de fragmentación de un par $q\bar{q}$ 385

11.16 Proceso de creación de un par e^+e^- 386
11.17 Distribución de masa invariante de dimuones 388
11.18 Cociente de secciones eficaces σ_{en}/σ_{ep} 390
11.19 Funciones de estructura del nucleón 393
11.20 Diagramas de Feynman asociados a la anomalía axial 395
11.21 Diagramas de Feynman 396
11.22 Suceso con tres *jets* de TASSO 396
11.23 El propagador del fotón en teoría de perturbaciones 397
11.24 Evolución de la constante de acoplo efectiva de QCD, α_s 399
11.25 Diagramas de Feynman para colisiones e^+e^- 401
11.26 Medidas de $F_2(x, Q^2)$ de H_1, ZEUS y otros 402
11.27 Evolución de las constantes de acoplo con la escala de energía .. 407
11.28 Diagrama de Feynman de la desintegración del protón 408

12.1 Flujo de neutrinos solares en función de la energía 418
12.2 Dispositivo experimental del experimento de Bugey 422
12.3 Formación de neutrinos en las cascadas hadrónicas 423
12.4 Distribución angular de neutrinos en SUPERKAMIOKANDE .. 424
12.5 Haz de neutrinos del proyecto K2K 426
12.6 Espectro de los neutrinos procedentes de SN-1987A 430
12.7 Regiones del plano $\sin^2 2\theta - \Delta m^2$ excluidas por ν solares 434
12.8 Regiones del plano $\sin^2 2\theta - \Delta m^2$ excluidas por ν atmosféricos 435
12.9 Espectros de masa para los neutrinos 435
12.10 Desintegración β doble 437
12.11 Espectro de energía de la radiación cósmica primaria 439
12.12 Flujo vertical de rayos cósmicos secundarios 440
12.13 Espectro de energía de la radiación cósmica primaria 441
12.14 Dirección de llegada de los rayos cósmicos 442
12.15 Fuentes potenciales de rayos γ 445
12.16 Espectro de las emisiones γ de CRAB 446
12.17 Detector de neutrinos de energía ultra-alta 448

Bibliografía

[1] **D. Griffiths.** *Introduction to Elementary Particles*.
Wiley, New York, 1987.

[2] **F. Halzen and A. D. Martin.** *Quarks and Leptons*.
John Wiley & Sons, New York, 1984.

[3] **B. R. Martin and G. Shaw.** *Particle Physics*.
John Wiley & Sons, New York, 1992.

[4] **D. H. Perkins.** *Introduction to High Energy Physics*.
Cambridge University Press, 2000.

Estos textos tienen un contenido suficientemente amplio como para servir de libros de introducción a la física de partículas.

También pueden consultarse los siguientes textos que combinan la física nuclear y la física de partículas.

[5] **W. E. Burcham and M. Jobes.** *Nuclear and Particle Physics*.
Longman Scientific & Technical, Londres, 1995.

[6] **B. Povh, K. Rith, C. Scholz, F. Zetsche.** *Particles and Nuclei*.
Springer-Verlag, Berlín, 1995.

[7] **W. S. C. Williams.** *Nuclear and Particle Physics*.
Oxford Science Publications, New York, 1992.

Por último, se recogen varias referencias a textos especializados en técnicas experimentales en física nuclear y de partículas. En particular, sobre la medida y detección de la radiación.

[8] **R. J. Barlow.** *Statistics*.
Wiley, Chichester, 1989.

[9] **R. C. Fernow.** *Introduction to experimental particle physics*.
Cambridge University Press, 1986.

[10] **W. R. Leo.** *Techniques for Nuclear and Particle Physics experiments*. Springer-Verlag, Berlín, 1994.

[11] **N. Tsoulfanidis.** *Measurement and Detection of Radiation*. Taylor & Francis Ltd., Londres, 1995.

Índice analítico

ADA, 67
AGASA, 443
AGS, 276
ajustes de funciones, 163
albedo, 99
ALEPH, 30, 178, 355
ALICE, 169
Alvarez, L., 62
AMANDA, 448
Anderson, C. D., 20
ANTARES, 449
antipartículas, 27
atenuación
    de fotones, 104
    ley de, 75
ATLAS, 169
AUGER, 443
avalancha, 121

backscattering, 116
balance detallado, 173, 212
barión, 33, 226, 231
    multipletes, 233
barn (unidad), 75
Becquerel, H., 18
Bethe-Bloch (fórmula), 88
BOREXINO, 420
bosón, 27
    $W^{\pm}$, 38
    Z^{0}, 38
    de Higgs, 24
    intermediario, 38, 48
    vectorial, 248
    $W^{\pm}$, 38
    Z^{0}, 38
bottomonio, 23, 260
Bragg (curva), 92
Bragg-Kleeman (ley), 92
Breit-Wigner (fórmula), 249
bremsstrahlung, 94

Cabibbo, N., 47
    ángulo de, 295
Calorímetros, 136
cámara
    de ionización, 120
    proporcional, 120
Canfranc, 169
CANGAROO, 447
CDF, 178
CELESTE, 447
centelleador
    materiales, 124
    respuesta luminosa, 125
CERN, 17, 23, 24, 30, 37, 44, 45, 69, 82
CESR, 68
Chadwick, J., 20
charmonio, 23, 253, 260
Cherenkov (efecto), 133
CHOOZ, 421
ciclotrón, 64
CKM (matriz), 294, 296
CMS, 169
CNGS, 426–427
Cockroft-Walton, 62
coeficiente
    de absorción, 76, 105
    de atenuación, 98
    de correlación lineal, 149

colisionador, 67
    de iones, 69
    lineal, 70
color, 395
constante
    de acoplamiento, 38
        débil, 45
        electromagnética, 37
        fuerte, 47
        gravitacional, 40
contador
    de centelleo, 123
    Geiger-Müller, 118, 120
corrientes
    cargadas, 23, 316
    neutras, 23, 319
covarianza, 149
Cowan, C. L., 22, 273
creación de pares, 103
    longitud, 104
cuadrivector
    contravariante, 187
    covariante, 187

D0, 178
Dalitz (plot de), 194
De Broglie, L., 16
DELPHI, 30, 178, 355
desviación estándar, 148
detectores
    de gas, 118
    de centelleo, 122
    de estado sólido, 129
    de neutrones, 132
difusión múltiple, 93
Dirac, P. A. M.
    ecuación de, 26
    matrices de, 471
    momento magnético, 26
distribución
    χ^2, 155
    de Poisson, 151
    normal o de Gauss, 153
    uniforme, 150
DORIS, 341

efecto
    Compton, 101
    fotoeléctrico, 100
eficiencia
    de un detector, 114
    geométrica, 114
    intrínseca, 115
    relativa, 115
    total, 116
EGRET, 446
Einstein, A., 20, 36, 100
    fórmula de, 16
electrón, 30
emitancia, 68
energía crítica, 98
enfriamiento estocástico, 60
error
    estadístico, 146
    propagación, 156
    sistemático, 146
espacio fásico, 193
espectroscopía
    de hadrones, 227
estabilidad de fase, 59

factor de forma, 43
FCNC, 320
Fermi, E., 44
    conexión espín-estadística, 28
    constante de, 272
    regla dorada de
        relativista, 192
fermión, 27
Fermilab, 17
Feynman, R., 286
    diagramas de, 38
focalización fuerte, 59
$FODO$, 65
fotocátodo, 126
fotomultiplicador, 126
fotones
    alcance, 106
    atenuación, 104
    coeficiente de absorción, 104
    longitud de conversión, 105

fotopico, 100
fragmentación, 265
FREJUS, 423
Friedman, J., 22
FSR, 349
FWHM, 114, 153

GALLEX, 419
ganancia
  de un detector, 120
  de un fotomultiplicador, 118, 127
GARGAMELLE, 319, 341
Garwin, 282
Gell-Mann, M., 22, 34, 286
GIM (mecanismo), 297
Glashow, S., 23, 44, 297
gluón, 32, 395
Goldhaber, 284
Gran Sasso, 169, 420
gran unificación, 50, 405
GRB, 443
Grodzins, 284
Gross, D., 399

hadrones, 225–254
HEGRA, 444
Heisenberg, W., 16
  principio incertidumbre, 16
  representación, 185
Heitler (modelo de), 136
helicidad, 208–209
helio, 205
Hess, V., 437
Higgs, P. W.
  bosón de, 24, 338
  mecanismo de, 24, 337-341
hipercarga, 34, 227
HOMESTAKE, 419

ICARUS, 427
ICECUBE, 449
Iliopoulos, J., 23, 297
ILL, 169
imán
  cuadrupolar, 65
  dipolar, 65
IMB, 52, 169, 423
interacción
  débil, 273
  fuerte, 370
invariancia
  de escala, 373–401
  gauge, 184, 219
  Lorentz, 185
ionización específica, 92
ISIS, 426
ISR, 349

K2K, 426, 435
KAMIOKANDE, 52, 169, 419–429
KAMLAND, 421, 434
KARMEN, 426
Kendall, H., 22
klystron, 59

L3, 30, 178, 355
LAMPF, 426
Lawrence, E., 64
Lederman, L., 23, 275, 282
LEP, 68
leptones, 25, 32
  familias, 32, 272
leyes de conservación, 183, 220
LHC, 24, 68, 69
LHCb, 169
Llewellyn-Smith (relaciones), 322
longitud
  de absorción, 76
  de colisión, 76, 77
  de conversión, 105
  de creación de pares, 104
  de radiación, 94, 96
LSND, 426
luminosidad, 67

MAGIC, 447
Maiani, L., 23, 297
Mandelstam (variables), 42, 195
MARK I, 277

masa efectiva, 188, 193
máxima verosimilitud, 157
media, 148
mesón, 22, 33, 226, 231
    masas, 241
    multipletes, 238
    pesado, 248
    pseudoescalar, 238
    vectorial, 239, 254
Millikan, R., 19
mínimos cuadrados, 161
MINOS, 427
modelo
    de quarks, 225
    estándar, 15
Moliere (radio de), 137
momento
    dipolar magnético, 27, 246
Montgomery (curva), 119
Mott (fórmula), 93
muón, 30
muonio, 172

NA14, 83
Neeman, Y., 22
neutrinos, 272
    familias, 17, 32, 272
Newton, I., 16
nivel de confianza, 163
Noether, E., 183
número
    bariónico, 33, 226
    leptónico, 32, 280
NUMI, 426
NUSEX, 423
NUTEV, 322

OMEGA, 168
OPAL, 30, 178, 355
OPERA, 427
oscilaciones
    betatrón, 65
    sincrotrón, 63
OZI (regla de), 252

paridad
    de partículas, 206
partones, 82
Paschos-Wolfenstein
    relación, 322
Pauli, W.
    matrices de, 201, 471
    neutrino, 22
    principio de exclusión, 29, 205
PEP-II, 68
Perl, M., 23, 277
Perrin, F., 18
PETRA, 341
pión, 37
Planck, M.
    masa de, 52
poder frenante, 89
Politzer, H. D., 399
positrón, 20
positronio, 98, 258
postulado de simetrización, 28
potencial
    medio de excitación, 89
Powell, C. F., 22

QCD, 47, 395
QED, 40
quarkonio, 260
quarks, 25, 31
    color, 31, 234
    confinamiento, 47, 226
    familias, 30
    fragmentación, 265
    interacción hiperfina, 244
    números cuánticos, 226
    sabor, 31
quiralidad, 284

radio
    clásico del electrón, 76
RAL, 426
Rasetti, 275
rayos
    catódicos, 17
recombinación, 120
recorrido libre medio, 75

Reines, F., 22, 273
relación alcance-energía, 90
resolución energética, 113
resonancia, 34
retrodifusión, 99
Richter, B., 23, 277
Rossi-Greisen (ecuación), 94
ruido
    carga equivalente (ENC), 131
    de fondo, 116
Rutherford, E.
    difusión, 42
    fórmula, 93
    sección eficaz, 43

SAGE, 419
Schrödinger, E.
    ecuación, 184
Schwartz, M., 275
sección eficaz, 73–76
    diferencial, 74
semiconductores, 129
    potencial de polarización, 131
    zona desierta, 129
simetría, 220
    $\mathcal{C}$, conjugación de carga, 209–211
    $\mathcal{CPT}$, 218
    $\mathcal{P}$, paridad, 206–209
    $\mathcal{T}$, inversión temporal, 212–214
sincrotrón, 64
sistemas de coordenadas, 189
SLAC, 277
SLC, 68
SLD, 178
SN-1885A, 428
SN-1987A, 428
SNO, 420, 431
SOUDAN, 423
SPEAR, 67, 277, 341
STACEE, 447
Steinberger, J., 275
SU(2), 200
SU(3), 22, 229
SU(4), 257
SU(5), 258
Sunyar, 284
superconductividad, 59
SUPERKAMIOKANDE, 419–431

tauón, 30, 273
Taylor, R., 22
tensor métrico, 187
Tevatrón, 17, 68
Thomas-BMT (ecuación), 173
Thomson, J. J., 18
    sección eficaz, 76
tiempo
    de respuesta, 114
    muerto, 117
Ting, S., 23

unión $p - n$, 129
unidad de masa atómica, 20
unificación, 405

Van de Graaff, 62
Van der Meer, S., 60
Van Royen-Weisskopf (fórmula), 254
varianza, 148
velocidad de deriva, 121
VERITAS, 447

WA4, 83
WA56, 168
Weinberg, S., 321
Weinrich, 282
WHIPPLE, 444
Wilczek, F., 399
Wu, C. S., 281

Yukawa, H., 22–36
    potencial, 37

Zweig, G., 22

COLECCIÓN EDUCACIÓ

Serie Materials

1 **Didáctica de la geometría: el modelo Van Hiele**
Rosa María Corberán y otros

2 **Manual d'ús de l'estàndard oral** (6.ª edición)
Josep Lacreu Cuesta

3 **Lingüística general y aplicada** (3.ª edición)
Ángel López García

4 **Manual de embriología y anatomía general**
Víctor Smith Agreda y otros

5 **Siete colores musicales**
Ramón Serra Blasco, Helga Dietrich

6 **Electromagnetisme bàsic**
Francisco Pomer Murgui

7 **Introducció a la informàtica**
Enric Casaban

8 **Manual de geografia física** (2.ª edición)
Vicenç M. Rosselló, Josep M. Panareda, Alexandre J. Pérez Cueva

9 **Mètodes numèrics per a la física** (3.ª edición)
Rafael Guardiola, Emili Higón, Josep Ros

10 **Art i educació**
Ricard Huerta

11 **Introducció històrica a l'antropologia (I) Textos antropològics dels clàssics greco-romans**
Joan B. Llinares

12 **El control del vocabulario en la recuperación de información** (2.ª edición)
Frederick W. Lancaster

13 **Manual de termodinàmica** (2.ª edición)
Vicent Gandia Gomar

14 **Química orgànica general** (2.ª edición)
Ramon Mestres, Salvador Gil

15 **Fonaments de bioquímica** (4.ª edición)
Juli Peretó, Ramon Sendra, Mercè Pamblanco, Carme Bañó

16 **Estructuras de álgebra multilineal**
Joaquín Olivert Pellicer

17 **Mètodes matemàtics. Variable complexa** (2.ª edición)
José A. Peñarrocha, Arcadi Santamaria, Jordi Vidal

18 **Política y prácticas de la educación de personas adultas**
Francisco Beltrán Llavador, José Beltrán Llavador

19 **Atles escolar del País Valencià** (2.ª edición)
Vicenç M. Rosselló, Vicente Gozálvez, dirs.

20 **Introducció a la topologia**
Francisca Mascaró, Juan L. Monterde, Juan J. Nuño, Rafael Sivera

21 **Teoria del coneixement** (2.ª edición)
Josep Lluís Blasco, Tobies Grimaltos

22 Comprendre i gestionar la ciutat: un assaig d'economia i política urbana
Josep Sorribes

23 Investigación evaluativa en documentación. Aplicación a la documentación médica
M. Francisca Abad

24 Pràctiques escèniques de l'edat mitjana als segles d'or
L. Quirante, E. Rodríguez, J. L. Sirera

25 Manual de física estadística
Salvador Mafé, Juan de la Rubia

26 Instrumentos ópticos y optométricos. Teoría y prácticas
M. Martínez Corral, Walter D. Furlan, Amparo Pons, Genaro Saavedra

27 Manual de óptica geométrica
Adelina Felipe, César Albarrán

28 Introducció a l'anàlisi i disseny d'algorismes
Francesc J. Ferri, Jesús V. Albert, Gregorio Martín

29 Història del pensament biològic
Josep Lluís Barona

30 Metodologia en infermeria
Empar Benavent, Ramón Camaño, Andrés Cuesta

31 Sistema sexo/género. Identidades y construcción de la subjetividad
Isabel Martínez Benlloch, A. Bonilla Campos

32 Però, què és això de la genètica?
M. Dolors Moltó, Lluís Pascual

33 L'educació literària
Josep Ballester

34 Matemàtiques per a economistes. Càlcul diferencial
M. J. Canós, C. Ivorra

35 Manual de documentació audiovisual en ràdio i televisió
Enric Bellveser, ed.

36 Introducció a l'econometria
Dulce Contreras, Jorge Belaire

37 Manual de treball social (2.ª edición)
María José de Rivas

38 Història de l'art del segle XIX
Carmen Gracia

39 Mètodes numèrics per a l'àlgebra lineal
F. Aràndiga, R. Donat, P. Mulet

40 Fundamentos de optometría. Refracción ocular
Walter Furlan, Javier García Monreal, Laura Muñoz Escrivá

41 Pràctiques d'estadística matemàtica
Juan José Abellán y otros

42 Fonaments de la comunicació
Ángel López, Manuel Pruñonosa, eds.

43 Història contemporània d'Amèrica (2.ª edición)
Joan del Alcàzar, Nuria Tabanera, Josep M. Santacreu, Antoni Marimon

44 Coneixements bàsics de màrqueting
Alejandro Mollá Descals, coord.

45 Pràctiques de citologia i histologia
Xavier Ponsoda, Joan Nàcher, Asunción Molowny, Carlos López García

46 Valoració de les inversions productives en l'empresa
Josep E. Farinós, Ana M. Ibáñez, Amparo Medal, Amàlia Rodrigo, M. Àngels Soler

47 Astronomia fonamental
Vicent J. Martínez, Joan A. Miralles, Enric Marco

48 Fonts d'informació en ciències de la salut
Alejandro de la Cueva, Rafael Aleixandre, Josep Manuel Rodríguez i Gairín

49 Diccionario esencial de neuroanatomía. Sinónimos y epónimos
Amparo Ruiz Torner

50 Patologia quirúrgica osteoarticular. Generalitats
Manuel Sanchis-Guarner Cabanilles

51 Geologia i química del cosmos i de la Terra
Josep M. Amigó, Luis E. Ochando

52 Psicologia de l'addicció
M. Teresa Cortés, Lluís Mayor, coords.

53 Fonaments de zoologia dels artròpodes
Jesús Selfa, Juli Pujade-Villar

54 Cirurgia abdominal
Ramón Trullenque, ed.

55 Fundamentos de colorimetría
Pascual Capilla, José M. Artigas, Jaume Pujol, coords.

56 Un curso de álgebra
Gabriel Navarro

57 Geografia regional d'Espanya
Joaquim Farinós, ed.

58 Tecnología del color
José M. Artigas, Pascual Capilla, Jaume Pujol, coords.

59 Història de l'art medieval
Juan V. García Marsilla

60 Aproximació numèrica
Sergio Amat, Francesc Aràndiga, José Vicente Arnau, Rosa Donat, Pep Mulet, Rosa Peris

61 Sistemas electrónicos digitales. Fundamentos y diseño de aplicaciones
Enrique Sanchis, coord.

62 Física nuclear y de partículas
Antonio Ferrer Soria

63 Electrocardiografía en la práctica clínica (2.ª edición)
Francisco Javier Chorro, Vicente López Merino, coords.

64 Introducción a la programación estructurada en C
Francisco A. Martínez, Gregorio Martín

65 Técnicas de análisis de imagen. Aplicación en biología
José F. Pertusa Grau

66 Vocabulario de información y documentación automatizada
Luis M. Corbalán, Carlos B. Amat

67 Introducció a l'enginyeria dels reactors químics
Agustín Escardino, Àngel Berna

68 Historia contemporánea de América
Joan del Alcàzar, Nuria Tabanera, Josep M. Santacreu, Antoni Marimon

69 Perspectivas sobre comunicación y sociedad
Antonio Méndez Rubio

70 Fonaments de zoologia
José Manuel Michelena, Javier Lluch, Joaquín Baixeras

71 Diccionari de botànica
Antoni Aguilella, Felisa Puche

72 Fundamentos y electrónica de las comunicaciones
E. Sanchis, V. González, G. Torralba

73 Teoría del conocimiento
José Luis Blasco, Tobies Grimaltos

74 Fundamentos de visión binocular
Álvaro M. Pons Moreno, Francisco M. Martínez Verdú

75 Teoria d'autòmats i llenguatges formals
Francesc J. Ferri

76 Toxicologia clínica
Ramon Bataller Sifre, ed.

77 Filosofía de la mente
Carlos J. Moya

78 Psicología y economía
Ismael Quintanilla, Tomás Bonavía

79 Economia espanyola i del País Valencià
Vicent Soler, ed.

80 Conocimiento y lenguaje
Ángel López García, Beatriz Gallardo Paúls, eds.

81 Astronomía fundamental
Vicent J. Martínez, Joan Antoni Miralles, Enric Marco, David Galadí-Enríquez, eds.

82 Quimiometría
Carlos Mongay Fernández

83 Física de partículas y de astropartículas
Antonio Ferrer Soria, Eduardo Ros Martínez